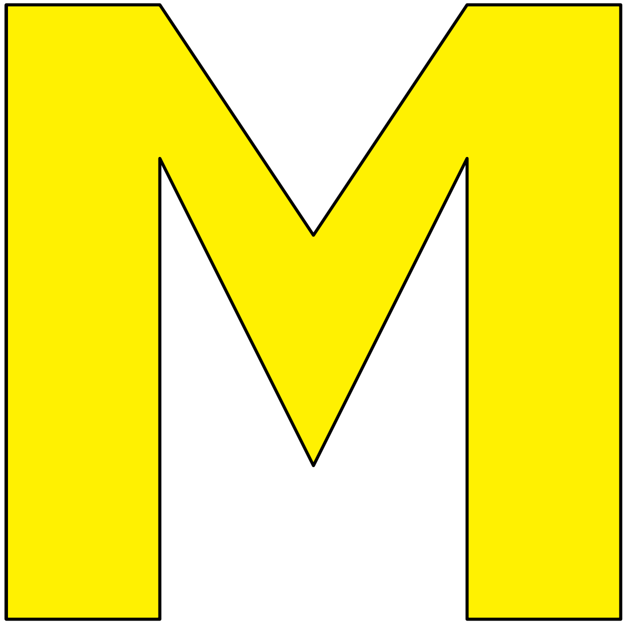
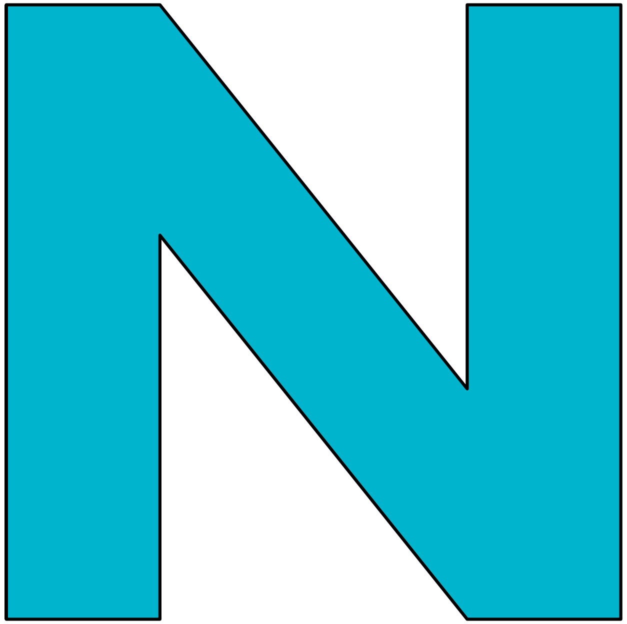
多面体の対称性と群

対称性 (シンメトリー) とは

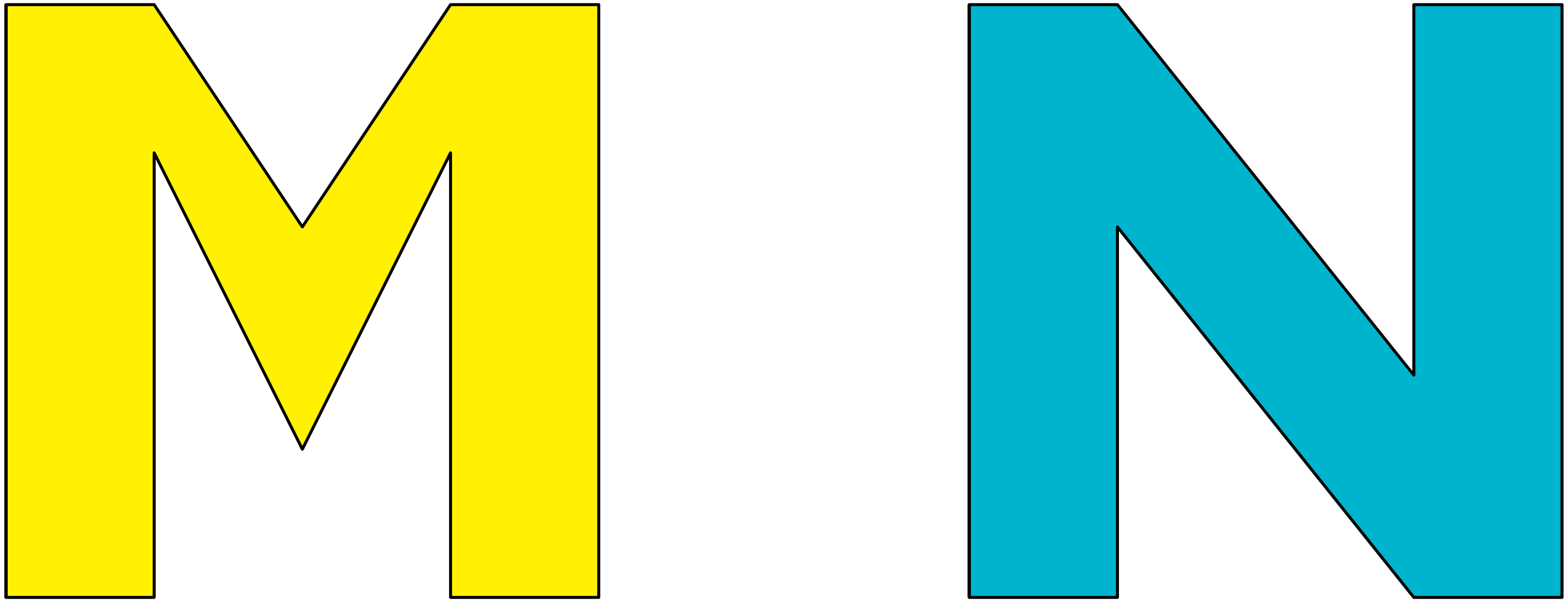


線対称



点対称

対称性 (シンメトリー) とは



線対称　　点対称

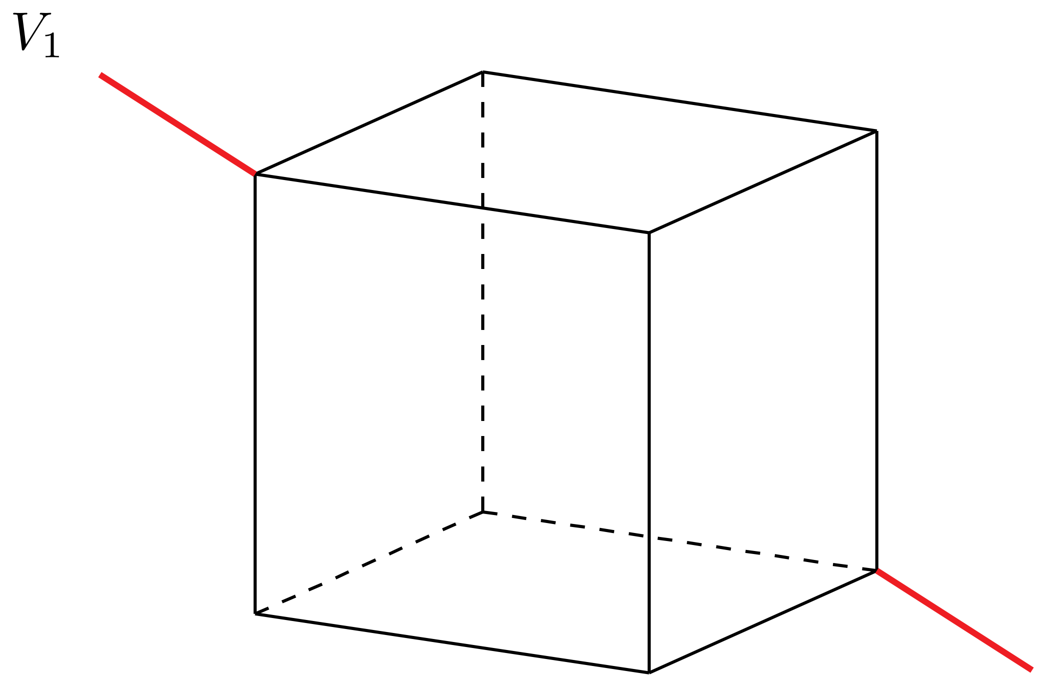
- **対称性 (シンメトリー)** とは，変換 (あるいは運動) を施しても，もとの状態とぴったり重なること．

正 6 面体の対称性

- 空間の回転変換は, 回転軸をもつ.
- 360° 回転は 0° 回転と同じで自明 (恒等変換).

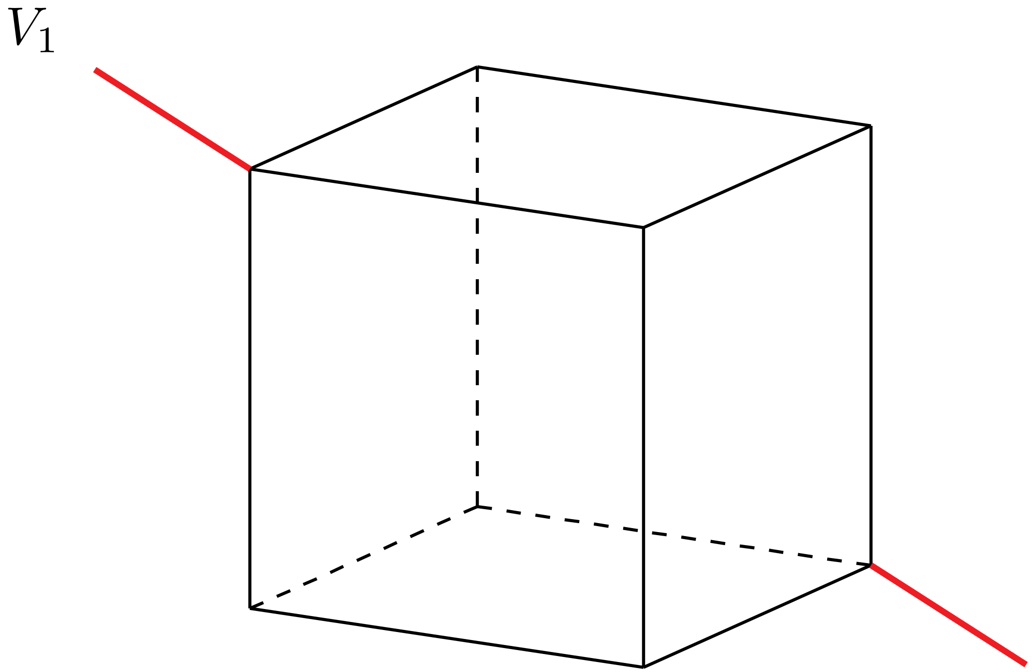
正 6 面体の対称変換の数

軸が頂点を通る場合



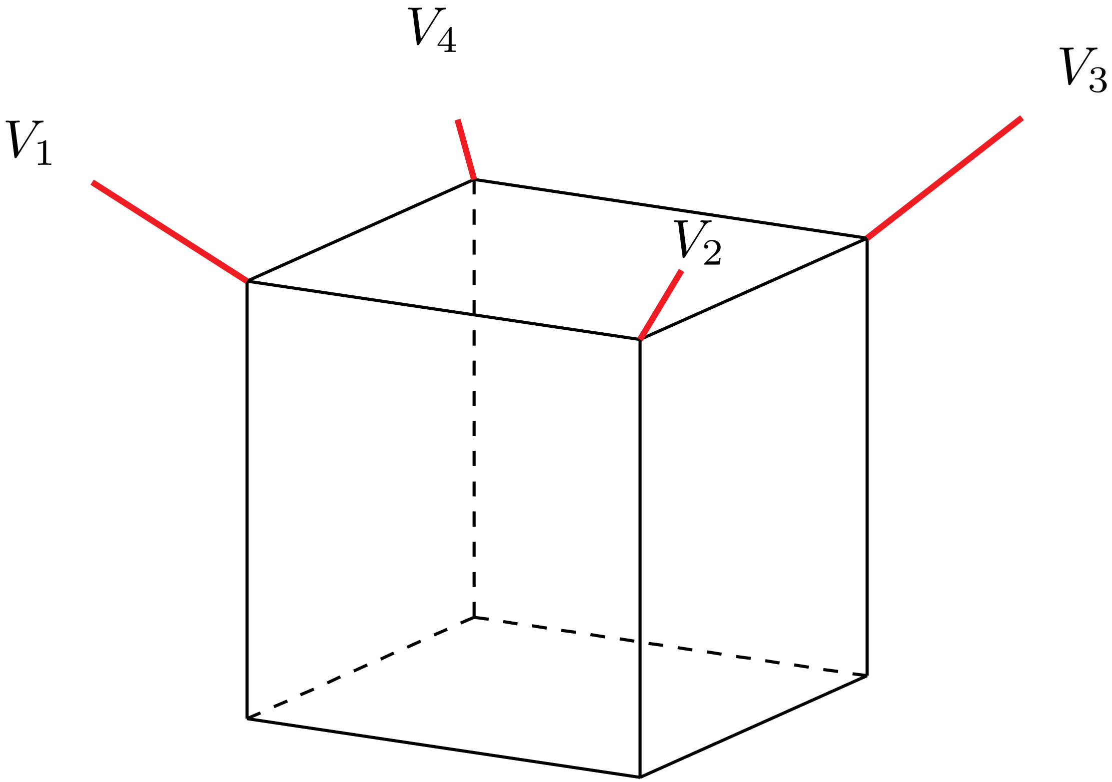
V_1

軸が頂点を通る場合



$V_1{}^2$

軸が頂点を通る場合



$V_1,\ {V_1}^2$

$V_2,\ {V_2}^2$

$V_3,\ {V_3}^2$

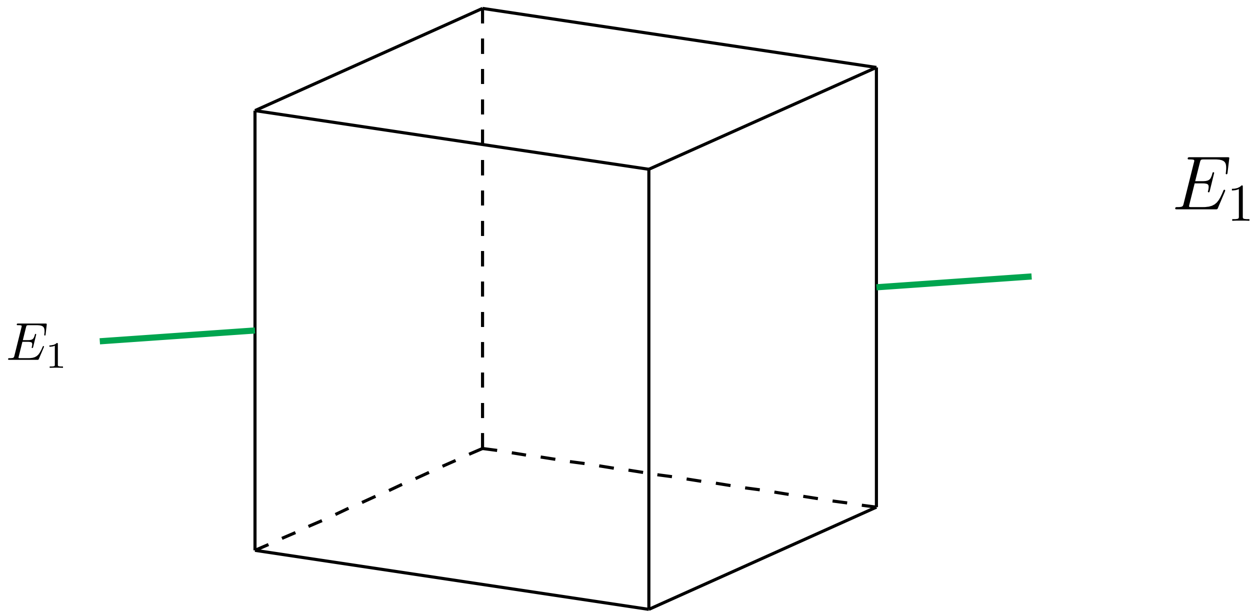
$V_4,\ {V_4}^2$

正 6 面体の対称変換の数

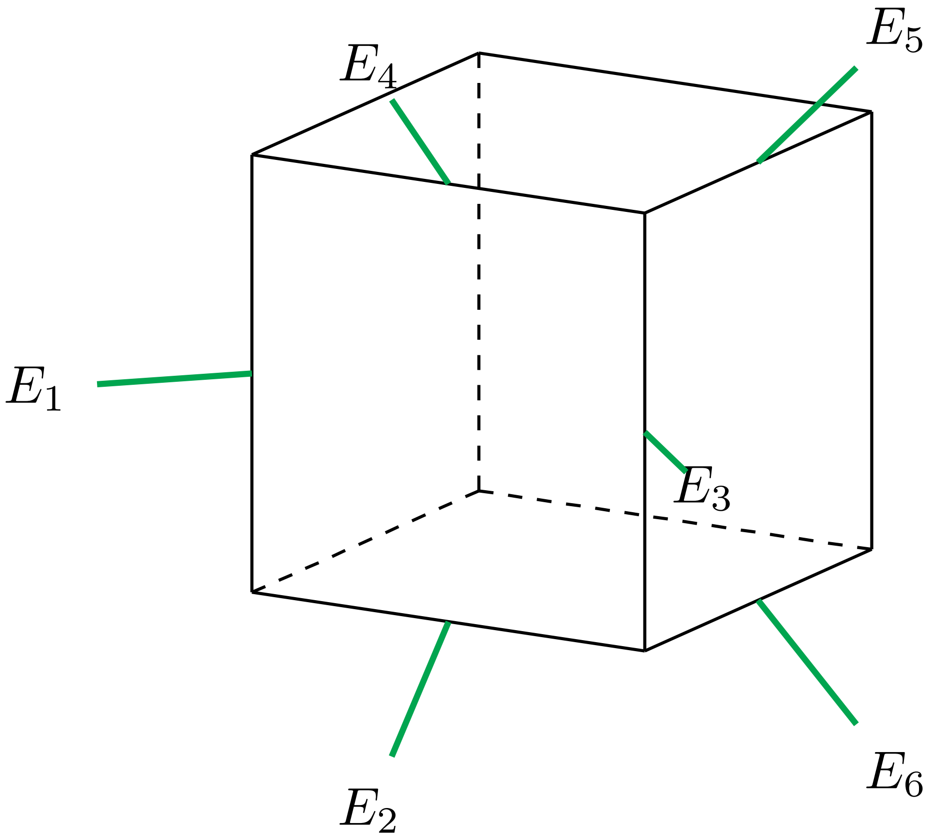
- 頂点を通る軸による回転:　8 種

$V_1,\ {V_1}^2,\ V_2,\ {V_2}^2\ ,V_3,\ {V_3}^2,\ V_4,\ {V_4}^2$

軸が辺の中点を通る場合



軸が辺の中点を通る場合



$$E_1,\ E_2,\ E_3,$$

$$E_4,\ E_5,\ E_6$$

正 6 面体の対称変換の数

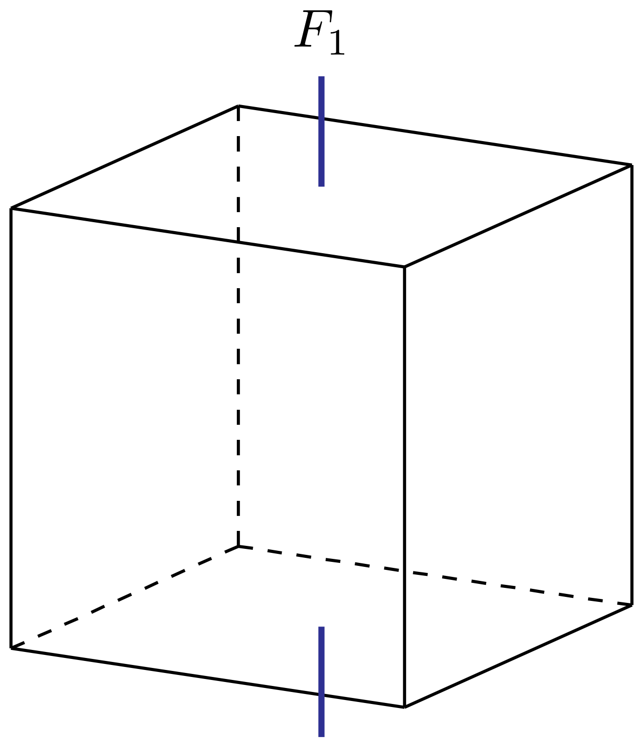
- 頂点を通る軸による回転:　8 種

  $V_1,\ {V_1}^2,\ V_2,\ {V_2}^2\ ,V_3,\ {V_3}^2,\ V_4,\ {V_4}^2$

- 辺の中点を通る軸による回転:　6 種

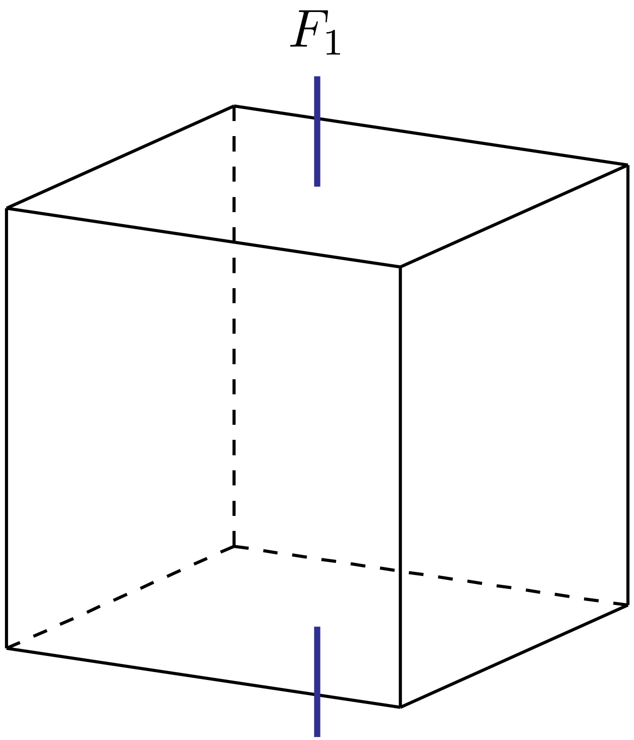
  $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5,\ E_6$

軸が面の重心を通る場合



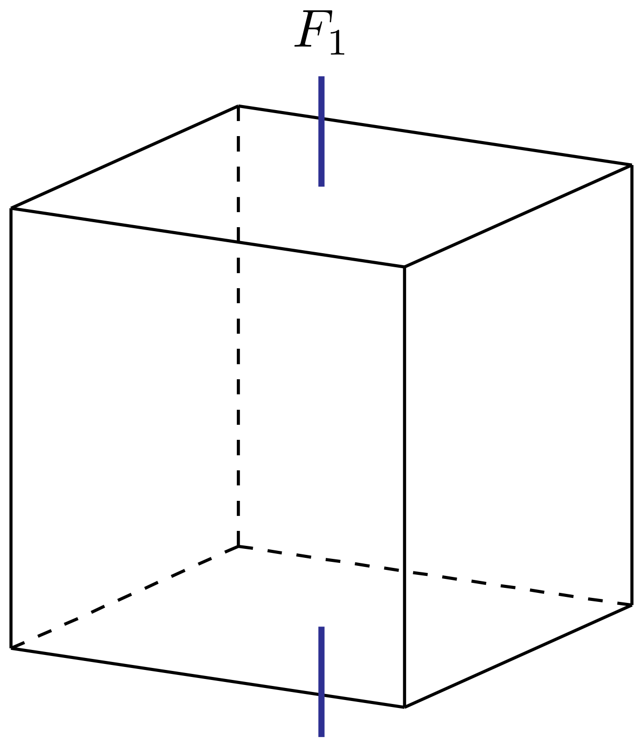
F_1

軸が面の重心を通る場合



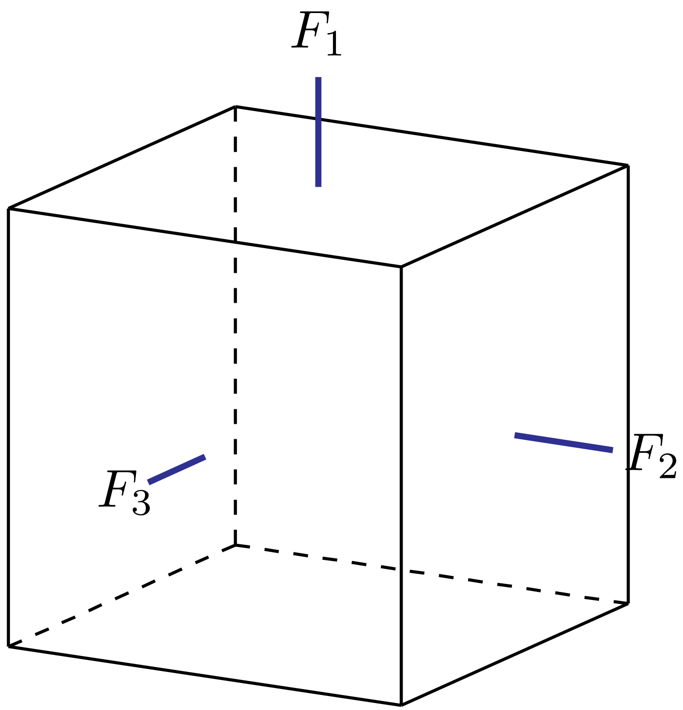
$$F_1{}^2$$

軸が面の重心を通る場合



$$F_1{}^3 = F_1{}^{-1}$$

軸が面の重心を通る場合



$$F_1,\ \ {F_1}^2,\ \ {F_1}^3$$

$$F_2,\ \ {F_2}^2,\ \ {F_2}^3$$

$$F_3,\ \ {F_3}^2,\ \ {F_3}^3$$

正 6 面体の対称変換の数

- 頂点を通る軸による回転:　8 種

$V_1,\ {V_1}^2,\ V_2,\ {V_2}^2\ , V_3,\ {V_3}^2,\ V_4,\ {V_4}^2$

- 辺の中点を通る軸による回転:　6 種

$E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5,\ E_6$

- 面の重心を通る軸による回転:　9 種

$F_1,\ {F_1}^2,\ {F_1}^3,\ F_2,\ {F_2}^2,\ {F_2}^3,\ F_3,\ {F_3}^2,\ {F_3}^3$

正 6 面体の対称変換の数

- 頂点を通る軸による回転:　8 種

  $V_1,\ {V_1}^2,\ V_2,\ {V_2}^2\ , V_3,\ {V_3}^2,\ V_4,\ {V_4}^2$

- 辺の中点を通る軸による回転:　6 種

  $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5,\ E_6$

- 面の重心を通る軸による回転:　9 種

  $F_1,\ {F_1}^2,\ {F_1}^3,\ F_2,\ {F_2}^2,\ {F_2}^3,\ F_3,\ {F_3}^2,\ {F_3}^3$

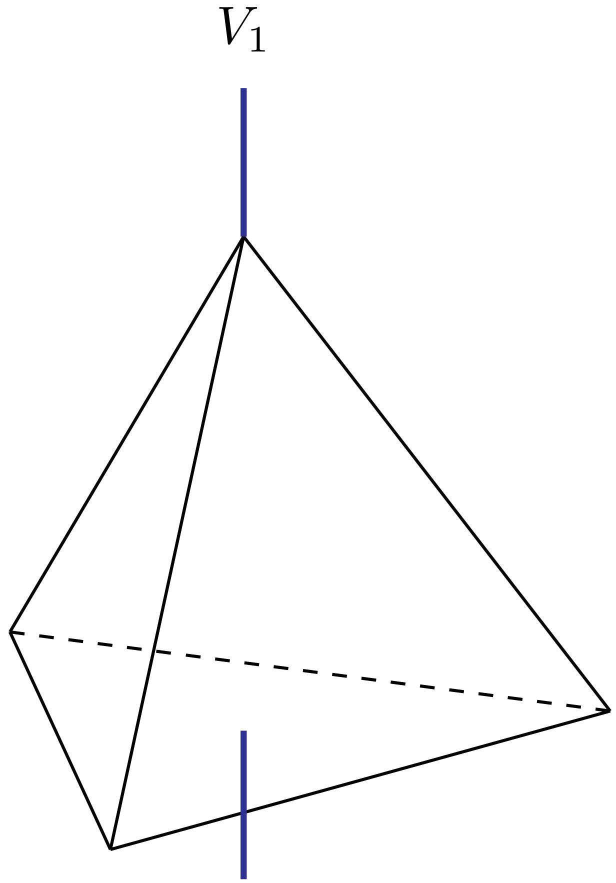
- 恒等変換 I をあわせて, $8+6+9+1=24$ 種

正 4 面体の対称性

- 軸が頂点を通るとき, かならず対面の重心も通る.

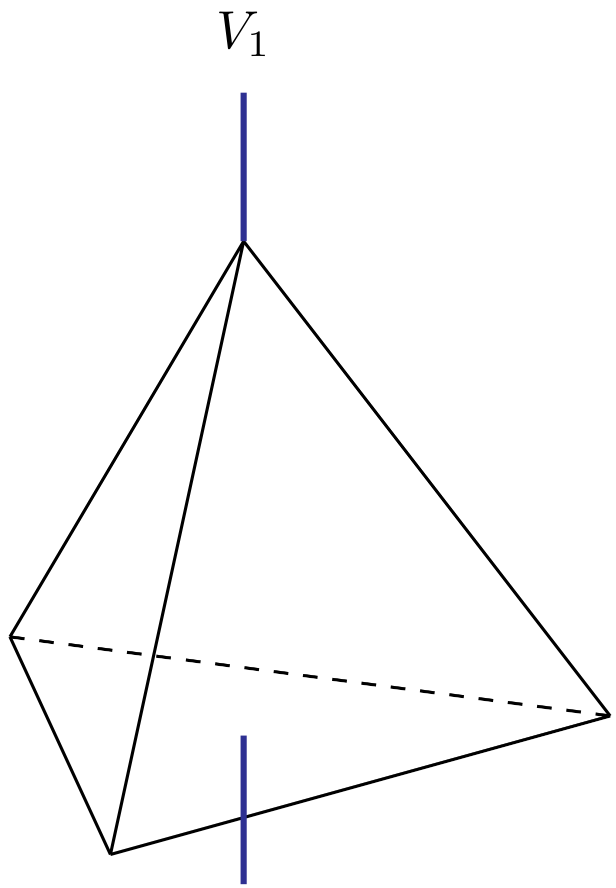
正 4 面体の対称変換の数

軸が頂点を通る場合



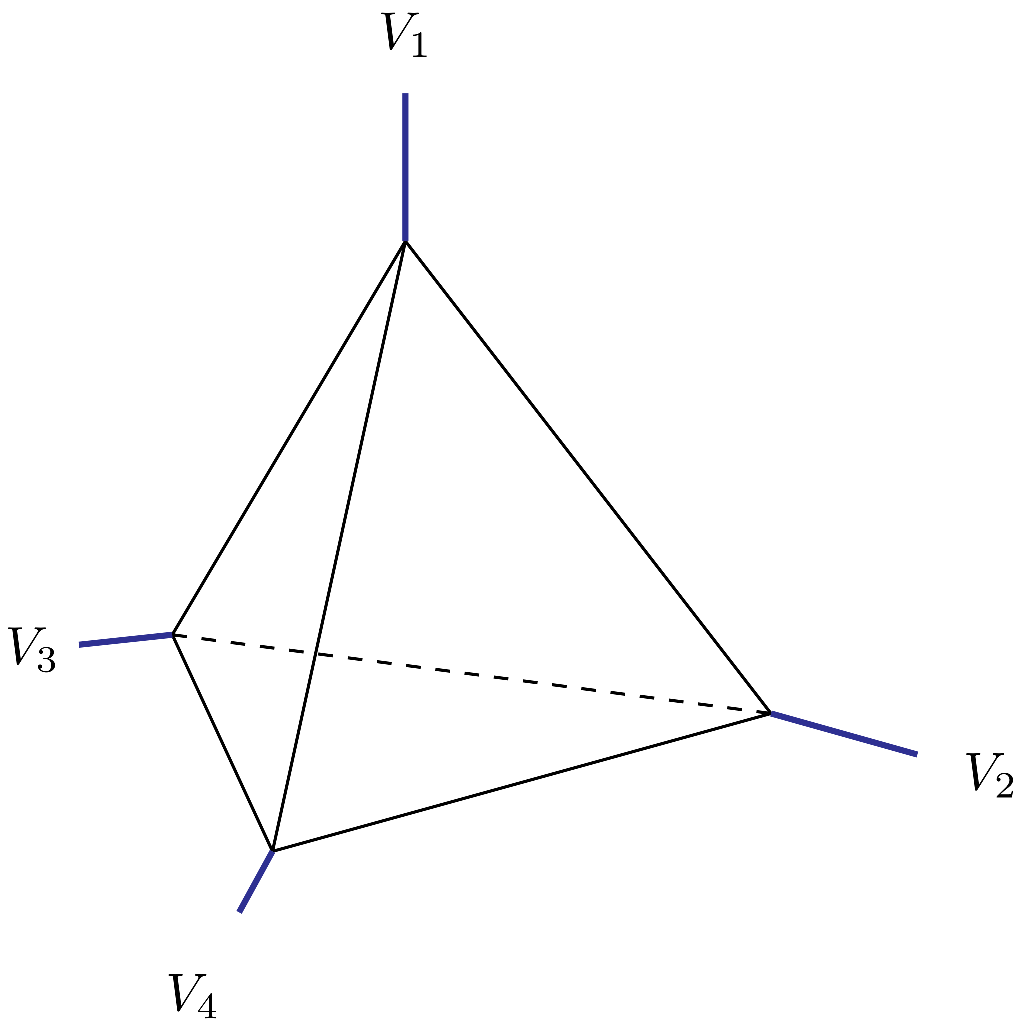
V_1

軸が頂点を通る場合



$$V_1{}^2$$

軸が頂点を通る場合



$V_1,\ {V_1}^2$

$V_2,\ {V_2}^2$

$V_3,\ {V_3}^2$

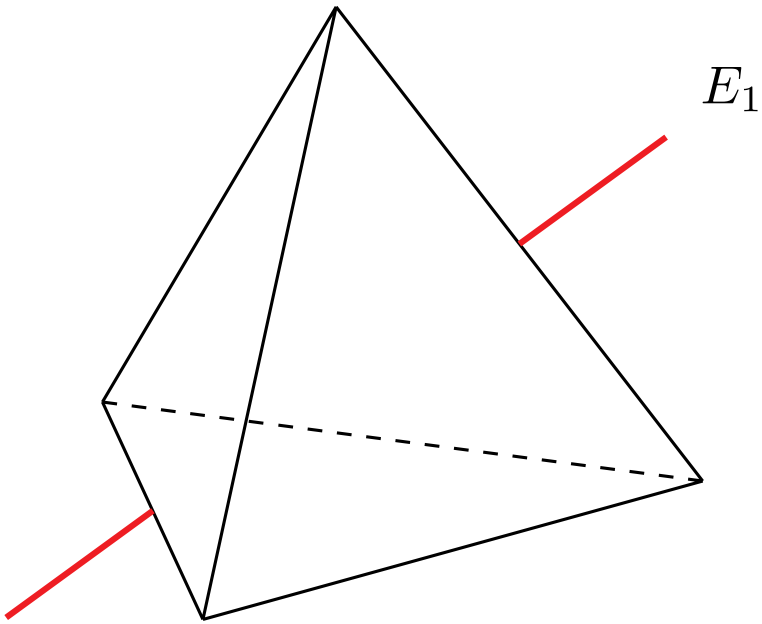
$V_4,\ {V_4}^2$

正 4 面体の対称変換の数

- 頂点と面の重心を通る軸による回転:　8 種

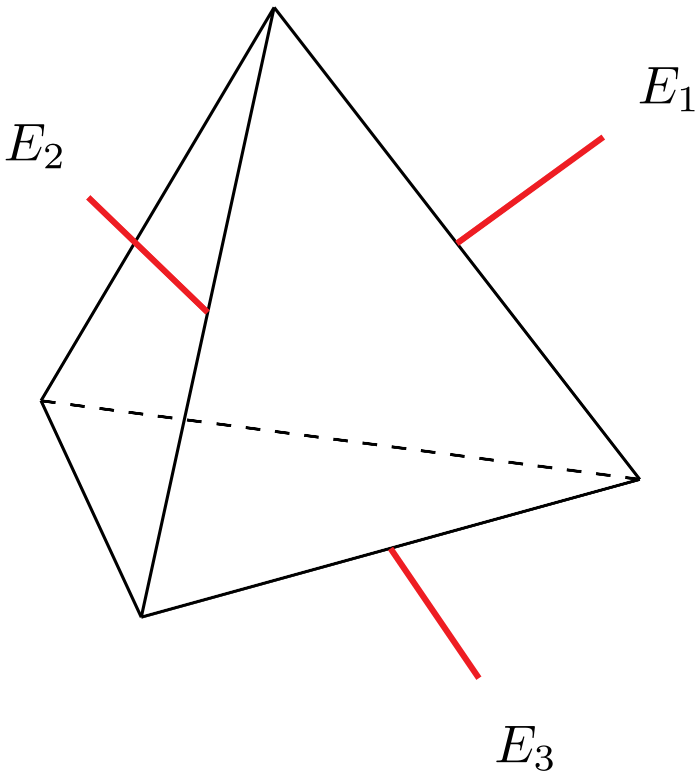
$V_1,\ {V_1}^2,\ V_2,\ {V_2}^2\ , V_3,\ {V_3}^2,\ V_4,\ {V_4}^2$

軸が辺の頂点を通る場合



$$E_1$$

軸が辺の頂点を通る場合



$$E_1,\ E_2,\ E_3$$

正 4 面体の対称変換の数

- 頂点と面の重心を通る軸による回転:　8 種

  V_1, ${V_1}^2$, V_2, ${V_2}^2$,V_3, ${V_3}^2$, V_4, ${V_4}^2$

- 辺の中点を通る軸による回転:　3 種

  E_1, E_2, E_3

正 4 面体の対称変換の数

- 頂点と面の重心を通る軸による回転:　8 種

  $V_1,\ {V_1}^2,\ V_2,\ {V_2}^2\ , V_3,\ {V_3}^2,\ V_4,\ {V_4}^2$

- 辺の中点を通る軸による回転:　3 種

  $E_1,\ E_2,\ E_3$

- 恒等変換 I をあわせて, $8 + 3 + 1 = 12$ 種

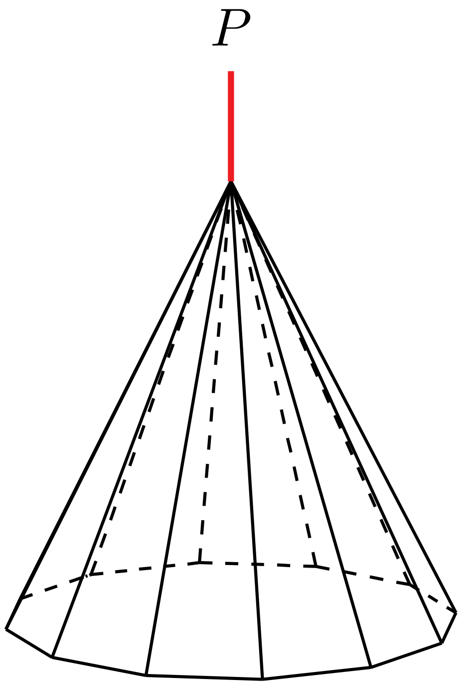
対称性をはかるには $\cdots$

- 正 4 面体の対称変換は 24 種
- 正 4 面体の対称変換は 12 種

対称性をはかるには $\cdots$

- 正 4 面体の対称変換は 24 種
- 正 4 面体の対称変換は 12 種
- 対称性を, 対称変換の個数だけで語れるか？
- たとえば, 正 12 角錐の対称変換も 12 種だが $\cdots$

軸が頂点を通る回転



$$P,\ P^2,\ P^3,\ \ldots, P^{12} = I$$

群の定義

集合 G が演算 $*$ について**群**であるとは：

1. G の元 $a,\ b$ に対し, $a*b$ という G の元が対応する
2. $(a*b)*c=a*(b*c)$　(**結合法則**)
3. すべての $a\in G$ に対し, $a*e=e*a=a$ を満たす e (**単位元**) が存在
4. すべての $a\in G$ に対し, $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ を満たす a^{-1}(**逆元**) が存在

群の例

1. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は $+$ に関して群になる.

群の例

1. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は $+$ に関して群になる.

    - 単位元は 0, n の逆元は $-n$

群の例

1. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は $+$ に関して群になる.
   - 単位元は 0, n の逆元は $-n$
2. 0 以外の実数の集合 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ は $\times$ に関して群になる.

群の例

1. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ は $+$ に関して群になる.
   - 単位元は 0, n の逆元は $-n$
2. 0 以外の実数の集合 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ は $\times$ に関して群になる.
   - 単位元は 1, a の逆元は $\frac{1}{a}$

正 6 面体群

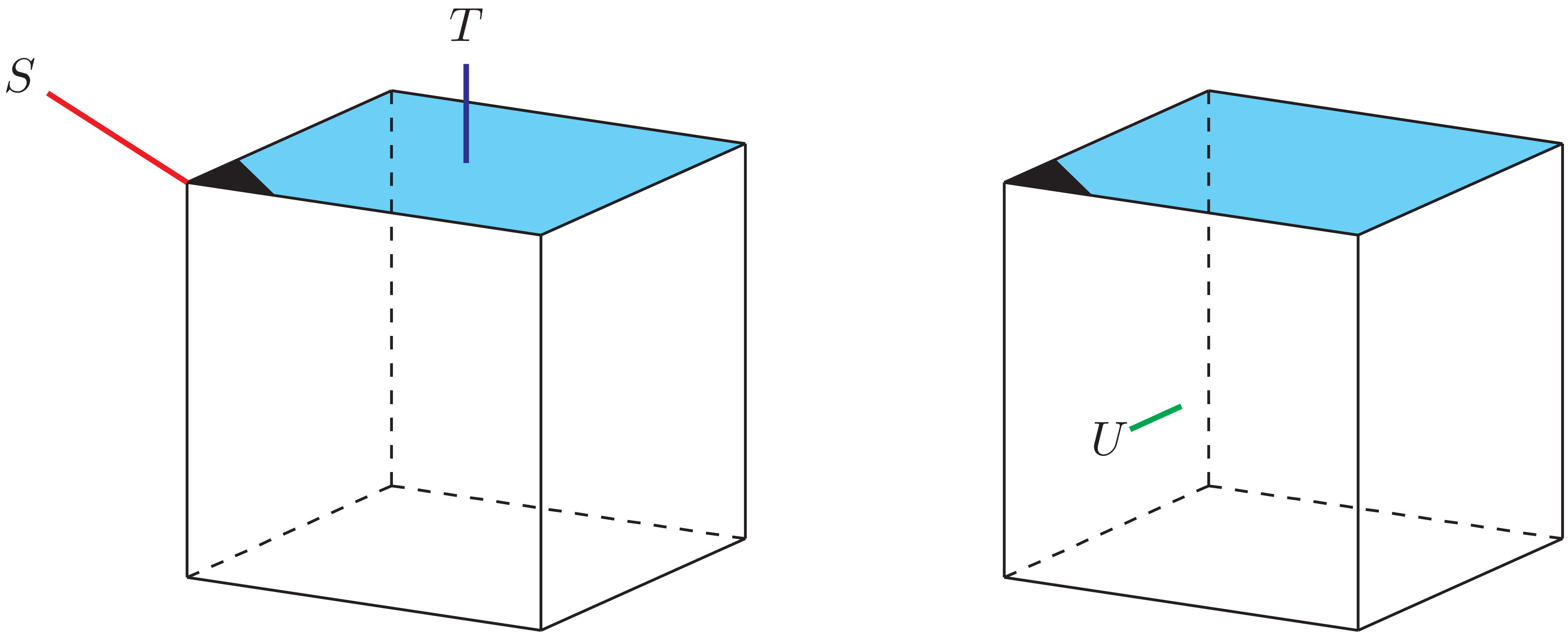
- 正 6 面体の 24 個の回転対称変換全体は群になる

正 6 面体群

- 正 6 面体の 24 個の回転対称変換全体は群になる
- 演算は回転の合成 $\Rightarrow$ **回転の合成は回転**

回転の合成

$$S\,T \quad = \quad U$$



正 6 面体群

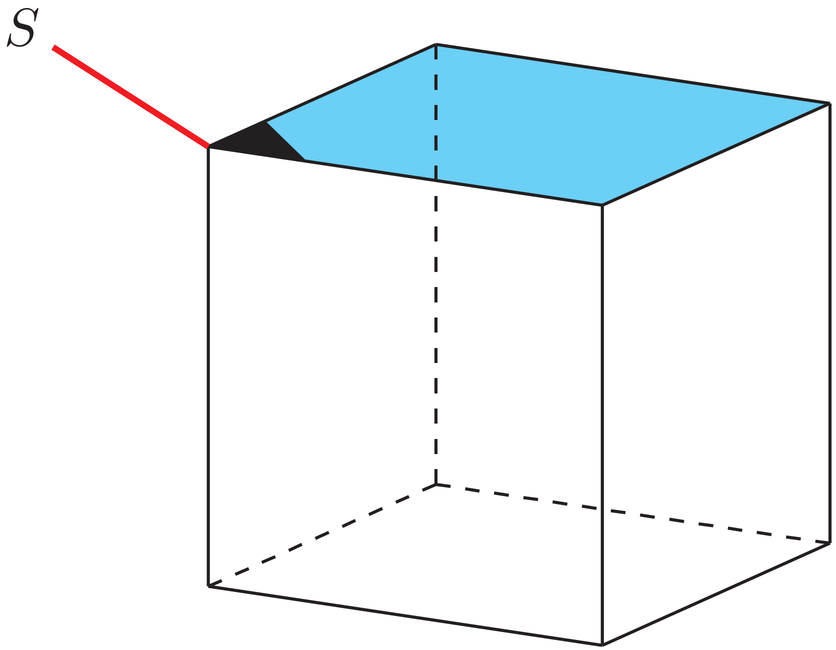
- 正 6 面体の 24 個の回転対称変換全体は群になる
- 演算は回転の合成 $\Rightarrow$ **回転の合成は回転**
- 単位元は**恒等変換** I

正 6 面体群

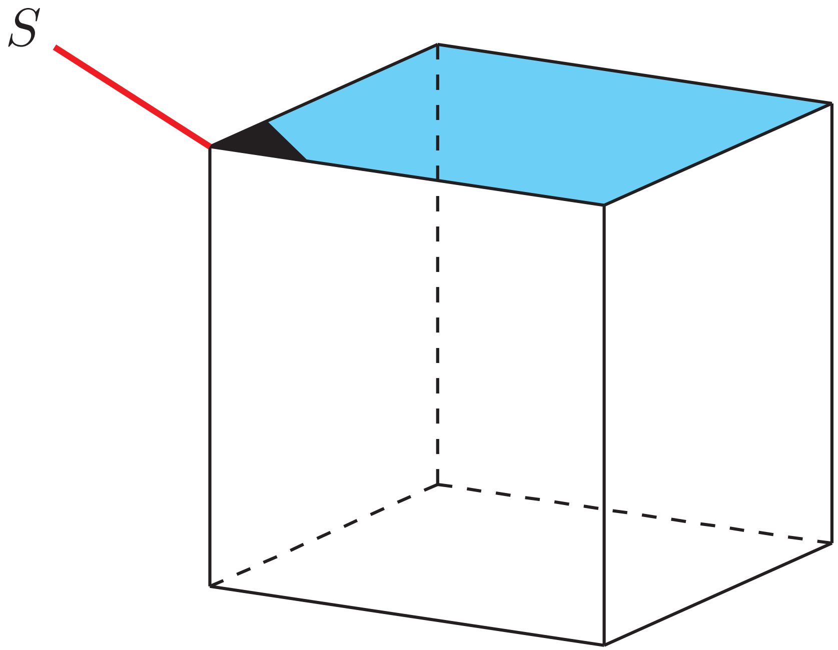
- 正 6 面体の 24 個の回転対称変換全体は群になる
- 演算は回転の合成 $\Rightarrow$ **回転の合成は回転**
- 単位元は**恒等変換** I
- 逆元は逆回転

逆元の存在

S



S^{-1}

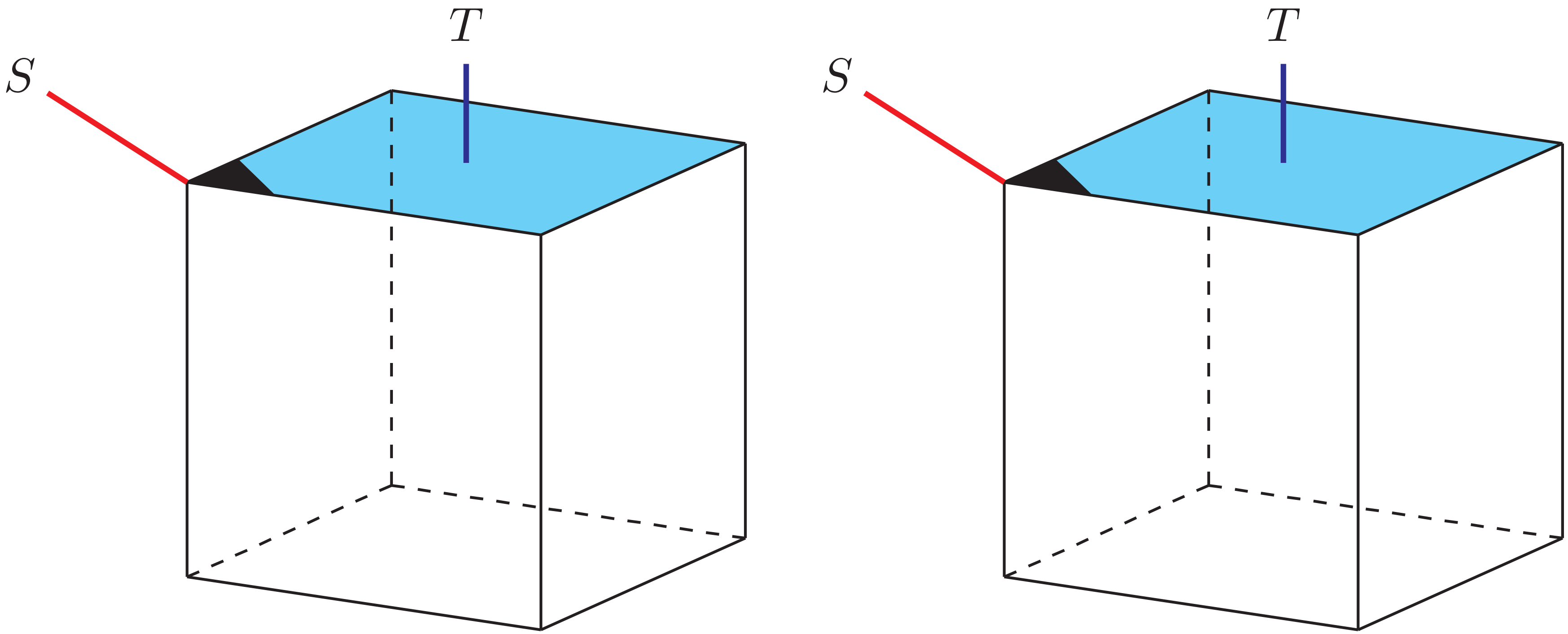


正 6 面体群

- 正 6 面体の 24 個の回転対称変換全体は群になる
- 演算は回転の合成 $\Rightarrow$ **回転の合成は回転**
- 単位元は**恒等変換** I
- 逆元は逆回転
- 一般に $ST \neq TS$. すなわち**非可換群**になる.

回転の非可換性

$$S\,T \neq T\,S$$



正 6 面体群

- 正 6 面体の 24 個の回転対称変換全体は群になる
- 演算は回転の合成 $\Rightarrow$ **回転の合成は回転**
- 単位元は**恒等変換** I
- 逆元は逆回転
- 一般に $ST \neq TS$. すなわち**非可換群**になる.
- この群を**正 6 面体群**とよび, $P(6)$ で表す.

対称群

- $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ のならびかえを**置換**という.

例: $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (n=5)$$

対称群

- $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ のならびかえを**置換**という.

  例: $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (n=5)$$

- n 次の置換は $n!$ 個あり, 合成に関して群になる.

対称群

- $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ のならびかえを**置換**という.

  例:　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (n=5)$

- n 次の置換は $n!$ 個あり, 合成に関して群になる.

- これを S_n で表し, **n 次対称群**とよぶ.

S_4 と生成元

- S_4 のすべての元は,

  $(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $(2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

  $(3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

  の合成によって表すことができる.

  (あみだくじの原理)

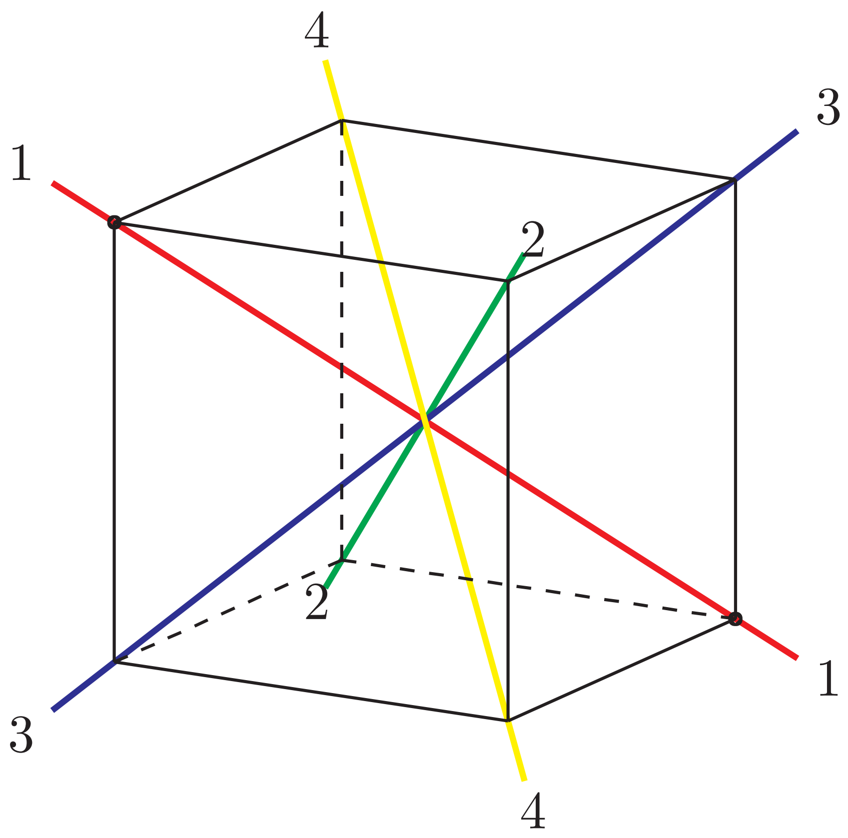
対称群と正 6 面体群

- S_4 の元の数は $4! = 24$. $P(6)$ の元の数も 24.

対称群と正 6 面体群

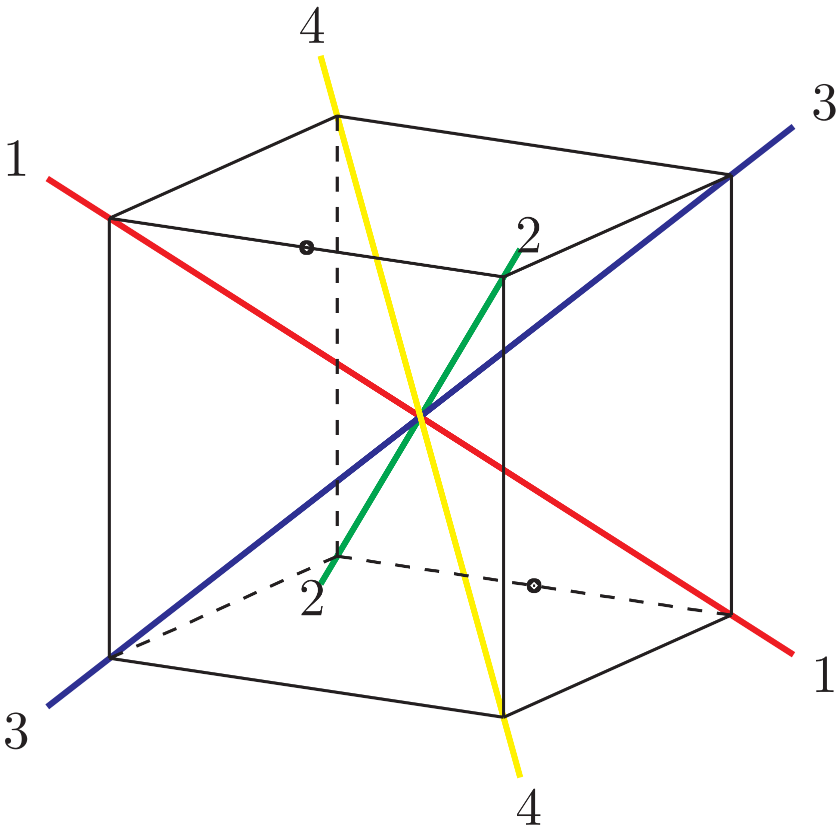
- S_4 の元の数は $4! = 24$. $P(6)$ の元の数も 24.
- 両者は集合として 1 対 1 対応するだけでなく, 演算も対応することが分かる.

回転変換は S_4 の元に対応



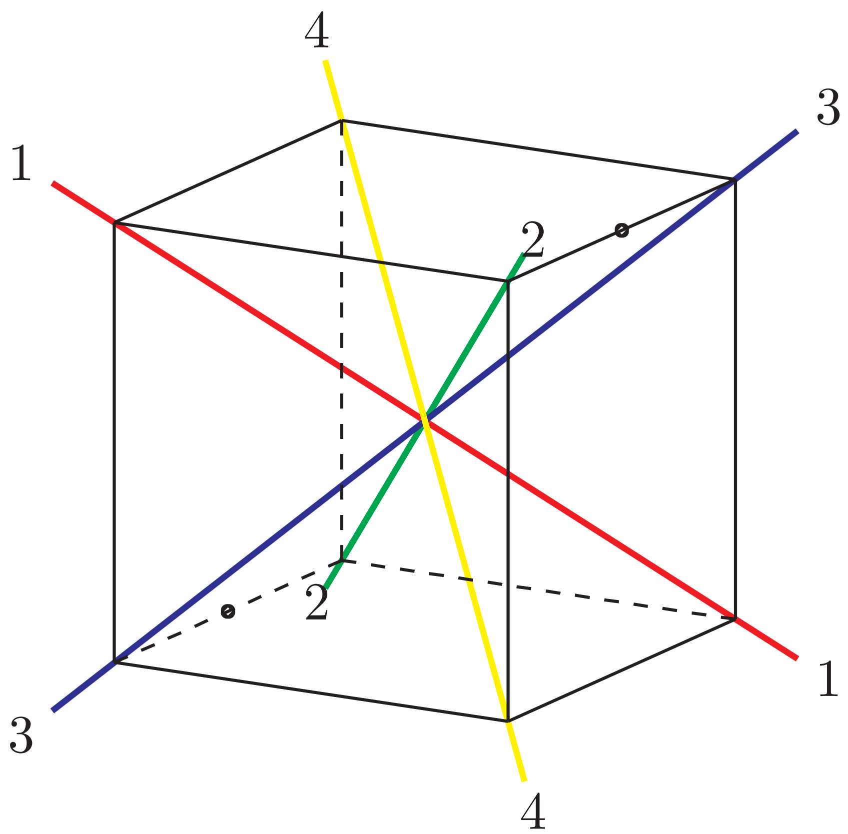
$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$(1\ 2)$ に対応する回転



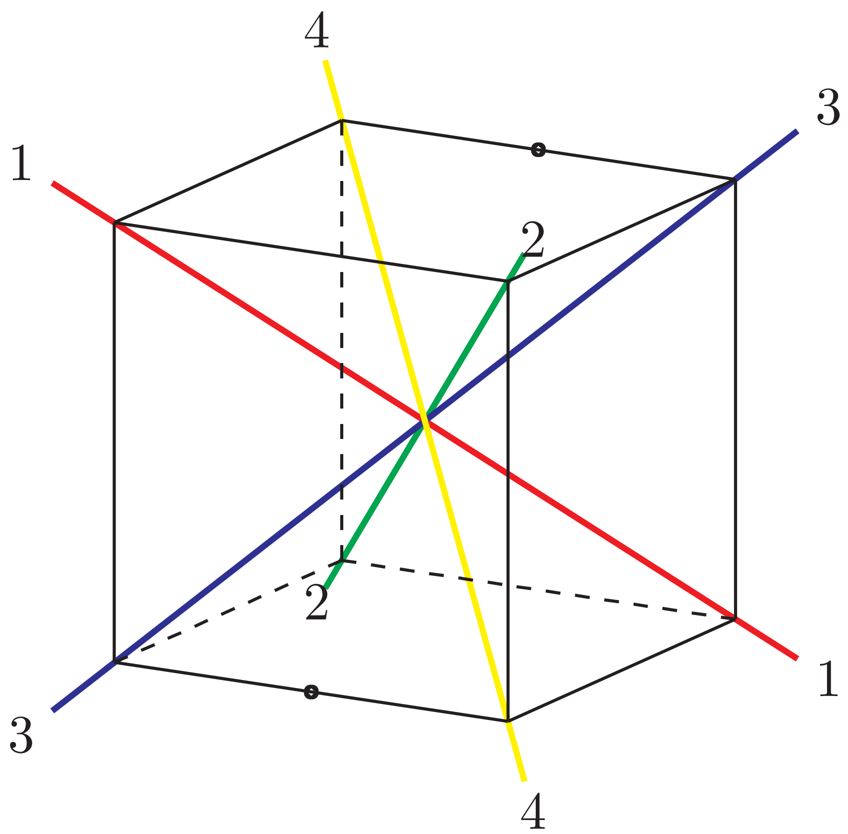
$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \downarrow & & \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$(2\ 3)$ に対応する回転



$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & \downarrow & \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}$$

$(3\ 4)$ に対応する回転



$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & \downarrow & \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}$$

対称群と正 6 面体群

- S_4 の元の数は $4! = 24$. $P(6)$ の元の数も 24.
- 両者は集合として 1 対 1 対応するだけでなく, 演算も対応することが分かる.
- これを, S_4 と $P(6)$ は**同型**であるといい, $S_4 \cong P(6)$ で表す.

対称群と交代群

- S_n の元を $(1\ 2),\ (2,\ 3),\ \ldots,\ (n-1\ n)$ で表すとき, 偶数個で表されるものを**偶置換**, 奇数個で表されるものを**奇置換**とよぶ.

対称群と交代群

- S_n の元を $(1\ 2),\ (2,\ 3),\ \ldots,\ (n-1\ n)$ で表すとき, 偶数個で表されるものを**偶置換**, 奇数個で表されるものを**奇置換**とよぶ.

- 偶置換どうしを合成するとやはり偶置換になる.
$\Rightarrow$ すべての偶置換の集合は群になる.

対称群と交代群

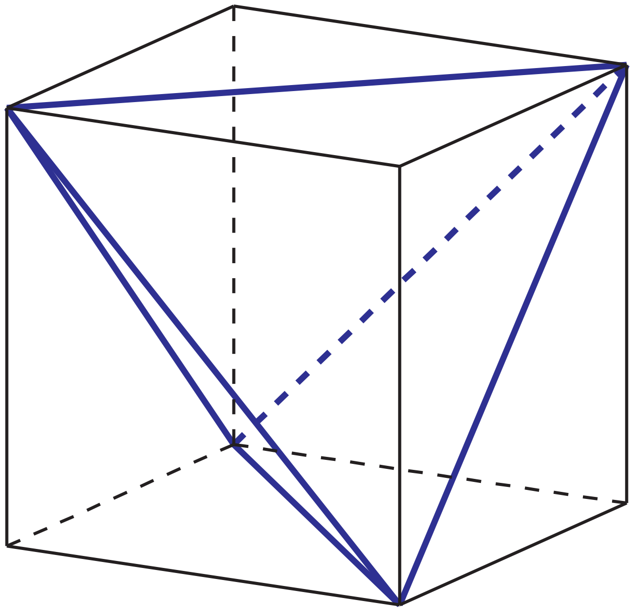
- S_n の元を $(1\ 2),\ (2,\ 3),\ \ldots,\ (n-1\ n)$ で表すとき, 偶数個で表されるものを**偶置換**, 奇数個で表されるものを**奇置換**とよぶ.
- 偶置換どうしを合成するとやはり偶置換になる.
  $\Rightarrow$ すべての偶置換の集合は群になる.
- n 次偶置換の集合を A_n で表し, **n 次交代群**とよぶ.
- 部分集合で群になるものを**部分群**という.

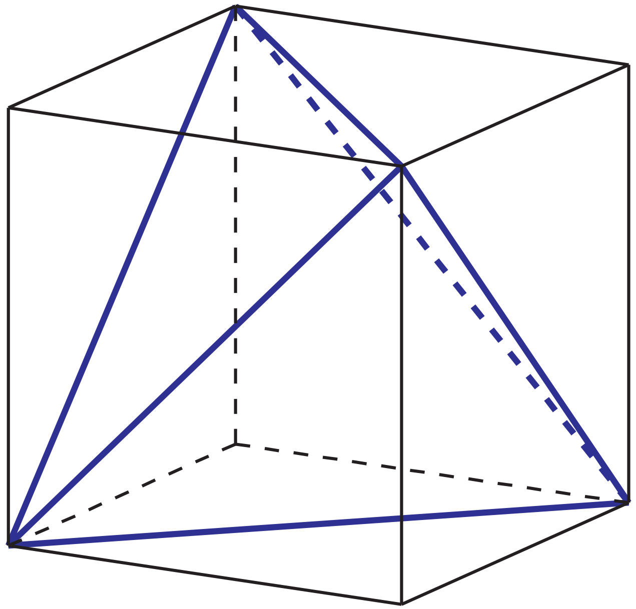
正 4 面体群と 4 次交代群

- 正 4 面体は正 6 面体にぴったり入る.

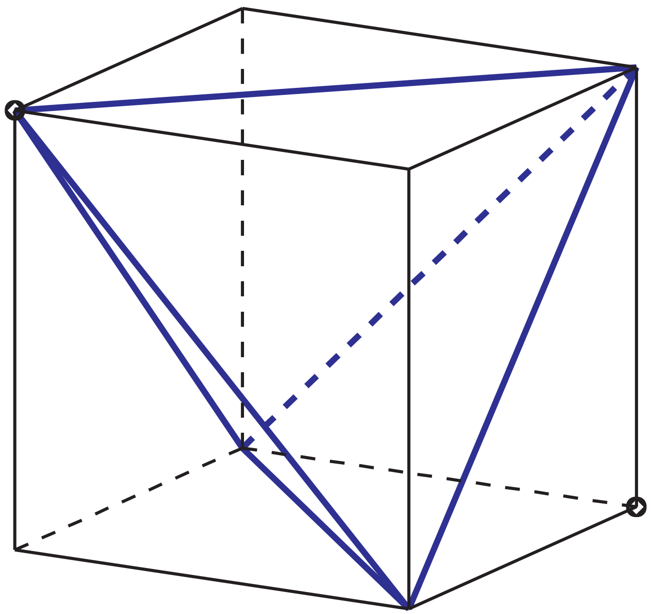
  $\Rightarrow$ **正 4 面体群** $P(4)$ **は** $P(6)$ **の部分群**

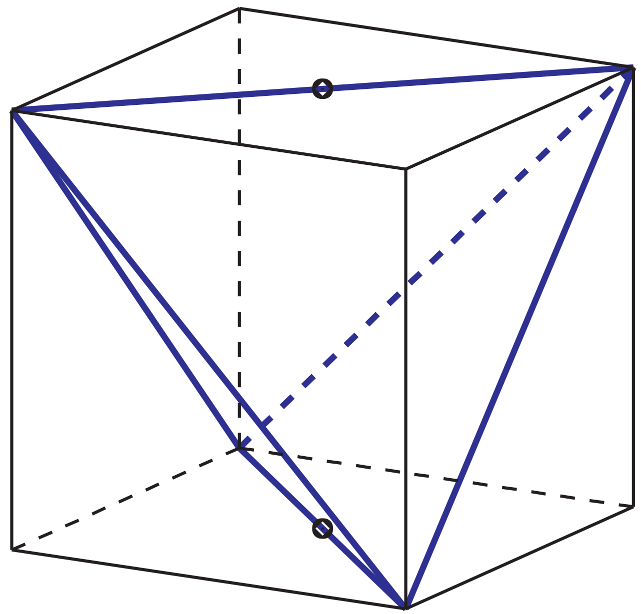
正六面体の中の正四面体





正六面体の回転と正四面体



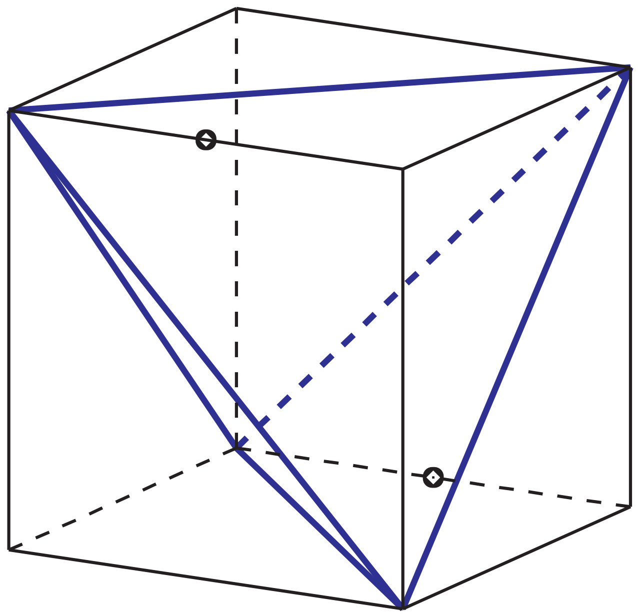


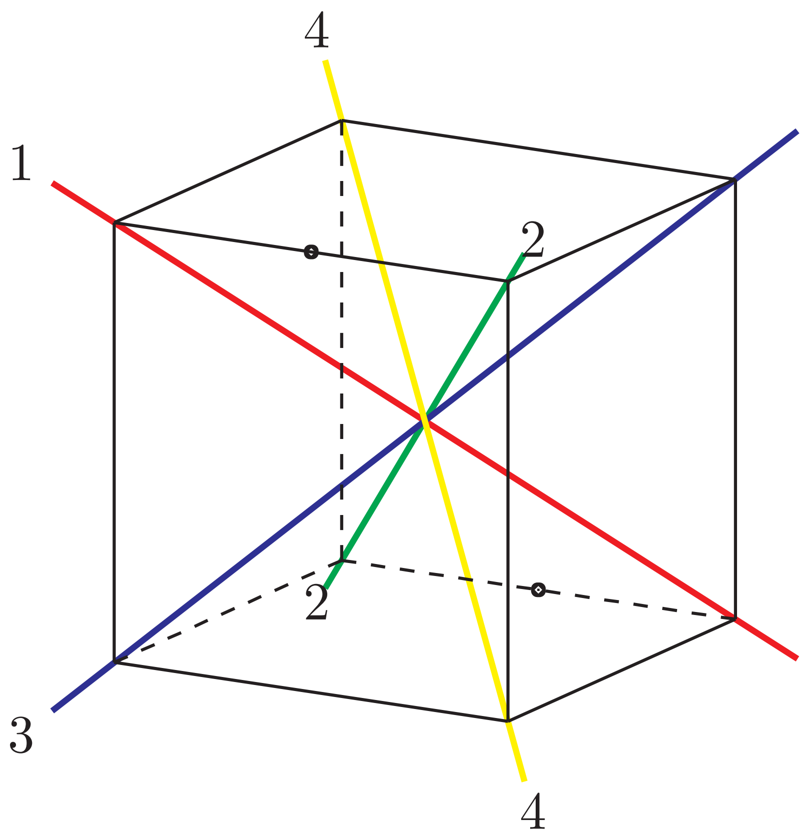
正 4 面体群と 4 次交代群

- 正 4 面体は正 6 面体にぴったり入る.
  $\Rightarrow$ **正 4 面体群 $P(4)$ は $P(6)$ の部分群**

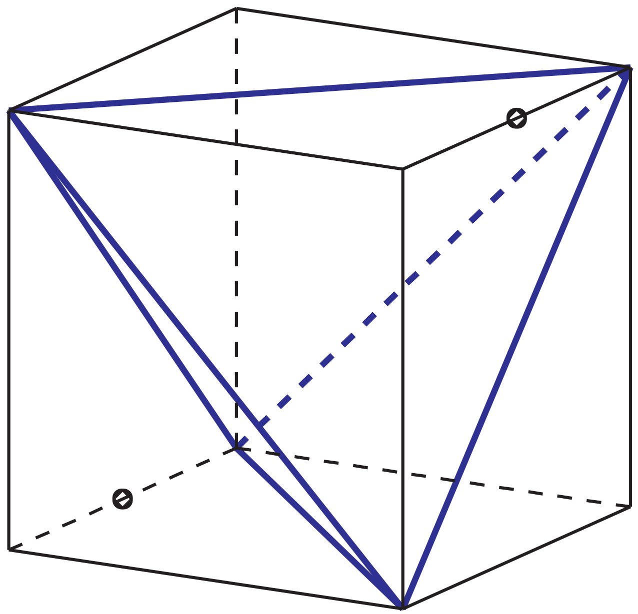
- $P(6)$ の元で, $P(4)$ の元になるものは S_4 の偶置換に対応.

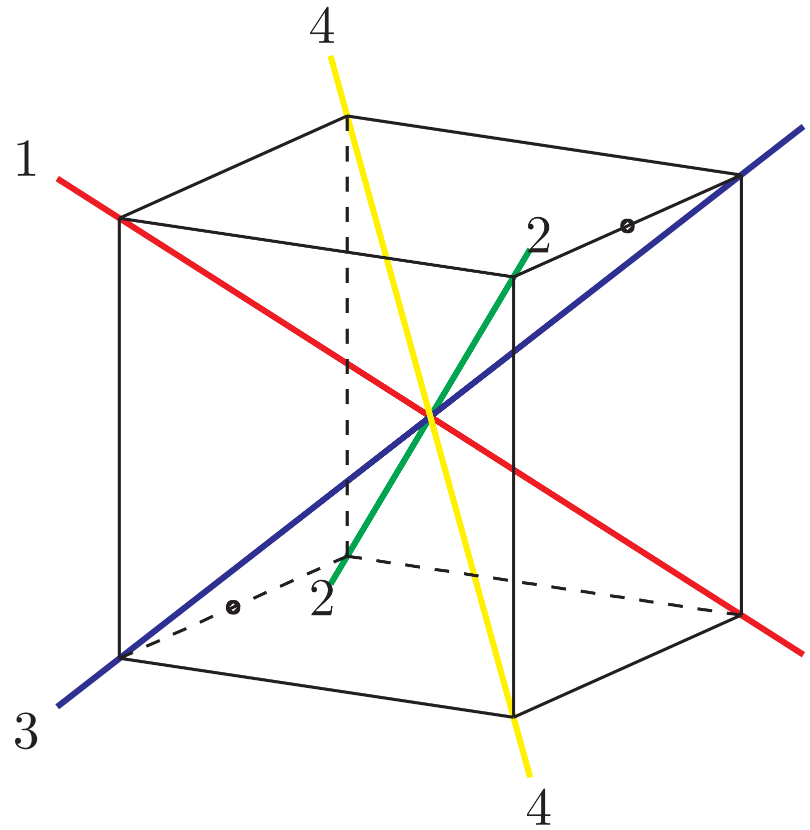
$(1\ 2)$ による回転と正四面体



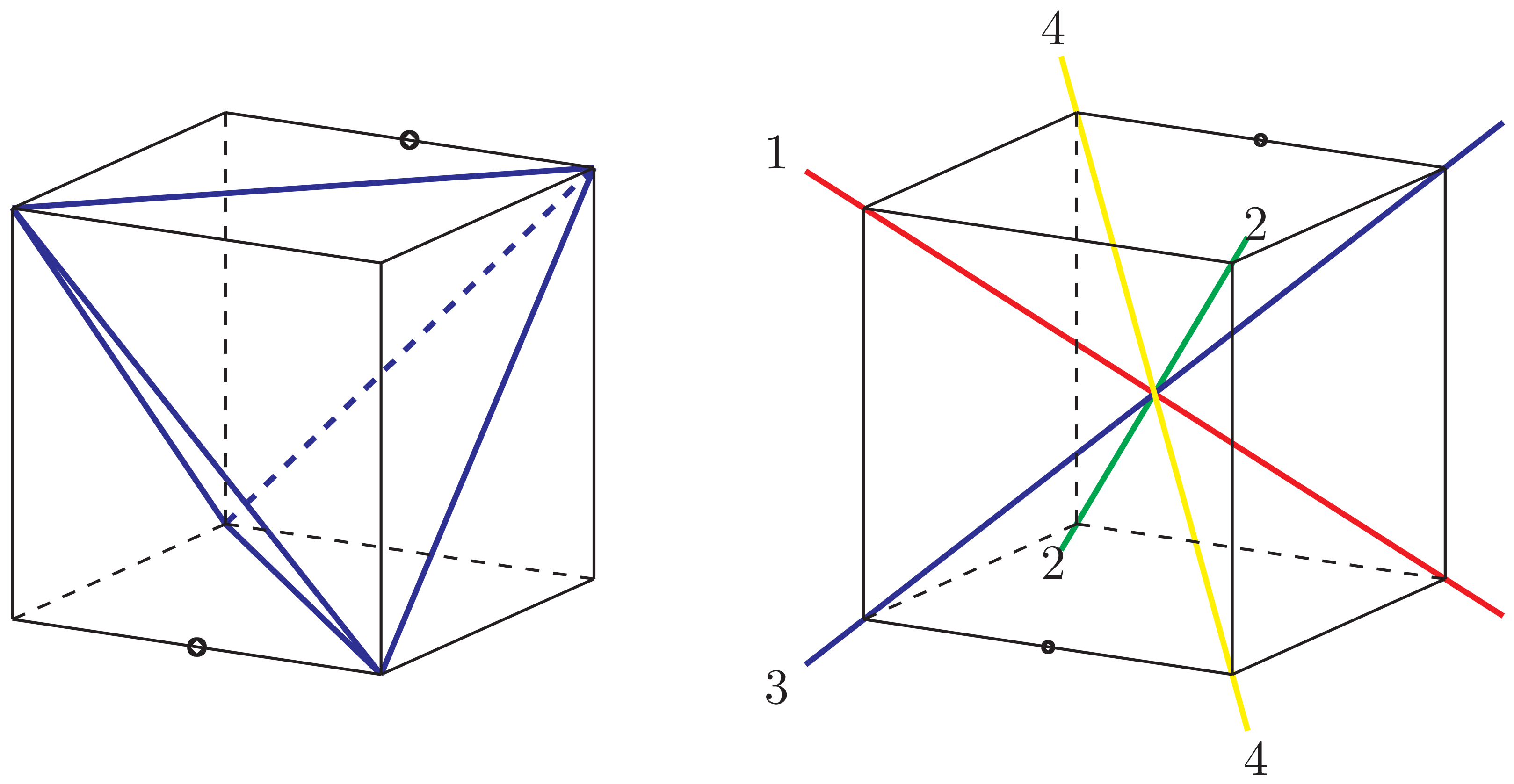


$(2\ 3)$ による回転と正四面体





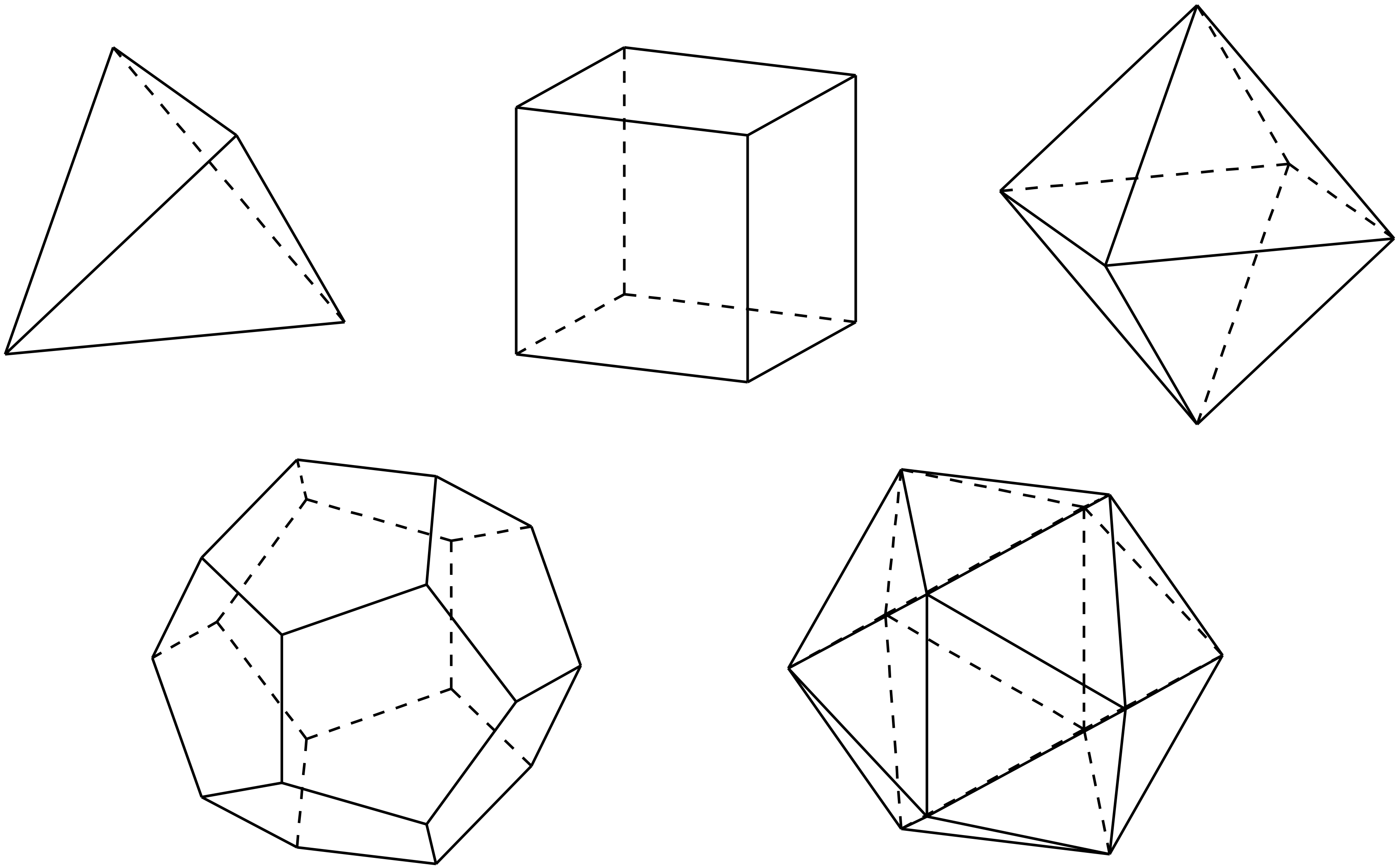
$(3\ 4)$ による回転と正四面体



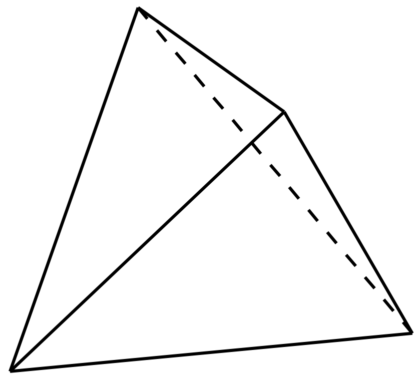
正 4 面体群と 4 次交代群

- 正 4 面体は正 6 面体にぴったり入る.
  $\Rightarrow$ **正 4 面体群 $P(4)$ は $P(6)$ の部分群**
- $P(6)$ の元で, $P(4)$ の元になるものは S_4 の偶置換に対応.
- 以上より, $P(4) \cong A_4$ が分かった.

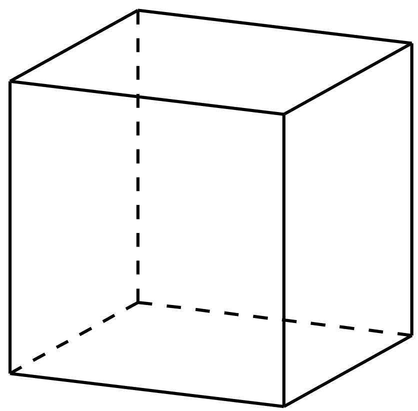
5つの正多面体



正 4 面体群と正 6 面体群

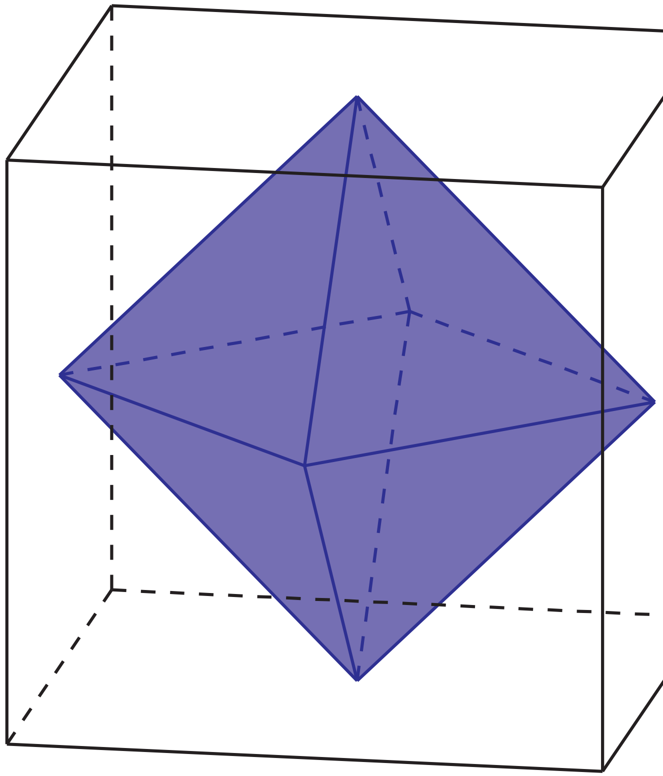


正 4 面体群 $P(4) \cong A_4$



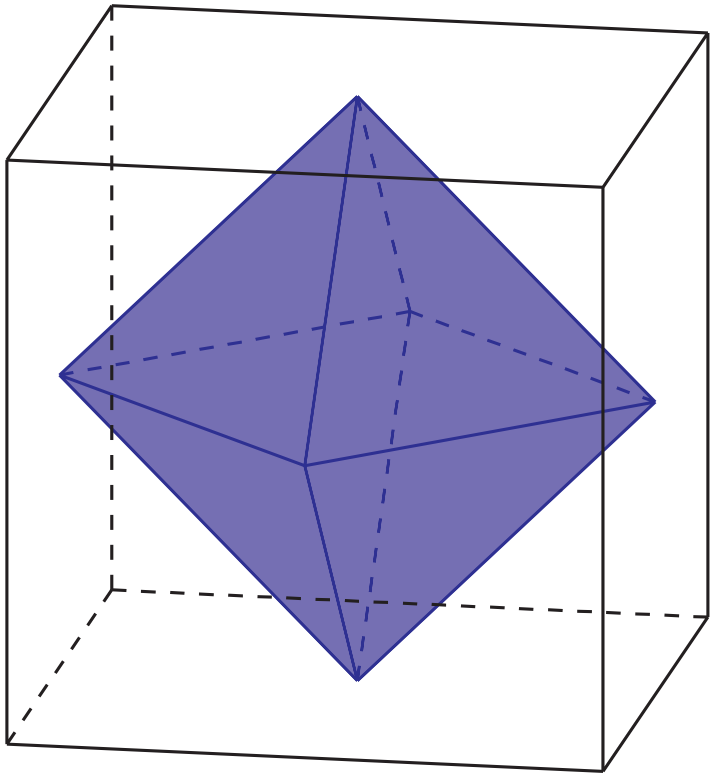
正 6 面体群 $P(6) \cong S_4$

正８面体群



正６面体の回転対称性と一致

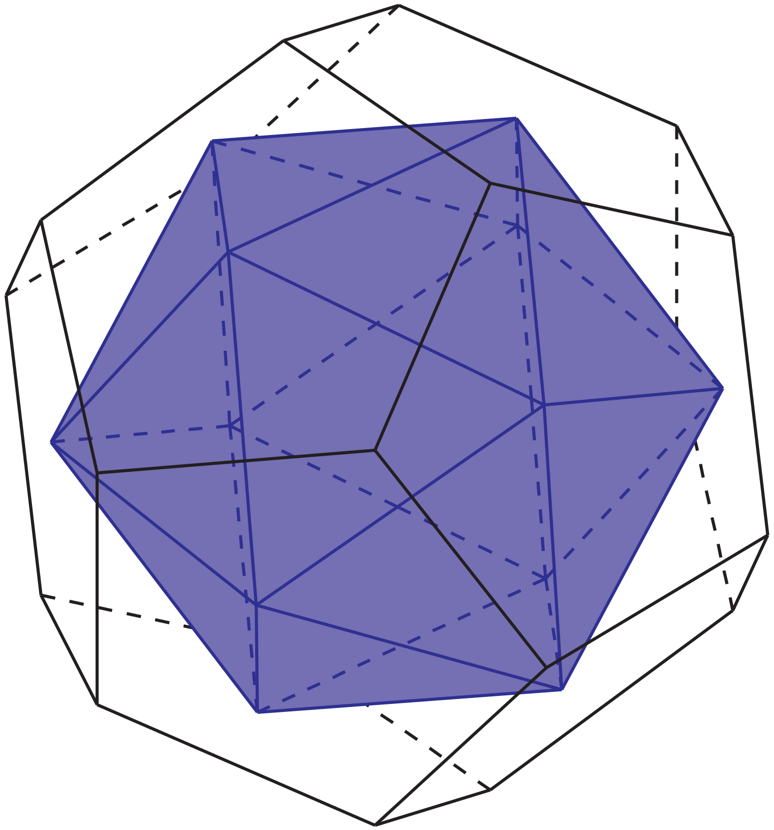
正 8 面体群



正 6 面体の回転対称性と一致

$\Rightarrow \; P(8) \cong P(6) \cong S_4$

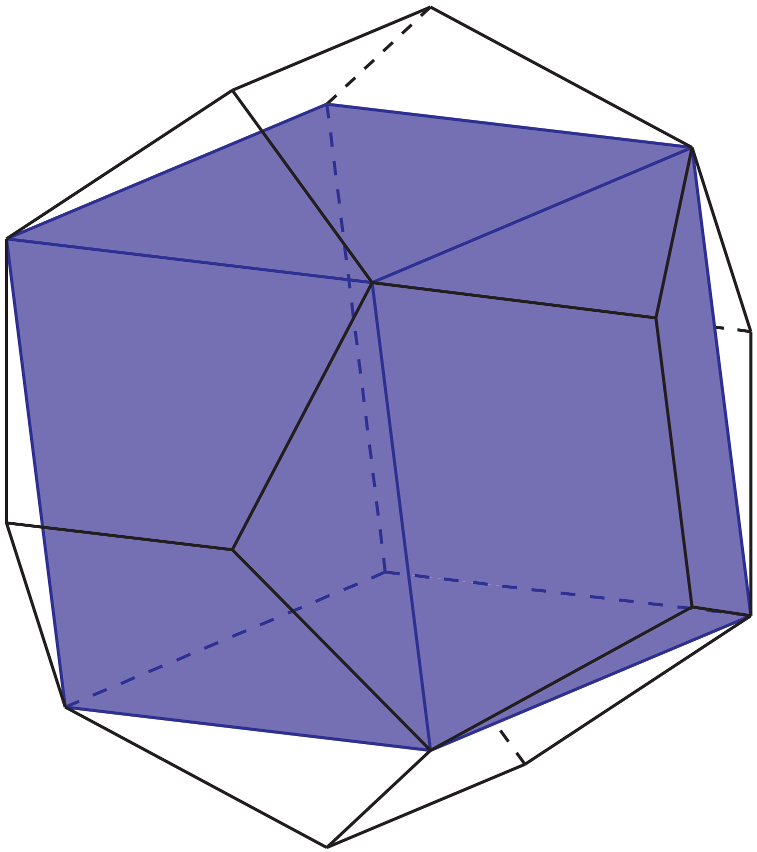
正 12 面体群と正 20 面体群



正 12 面体と正 20 面体は
回転対称性が一致

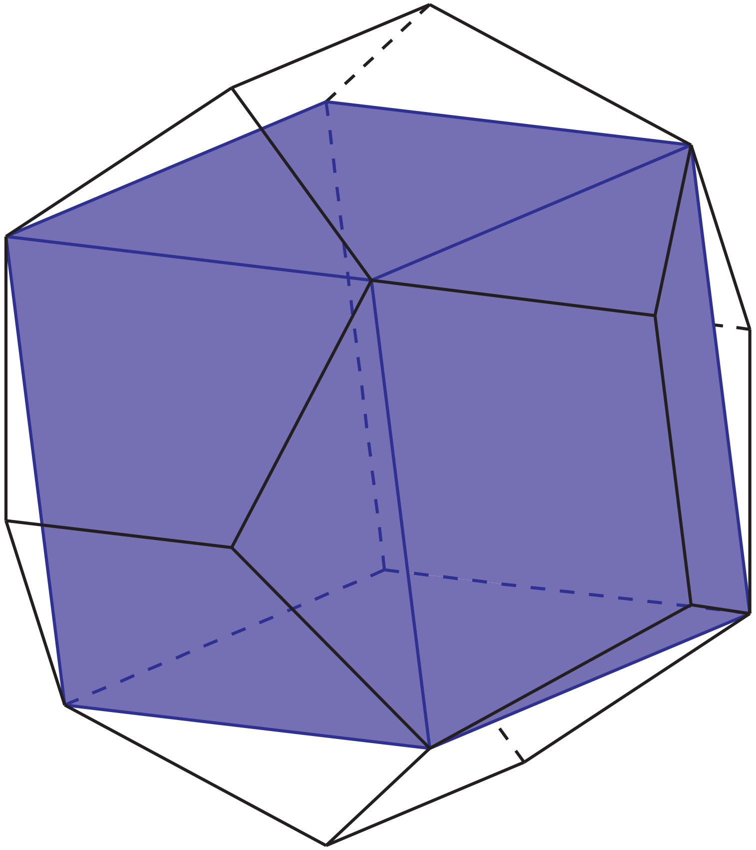
$\Rightarrow \; P(12) \cong P(20)$

正 12 面体群



実は, $P(12) \cong A_5$ になる.

正 12 面体群



実は, $P(12) \cong A_5$ になる.

正 12 面体の中に 5 通りの立方体

この A_5 による入れ替えに一致

生成元とケイリー・グラフ

- 群のいくつかの元を合成すれば他のすべての元を表すことができるとき, それらの元を**生成元**という.

- 群の元を頂点とし, 生成元を合成して得られる頂点どうしを辺で結んでできたグラフを**ケイリー・グラフ**とよぶ.