大学数学への架け橋 (基礎編)

東邦大学理学部教養科
野田健夫・安冨真一・山方竜二

緒言と利用方法

この教材は高校数学の基礎部分の確認を目指したものです．高校までに学ぶ数学の中から，大学で学ぶ高度な数学（微分積分，線形代数，確率と統計）を理解するために必要となる基礎知識を厳選してコンパクトにまとめました．この教材がこれから学ぶ様々な学問の理解への架け橋となり，大学での学習が刺激に満ち充実した体験になることを願っています.

学習内容は『東邦大学 e ラーニングサイト』(`https://toho-math.com/`) と連動して構成されており，次の 3 ステップから成り立っています：

(1) 本文の解説と例題を通じて基礎事項の復習

(2) e ラーニングサイトの小テストで反復練習

(3) 章末の確認問題を解いて修了

(1), (2) は必要に応じて利用しましょう．(3) は必ず取り組み，章ごとに解き終わったら e ラーニングサイトで解答を入力してください．十分な点が取れていればその章は合格です．理解が定着するまでよく考えて何度でも取り組みましょう．

この教材は東海地区高専数学担当教員協議会 鈴鹿工業高等専門学校数学教室編の基礎数学問題集を元にして作成しました．鈴鹿高専の堀江先生をはじめ協議会の方々に感謝いたします．この教材に関する責任は東邦大学の数学教室が負います.

東邦大学 e ラーニングサイト QR コード

ユーザ名　：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

パスワード：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

目次

1）数と式

展開と因数分解の公式

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \quad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
- $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3, \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$
- $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

例題 [1] 式の展開

次の各式を展開せよ．
(1)　$(3a-2b)^3$
(2)　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

解答例：(1)　$(3a-2b)^3 = (3a)^3-3(3a)^2(2b)+3(3a)(2b)^2-(2b)^3 = 27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$.
(2)　$(2a-b)\{(2a)^2+(2a)b+b^2\} = (2a)^3-b^3 = 8a^3-b^3$.

例題 [2] 因数分解

次の各式を因数分解せよ．
(1)　$8a^3+27b^3$
(2)　$3a^2+4ab-4b^2$

解答例：(1) 公式を用いて $8a^3+27b^3 = (2a)^3+(3b)^3 = (2a+3b)\{(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2\} = (2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.

(2) たすきがけを用いると, $3a^2+4ab-4b^2 = (3a-2b)(a+2b)$.

$$\begin{array}{ccrcr} 3 & & -2 & \longrightarrow & -2 \\ 1 & \times & 2 & \longrightarrow & 6 \\ \hline 3 & & -4 & & 4 \end{array}$$

整式の除法

多項式 A を多項式 B で割った商を Q，余りを R とすると

$$A = BQ+R \qquad (R \text{ の次数}) < (B \text{ の次数})$$

または $R=0$ と，一通りに表すことができる．これを整式 (多項式) の除法とよぶ．

例題 [3] 整式の除法

(1)　割り算 $(6x^3-x^2+4x-1)\div(3x^2+x-2)$ を計算し，商と余りを求めよ．
(2)　$2x^4+3x^2-4x+1$ をある整式 B で割ると商が x^2+x+1 で余りが $-5x-2$ であった．整式 B を求めよ．

解答例：(1) 筆算を行い, 商 $2x-1$, 余り $9x-3$ が得られる.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x & -1 & \\
\cline{2-5}
3x^2+x-2 \,\big)\, & 6x^3 & -x^2 & +4x & -1 \\
 & 6x^3 & +2x^2 & -4x & \\
\cline{2-5}
 & & -3x^2 & +8x & -1 \\
 & & -3x^2 & -x & +2 \\
\cline{3-5}
 & & & 9x & -3
\end{array}
$$

(2) 割り算の意味より $2x^4+3x^2-4x+1=B(x^2+x+1)+(-5x-2)$ が成り立つ．余りを移項して $2x^4+3x^2+x+3=B(x^2+x+1)$ である．割り算を行って $B=2x^2-2x+3$ を得る．

例題 [4] 分数式の計算

次の分数式を簡単にせよ.

(1) $\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{a^2+1}$　　(2) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$

解答例：(1) $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2+1}=\frac{(a+1)-(a-1)}{(a+1)(a-1)}+\frac{2}{a^2+1}=\frac{2}{a^2-1}+\frac{2}{a^2+1}=\frac{2(a^2+1)+2(a^2-1)}{(a^2+1)(a^2-1)}=\frac{4a^2}{a^4-1}$

(2) 分母と分子に同じ数式を掛けても値は変化しないので $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1\times x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x}=\dfrac{x}{x+1}$ である．

同様に，$1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=1+\dfrac{1}{1+\frac{x}{x+1}}=1+\dfrac{x+1}{x+1+x}=1+\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{3x+2}{2x+1}$

例題 [5] 根号を含む式の計算

$x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ のとき x^2+y^2 の値を求めよ.

解答例：$x+y=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{1-3}=-4$,

$xy=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=1$ であるから $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16-2=14$.

複素数

$x^2=-1$ の解は形式的に解くと $\pm\sqrt{-1}$ となるが実数には存在しない．そこで， この 2 乗して -1 になるものも ‘新しい数’ とみなすことで， 数の概念を実数から拡張できる．i を “2 乗すると -1 になる数” と定め， この i を**虚数単位**という.

実数 a, b に対して， $a+bi$ の形の数を**複素数**という．a を $a+bi$ の**実部**, b を $a+bi$ の**虚部**という．$b=0$ のとき通常扱う実数に一致し， $b\neq 0$ のとき**虚数**と呼ぶ．特に， $a=0$ かつ $b\neq 0$ のとき**純虚数**という．次は複素数の例である.

$$2+\sqrt{-1}=2+i,\quad \frac{1-\sqrt{-2}}{2}=\frac{1-\sqrt{2}i}{2},\quad \frac{3+\sqrt{-4}}{6}=\frac{3+2i}{6}.$$

複素数に四則演算を行うと複素数になる. 例えば

$$
\begin{aligned}
&(2+i)+(5-7i)=(2+5)+(1-7)i=7-6i\\
&(-2+\sqrt{3}i)\times(-2-\sqrt{3}i)=(-2)^2-(\sqrt{3}i)^2=4-3(-1)=7\\
&\frac{3-i}{1+i}=\frac{3-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{2-4i}{2}=1-2i
\end{aligned}
$$

例題 [6]

次の複素数を計算せよ． ただし， $a+bi$ $(a,b$ は実数$)$ の形で答えること．

(1) $(2+i)(1-i)$ (2) $\dfrac{3-i}{2+3i}$ (3) $(i-2)^3$ (4) $\dfrac{3+2i}{(1-i)^2}$

ポイント： $\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$ より，複素数の逆数は複素数．

解答例：(1) $2-i-i^2=3-i$. (2) $\dfrac{(3-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{11}{13}i$. (3) $-2+11i$.

(4) $\dfrac{3+2i}{-2i}=\dfrac{-2+3i}{2}=-1+\dfrac{3}{2}i$.

絶対値と根号

実数の絶対値は中身の数の正負で場合分けしてはずす：$|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

$a \geqq 0$ のとき $\sqrt{a^2}=a$, $a<0$ のとき $\sqrt{a^2}=-a$ である．すなわち，$\sqrt{a^2}=|a|$

また**複素数** $a+bi$ の絶対値 $|a+bi|$ は次のように定義される．

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

例えば

$$|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5,\quad \left|\frac{1+\sqrt{2}i}{5}\right|=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

例題 [7] 絶対値を含む式の計算

(1) $|1-\sqrt{3}|$ の絶対値をはずせ． (2) $|x-1|$ の絶対値をはずせ．

(3) $\sqrt{4a^2-4a+1}$ の根号をはずせ． (4) 方程式 $|2x-5|=3$ を解け．

(5) $\left|\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right|$ を求めよ．

解答例：(1) $\sqrt{3}=1.732\cdots$ なので $1-\sqrt{3}<0$ ゆえに $|1-\sqrt{3}|=-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$

(2) $x \geqq 1$ のとき $|x-1|=x-1$, $x<1$ のとき $|x-1|=-x+1$

(3) $\sqrt{4a^2-4a+1}=\sqrt{(2a-1)^2}=|2a-1|$ である．$2a-1$ の正負によって場合分けして，

$a \geqq \frac{1}{2}$ のとき（与式）$=2a-1$, $a<\frac{1}{2}$ のとき（与式）$=-(2a-1)=1-2a$.

(4) $|2x-5|=3$ は $2x-5=\pm 3$ と同じである．よって $2x=8$ または 2， つまり $x=4,\ 1$.

(5) $\left|\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

部分分数分解

$\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}$ のように，分母の次数がより小さい式を使って表すことを部分分数分解（部分分数展開）という．

例題 [8] 部分分数分解

$\dfrac{5x-2}{2x^2-x-1}$ を部分分数に分解せよ

解答例：$\dfrac{5x-2}{2x^2-x-1}=\dfrac{5x-2}{(2x+1)(x-1)}=\dfrac{a}{2x+1}+\dfrac{b}{x-1}$ が x についての恒等式になるように定数 a, b の値を定める．分母を払うと $5x-2=a(x-1)+b(2x+1)=(a+2b)x+(-a+b)$ となるので係数を比較して $a+2b=5,\ -a+b=-2$ が成り立てばよく， よって $a=3,\ b=1$ で部分分数分解の答えは $\dfrac{5x-2}{2x^2-x-1}=\dfrac{3}{2x+1}+\dfrac{1}{x-1}$.

剰余の定理

整式 $f(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $f(\alpha)$ となる．

因数定理

整式 $f(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる $\Leftrightarrow$ $f(\alpha)=0$.

例題 [9] 剰余の定理， 因数定理

(1) 整式 $f(x)=x^3+3x^2-4x+2$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ．また $f(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りを求めよ．
(2) 整式 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ を $x-3$ で割ると割り切れ， $x+1$ で割ると余りが -8 であった． a, b の値を求めよ．

解答例：剰余の定理より $x-1$ で割ったときの余りは $f(1)=1^3+3\cdot1^2-4\cdot1+2=2$, $x+2$ で割ったときの余りは $f(-2)=(-2)^3+3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)+2=14$.
(2) 題意より $f(3)=27+18+3a+b=0$, $f(-1)=-1+2-a+b=-8$ が成り立つ． a, b についてのこの連立方程式を解けば $a=-9,\ b=-18$ が得られる．

例題 [10] 高次式の因数分解， 高次方程式

整式 $f(x)=6x^3-7x^2+1$ を因数分解せよ．

解答例：(1) $f(1)=0$ であることから $f(x)$ は $x-1$ で割り切れ，実際に筆算または組み立て除法で割り算を行えば，商が $6x^2-x-1=(2x-1)(3x+1)$ となる．よって $f(x)=(x-1)(2x-1)(3x+1)$.

確認問題 1

1 $1-\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{\boxed{}}{3}$

2 $(p-2q+3r)^2 = p^2+4q^2+9r^2-\boxed{}pq-12qr+6rp$

3 $a^4-a^2-12=(a-2)(a+2)(a^2+\boxed{}a+3)$

4 $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\boxed{}-\sqrt{3}}{2}$

5 $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{6}{(x-2)^2}=\dfrac{\boxed{}x}{(x+1)(x-2)^2}$

6 方程式 $|\,7-x\,|=2$ の解は $x=5,\ \boxed{}$

7 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=\boxed{}$

8 次の等式が x についての恒等式になるような定数 a の値は$\boxed{}$である.

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{a}{x-2}$$

9 整式 x^3+2x^2+3x+4 を $x+1$ で割ったときの余りは$\boxed{}$である.

10 $10x^3-13x^2-15x+18$ を実数が係数となる範囲で因数分解すると $(x-1)(2x-\boxed{})(5x+6)$

1		**2**		**3**		**4**		**5**	
6		**7**		**8**		**9**		**10**	

2）2 次の関数・方程式

関数

2 つの変数 x, y に対して，x の値を与えるとこれに対応する y の値がただ 1 つに定まるとき，この x から y を定める規則のことを**関数**という (y は x の関数と呼ばれる)． x は**独立変数**，y は**従属変数**と呼ばれる．

独立変数 x，従属変数 y の関数を $y = f(x)$ と表すことがある．この関数の x に a を代入した値を $f(a)$ で表す．独立変数 x の範囲を**定義域**，従属変数 y の範囲を**値域**という．

特に断らないかぎり，定義域は関数 $f(x)$ が意味を持つできるだけ広い範囲とする．

変数 x の 1 次式で表される関数: $y = ax + b \quad (a, b$ は定数$, a \neq 0)$ を **1 次関数**といい，変数 x の 2 次式で表される関数: $y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c$ は定数$, a \neq 0)$ を **2 次関数**という．

例題 [1]

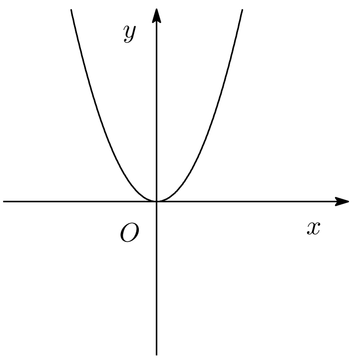
2 次関数 $f(x) = 2x^2 - x + 3$ について，次の値を求めよ．
(1) $f(-1)$ の値を求めよ．
(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ．

解答例：(1) $f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) + 3 = 6.$ (2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 3 = 3.$

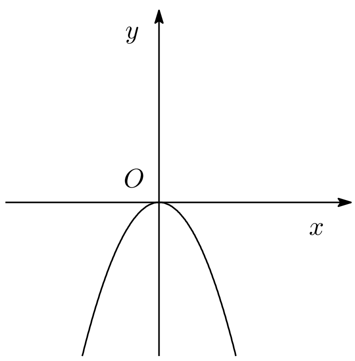
2 次関数のグラフ

2 次関数 $y = ax^2$ のグラフは $a > 0$ のとき下に凸で値域が $y \geqq 0$ となり，$a < 0$ のとき上に凸で値域は $y \leqq 0$ となる．2 次関数のグラフは左右対称で，その対称軸を**軸**とよぶ．また軸とグラフの交点を**頂点**とよぶ．$y = ax^2$ のグラフの頂点は原点 $(0, 0)$，軸は y 軸 $(x = 0)$ である．

$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき



2 次関数の標準形

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は**平方完成**により $\boxed{y = a(x - p)^2 + q}$ の形に変形でき，この形を 2 次関数の**標準形**という．実際，

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

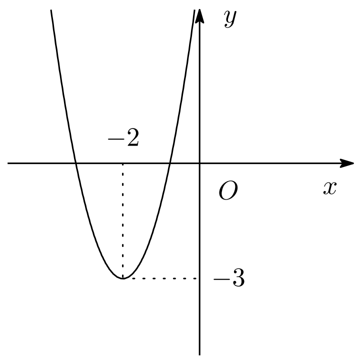
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{2a}$$

であるから，$p=-\frac{b}{2a}$, $q=-\frac{b^2-4ac}{2a}$ とすればよい．この標準形の 2 次関数のグラフは $y=ax^2$ を x 軸方向に p,y 軸方向に q だけ平行移動したグラフであり，$y=a(x-p)^2+q$ の頂点は $(p,\,q)$, 軸は $x=p$ である．

例題 [2]

2 次関数 $y=2x^2+8x+5$ について，次の問に答えよ．
(1) 2 次関数を平方完成し，頂点，軸を答えよ．
(2) 2 次関数の値域を求めよ．
(3) 2 次関数のグラフを描け．

解答例：
(1) $y=2x^2+8x+5=2(x^2+4x)+5=2(x^2+4x+4-4)+5$
$=2(x+2)^2-3$．よって，頂点は $(-2,-3)$, 軸は $x=-2$.
(2) $y \geqq -3$
(3) 右図

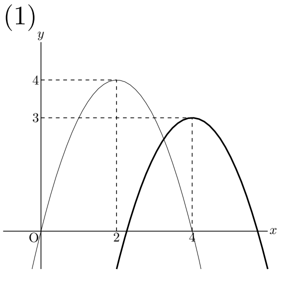


例題 [3]

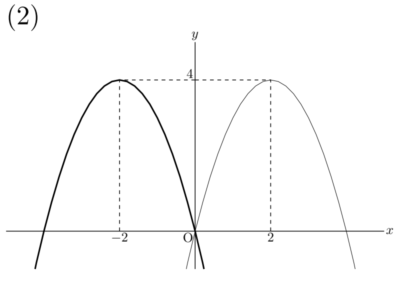
2 次関数 $y=-x^2+4x$ について，次のように移動させてできるグラフの方程式を答えよ．
(1) x 軸方向に 2,y 軸方向に -1 平行移動させたグラフの方程式.
(2) y 軸に関して対称移動させたグラフの方程式.
(3) x 軸に関して対称移動させたグラフの方程式.

解答例：$y=-(x-2)^2+4$ なので，与えられた関数の頂点は $(2,4)$ である． (1) 頂点 $(2,4)$ を x 軸方向に 2,y 軸方向に -1 平行移動させると頂点は $(4,3)$ にうつる． よって，求める方程式は $y=-(x-4)^2+3$． (2) 頂点 $(2,4)$ を y 軸対称に移動させると頂点は $(-2,4)$ にうつる． よって，求める方程式は $y=-(x+2)^2+4$． (3) 頂点 $(2,4)$ を x 軸対称に移動させると頂点は $(2,-4)$ にうつる． グラフの凹凸も逆になることに注意して，求める方程式は $y=(x-2)^2-4$.

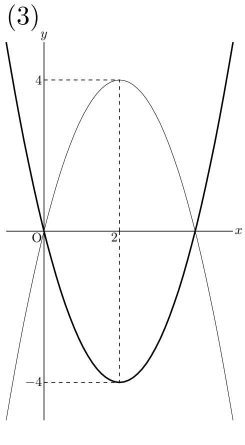
(1)



(2)



(3)



2 次方程式と解の公式

式変形により $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c は定数，$a \neq 0$) と表される方程式を 2 **次方程式**という．左辺が $(x-p)(x-q)=0$ と因数分解されれば解は $x=p,q$ である．一般にこの方程式の解は次の**解の公式**で求めることができる．

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \left[b=2b' \text{のとき} \quad x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}\right]$$

$b^2-4ac<0$ のとき，解は複素数になり虚数単位 i を用いて表す．

例題 [4]

次の 2 次方程式を解け．

(1) $12x^2+x-6=0$ (2) $x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{6}=0$

(3) $3x^2+5x+1=0$

解答例：(1) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{289}}{24}=-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{2}{3}$ (2) $6x^2+x-1=0$ に解の公式を利用すると $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{12}=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}$． (3) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$．

例題 [5]

次の 2 次方程式を解け．

(1) $x^2+x+1=0$ (2) $2x^2-4x+3=0$ (3) $2x^2-3x+3=0$

解答例：(1) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (2) $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}i}{2}$ (3) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{15}i}{4}$

判別式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ や 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ について，$D=b^2-4ac$ を**判別式**という．

判別式と 2 次方程式の間には次の性質が成り立つ．

$D>0 \Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ は異なる 2 つの実数解を持つ．
$D=0 \Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ は 2 重解 (実数解) を持つ．
$D<0 \Longleftrightarrow ax^2+bx+c=0$ は異なる 2 つの虚数解を持つ．

また，判別式と 2 次関数の間には次の性質が成り立つ．

$D>0 \Longleftrightarrow y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と 2 点で交わる．
$D=0 \Longleftrightarrow y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と 1 点で接する．
$D<0 \Longleftrightarrow y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と交わらない．

例題 [6]

次の 2 次方程式の解を判別せよ．ただし b, c は実数の定数とする．

(1) $x^2-3x+3=0$ (2) $2x^2+4x+c=0$ (3) $x^2+bx+1=0$

解答例：(1) $D=-3<0$ より，2 次方程式は異なる 2 つの虚数解をもつ． (2) $D=16-8c$ により，$c<2$ のとき異なる 2 つの実数解．$c=2$ のとき 2 重解．$c>2$ のとき異なる 2 つの虚数解

をもつ． (3) $D = b^2 - 4 = (b+2)(b-2)$ により，$b < -2,\ 2 < b$ のとき異なる 2 つの実数解．$b = \pm 2$ のとき 2 重解．$-2 < b < 2$ のとき異なる 2 つの虚数解．

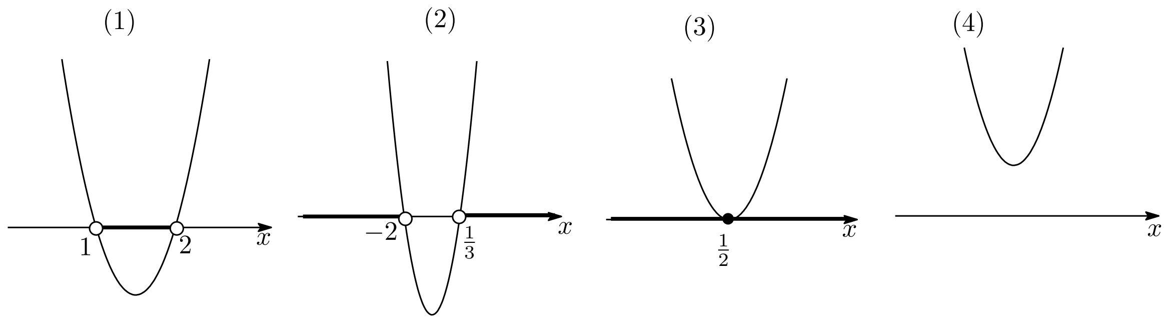
例題 [7]

次の 2 次不等式を解け．

(1) $x^2 - 3x + 2 < 0$ (2) $3x^2 + 5x - 2 > 0$

(3) $4x^2 - 4x + 1 \geqq 0$． (4) $2x^2 - 3x + 2 < 0$．

解答例：(1) $(x-1)(x-2) < 0$ から $y = (x-1)(x-2)$ のグラフで x 軸より下の範囲を求め，$1 < x < 2$． (2) $(3x-1)(x+2) > 0$ より $x < -2,\ \dfrac{1}{3} < x$． (3) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geqq 0$ より，すべての実数が解となる． (4) $2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} \geqq \dfrac{7}{8}$ より，解はない．



判別式による別解：(3) 判別式 $D = 0$ で，x 軸に接し下に凸のグラフなのですべての実数が解である． (4) $D = -7$ で，x 軸と共有点を持たず下に凸のグラフなので解なし．

確認問題 2

1 $y = -3x^2 + 18x + 7$ を標準形 $y = a(x-p)^2 + q$ にすると，$q = \boxed{}$ である．

2 $y = -2x^2 - 8x - 4$ の頂点の座標は $(\boxed{}, 4)$

3 $y = -2x^2 + 4x + 3$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最小値は $\boxed{}$ である．

4 $20x^2 + 7x - 3 \leqq 0$ を解くと $-\dfrac{3}{5} \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{}}{4}$

5 $3x^2 - 12x - k + 7 = 0$ が実数解をもつような k の範囲は，$k \geqq \boxed{}$ である．

1		**2**		**3**		**4**		**5**	

3）集合と命題

集合の要素 (元)

集合を構成する個々のものを集合の**要素** (**元**) という．a が集合 A の要素であることを $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ で表し，要素でないことを $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$ で表す．$a \in A$ であるとき，a は集合 A に**属する**という．

集合を表すには，属する要素を $\{\quad\}$ の中にすべて並べる表し方と，要素の満たすべき条件を表示して $\{x \mid p(x)\}$ のように表す方法とがある．

例題 [1]

次の集合を，要素を書き並べて表わせ． ただし， 自然数全体の集合を $\mathbb{N}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と記す．

(1) 4 以下の自然数の集合．

(2) $\{x \mid -5 \leqq x < 4,\ x \in \mathbb{Z}\}$．

(3) $\{2n+3 \mid n \in \mathbb{N}$ かつ $n \leqq 3\}$．

解答例：(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$．　(2) $\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$．　(3) $\{5,\ 7,\ 9\}$．

例題 [2]

次の$\square$に適する記号を $\in, \notin$ から選べ．

(1) 奇数全体の集合 A について　$7 \ \square\ A$．

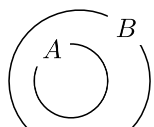
(2) $A = \{3n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ について　$10 \ \square\ A$．

(3) $A = \{x \mid |x| > 2\}$ について　$-1 \ \square\ A$．

解答例：(1) 7 は奇数だから $\in$．　(2) $A = \{4,\ 7,\ 10, \cdots\}$ だから $\in$．　(3) $A = \{x \mid x < -2$ または $x > 2\}$ だから $\notin$．

集合の包含関係

集合 A に属する要素が必ず B に属するとき (任意の $a \in A$ について，$a \in B$ であるとき)，A は B の**部分集合**である (あるいは A は B に**含まれる**) といい，$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ または $\boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$ で表す．



$A \subset B$

$A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき，A と B は**等しい**といい，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ で表す．

要素が 1 つも無い集合を**空集合**といい，$\boldsymbol{\phi}$ で表す．

$A \subset B$, $A = B$, $A \supset B$ のいずれかの関係が成り立つとき，集合 A, B には**包含関係**があるという．任意の集合 A について次の包含関係が成り立つ：

(1) $A \subset A$

(2) $\phi \subset A$

例題 [3]

集合 $\{0, 1\}$ の部分集合をすべて求めよ．

解答例：ϕ, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$

例題 [4]

次の集合 A, B に包含関係があれば述べよ.

(1) $A = \{n \mid n \text{ は奇数}, 0 < n < 11\}$, $B = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

(2) $A = \{2m+3 \mid m \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{2m-1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

(3) $A = \{n \mid n \text{ は } 36 \text{ の約数 }\}$, $B = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$.

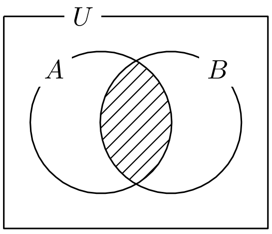
解答例：(1) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$B = \{\cdots, -3, -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \cdots\}$ より $A \subset B$ である．(2) $A = B$ である． (3) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36\}$，$B = \{2,\ 4\}$ より $A \supset B$ である．

共通部分と和集合

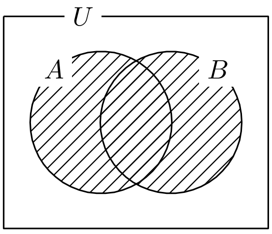
共通部分 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$ (A と B のどちらにも属する要素全部の集合)

和集合 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$ (A と B の少なくとも一方に属する要素全部の集合)

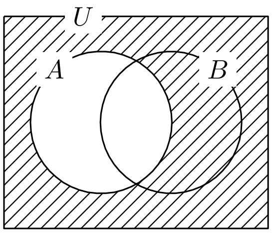
補集合 $\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A\}$ (考える対象すべての集合 U(**全体集合**) の要素のうち，A に属さない要素全部の集合)



$A \cap B$



$A \cup B$



$\overline{A}$

例題 [5]

全体集合を $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ とする．3 つの集合 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2,\ 6\}$, $C = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ に対して次の集合を求めよ．

(1) $A \cup B$, $A \cap B$

(2) $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$

(3) $A \cap B \cap C$

(4) $\overline{B}$

(5) $\overline{A} \cap \overline{C}$

解答例:(1) $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$, $A \cap B = \{1,\ 2\}$. (2) $(A \cup B) \cap C = \{2,\ 3,\ 4\}$, $(A \cap B) \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. (3) $A \cap B \cap C = \{2\}$. (4) $\overline{B} = \{3,4,5\}$. (5) $\overline{A} = \{5,6\}$, $\overline{C} = \{1,6\}$ だから $\overline{A} \cap \overline{C} = \{6\}$.

命題と条件

正しいか正しくないかが定まる文や式を**命題**という．ある命題が正しいとき，その命題は**真（しん）**，あるいは，**成り立つ**という．ある命題が正しくないとき，その命題は**偽（ぎ）**，あるいは，**成り立たない**という．

条件 p と q の関係を表す命題「p ならば q」について，p を**仮定**, q を**結論**といい，この命題を記号で $\boldsymbol{p} \Longrightarrow \boldsymbol{q}$ と書く．また，命題「$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$」を記号で $\boldsymbol{p} \iff \boldsymbol{q}$ と書く．

命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとは,「条件 p を満たすものはすべて条件 q を満たす」ことである．命題 $p \Longrightarrow q$ が偽であるとは,「条件 p を満たすが条件 q を満たさない例（**反例**）が存在する」ことである．反例が 1 つだけでも見つかれば，命題 $p \Longrightarrow q$ は偽である．

命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，p は q であるための**十分条件**であるといい，q は p であるための**必要条件**であるという．また，命題 $p \iff q$ が真であるとき，p は q であるための（q は p であるための）**必要十分条件**であるという．このとき，p と q は**同値**であるともいう．

例題 [6]

x, y を実数とする．次の条件 p と q について,「p は q の必要条件であるが十分条件ではない」,「p は q の十分条件であるが必要条件ではない」,「p は q の必要十分条件である」のいずれであるか答えよ．

(1) p: $x^2+y^2=0$　　q: $x=0$ かつ $y=0$

(2) p: $x^2=4$　　q: $x=2$

(3) p: x は 6 の倍数である．　q: x は偶数である．

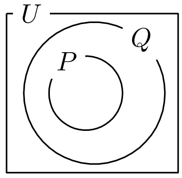
解答例：(1) $p \iff q$ が成り立つから「p は q の必要十分条件である」　(2) $q \Longrightarrow p$ は成り立つが $p \Longrightarrow q$ は成り立たない（$x=-2$ とすると p を満たすが q を満たさない）から「p は q の必要条件であるが十分条件ではない」　(3) $p \Longrightarrow q$ は成り立つが $q \Longrightarrow p$ は成り立たない（$x=2$ とすると q を満たすが p を満たさない）から「p は q の十分条件であるが必要条件ではない」

命題と集合

条件 p, q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P, Q とすると，次が成り立つ：

(1) $p \Longrightarrow q$ が真であることと $P \subset Q$ は同じ．

(2) $p \iff q$ が真であることと $P=Q$ は同じ．



$p \Longrightarrow q$

条件と集合

条件 p に対し、条件「p でない」を p の**否定**といい，$\overline{p}$ で表す．全体集合 U のうち条件 p, q を満たす要素全体の集合をそれぞれ P, Q とすると，次が成り立つ：

(1) 条件　p かつ q　を満たすもの全体の集合は $P \cap Q$

(2) 条件 p または q を満たすもの全体の集合は $P \cup Q$

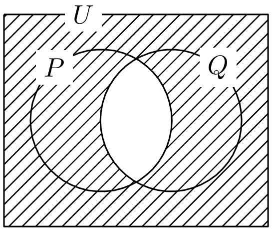
(3) 条件　$\overline{p}$　を満たすもの全体の集合は　$\overline{P}$

ド・モルガンの法則

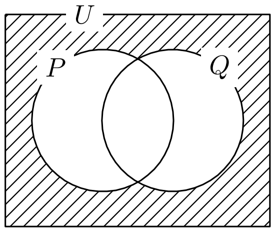
条件「p かつ q」「p または q」の否定に関して，次が成り立つ：

(1) $\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p}\text{ または }\overline{q}$　(集合では $\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$)

(2) $\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p}\text{ かつ }\overline{q}$　(集合では $\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$)



$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$



$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$

例題 [7]

x は実数とする．次の条件の否定を述べよ．

(1) $x = 1$

(2) $x < 2$

(3) $x \geqq 3$ または $x < -2$

(4) $0 < x \leqq 4$

解答例：(1) $x \neq 1$　(2) $x \geqq 2$　(3) ド・モルガンの法則より，$x < 3$ かつ $x \geqq -2$. すなわち $-2 \leqq x < 3$.　(4) 条件は $x > 0$ かつ $x \leqq 4$. この否定は，ド・モルガンの法則より，$x \leqq 0$ または $x > 4$.

命題の逆・裏・対偶

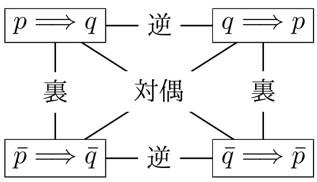
命題 $p \Longrightarrow q$ (集合では $P \subset Q$) にたいして

　$q \Longrightarrow p$ を逆　(集合では $Q \subset P$)

　$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ を裏　(集合では $\overline{P} \subset \overline{Q}$)

　$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を対偶　(集合では $\overline{Q} \subset \overline{P}$)

という．命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ は必ず真偽が一致するが，逆や裏は真偽が一致するとは限らない．



例題 [8]

x は実数とする．命題「$x = 4 \Longrightarrow x^2 = 16$」の真偽を調べよ．また，この命題の逆，裏，対偶を述べ，それぞれの真偽を調べよ．

解答例：「$x = 4 \Longrightarrow x^2 = 16$」は真である．逆は「$x^2 = 16 \Longrightarrow x = 4$」であり，反例 $x = -4$ が見つかる（$x = -4$ は仮定を満たすが結論を満たさない）から偽である．裏は「$x \neq 4 \Longrightarrow x^2 \neq 16$」であり，やはり $x = -4$ が反例となるから偽である．対偶は「$x^2 \neq 16 \Longrightarrow x \neq 4$」であり，真である．

確認問題３

1　集合 $\{1, 2, 3\}$ の部分集合をすべて求めると，部分集合は全部で $\boxed{\quad}$ 個ある．

2　次の $\boxed{\quad}$ に適する記号を $\in$, $\subset$, $\supset$ から選べ．同じ記号を何度使ってもよい．

(1)　偶数全体の集合 A について　$\{8\} \boxed{\quad} A.$

(2)　$A = \{3n-1 \mid\ n \in \mathbb{N},\ n \leqq 10\}$ について　$11 \boxed{\quad} A.$

(3)　$A = \{n \mid n$ は 24 の約数 $\}$, $B = \{n \mid n$ は 12 の約数 $\}$ について　$A \boxed{\quad} B.$

3　$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ を全体集合とする．次の集合に属する要素をすべて答えよ．

(1)　$A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{3, 6, 7\}$ のとき，$A \cup B = \{\boxed{\quad}\}$.

(2)　$A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{3, 6, 7\}$ のとき，$\overline{A} \cap B = \{\boxed{\quad}\}$.

(3)　2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B とするとき，$\overline{A \cup B} = \{\boxed{\quad}\}$

(4)　$A \cap \overline{B} = \{2\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $\overline{A \cup B} = \{6, 7\}$ のとき，$A = \{\boxed{\quad}\}$.

(5)　$A \cap \overline{B} = \{2\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $\overline{A \cup B} = \{6, 7\}$ のとき，$B = \{\boxed{\quad}\}$.

(6)　$A \cap \overline{B} = \{2\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $\overline{A \cup B} = \{6, 7\}$ のとき，$A \cup \overline{B} = \{\boxed{\quad}\}$.

4　a, x は実数とする．次の $\boxed{\quad}$ に入る適切な言葉を下の選択肢から選べ．同じ選択肢を何度使ってもよい．

(1)　命題「すべての実数 a について $\sqrt{a^2} = a$」は $\boxed{\quad}$.

(2)　命題「4 の倍数ならば 16 の倍数である」は $\boxed{\quad}$.

(3)　条件 $a = -5$ は条件 $a^2 = 25$ の $\boxed{\quad}$.

(4)　条件 $x^2 - 4x + 3 = 0$ は条件 $x = 1$ の $\boxed{\quad}$.

(5)　条件 $a^3 = 1$ は条件 $a = 1$ の $\boxed{\quad}$.

(6)　条件 $-3 \leqq x < 1$ は条件「$x < -3$ または $x \geqq 1$」の $\boxed{\quad}$.

(7)　命題「$x \neq 1$ ならば $(x-1)^2 \neq 0$」は命題「$x = 1$ ならば $(x-1)^2 = 0$」の $\boxed{\quad}$.

(8)　命題「$(x < -1$ または $x > 3)$ ならば $|x| > 1$」は命題「$|x| \leqq 1$ ならば $-1 \leqq x \leqq 3$」の $\boxed{\quad}$.

選択肢

1. 真である　2. 偽である　3. 逆である　4. 裏である　5. 対偶である　6. 否定である

7. 必要条件であるが十分条件ではない　8. 十分条件であるが必要条件ではない

9. 必要十分条件である

1		**2**	(1)		(2)		(3)	

3	(1)		(2)		(3)	
	(4)		(5)		(6)	

4	(1)		(2)		(3)		(4)		(5)		(6)		(7)		(8)	

4) 様々な関数

関数の基本

(1) 関数の一般的な定義：集合 A と集合 B があって，集合 A の各要素 x に集合 B のある要素 y を対応させることを**関数**といい $y = f(x)$ と記す（$y = g(x), \ldots$ なども使われる）．x を**独立変数**, y を**従属変数**という.

(2) 関数 $y = f(x)$ において，変数の範囲を変域といい特に，$f(x)$ が定義されている x の範囲を**定義域**といい，それに対応する y の範囲を**値域**という.

(3) 関数 $y = f(x)$ に対し，$x = a$ に対応する y の値を $f(a)$ と記す.

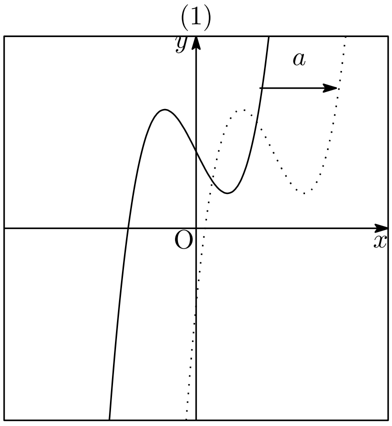
(4) 関数 $y = f(x)$ と関数 $y = g(x)$ があり $g(x)$ の値域が $f(x)$ の定義域に含まれる場合，関数 $y = f(g(x))$ が考えられる．これを f と g の**合成関数**と言い $f \circ g$ と記す.

関数のグラフと移動

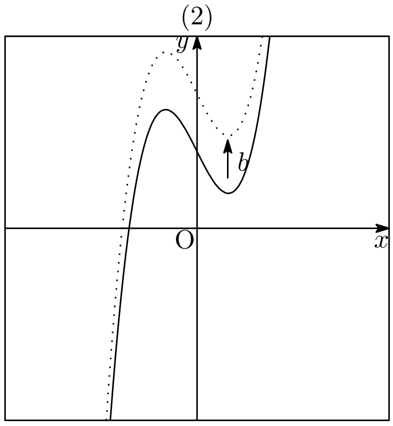
(1) $y = f(x-a)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向へ a 移動したものである.
(2) $y = f(x) + b$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを y 軸方向へ b 移動したものである.

以下の図では実線が $y = f(x)$ のグラフとし, 点線がそれを変換をしたもののグラフとする.

(1)

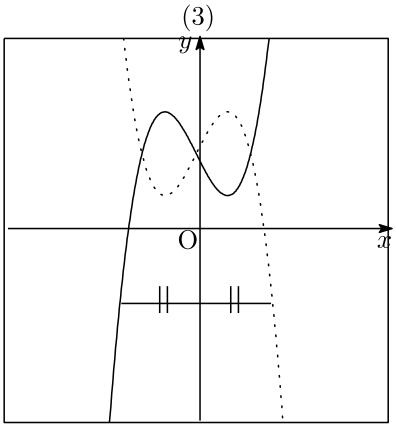


(2)

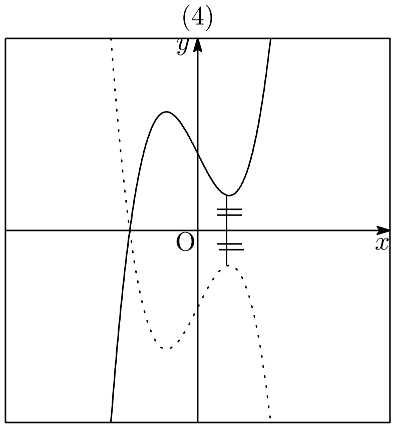


(3) $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを y 軸に関して対称に移動したものである.
(4) $y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称に移動したものである.

(3)



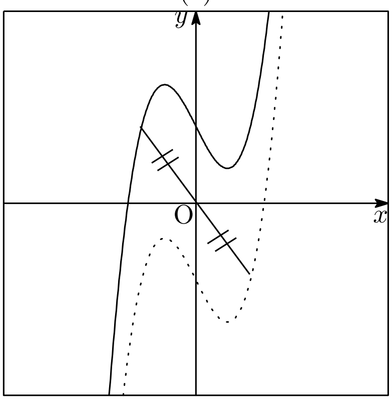
(4)



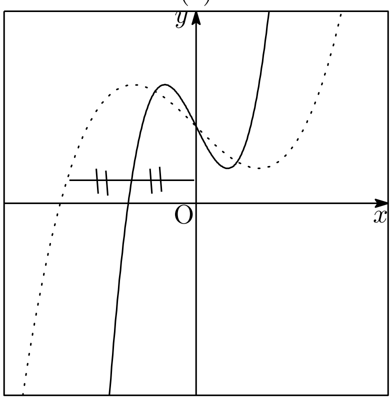
(5) $y=-f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを原点に関して対称に移動したものである．

(6) $a>0$ とし $y=f(ax)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{a}$ 倍したものである．(図 (6) では $a=\dfrac{1}{2}$ とした）

(5)

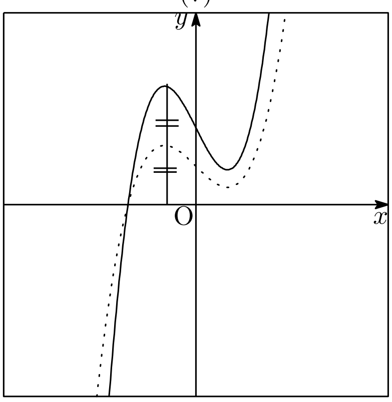


(6)



(7) $b>0$ とし $y=bf(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを y 軸方向に b 倍したものである．(図 (7) では $b=\dfrac{1}{2}$ とした)

(7)

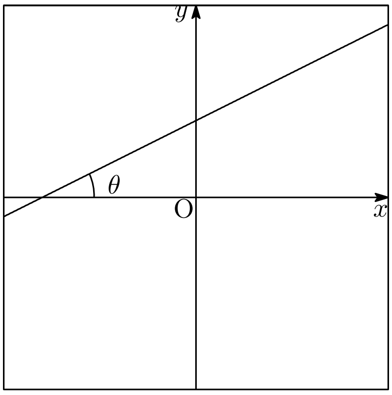


一次関数

(1) $y=ax+b$ は 一次関数と呼ばれる． ここで a,b はそれぞれ傾き, 切片と呼ばれる。

(2) $y=ax+b$ のグラフは直線になり, x 軸の正の方向と平行な直線とのなす角を θ とするとき $a=\tan\theta$

(3) (p,q) を通り傾きが a である直線の方程式は $y=a(x-p)+q$



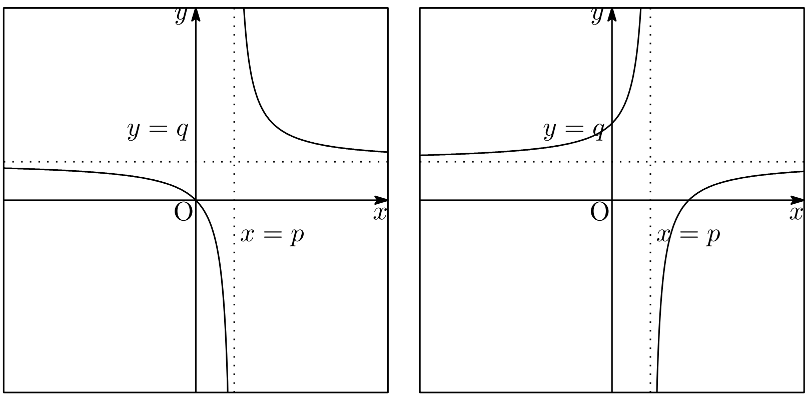
一次分数関数

(1) $y = \dfrac{cx+d}{ax+b}$ $(ad - bc \neq 0)$ は一次分数関数と呼ばれる．

(2) $\boxed{y = \dfrac{r}{x-p} + q}$

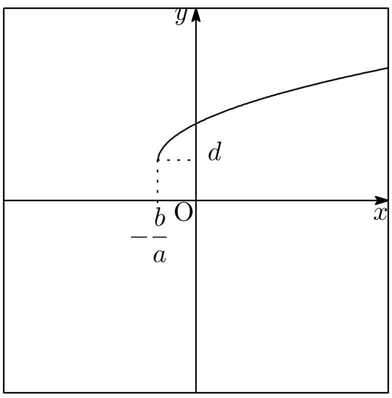
は**一次分数関数の標準形**と呼ばれる．これは $x = p$, $y = q$ を漸近線とする双曲線となる．どんな一次分数関数も標準形に変形できる．

$r > 0$ $r < 0$



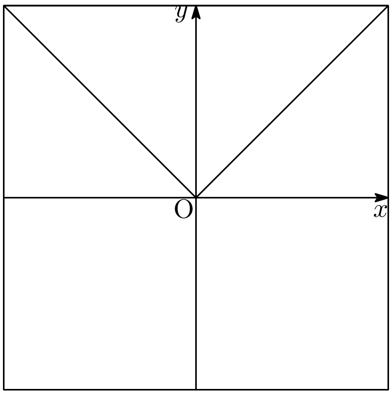
無理関数

(1) $y = \sqrt{ax+b} + d$ のように無理式で定義されている関数を**無理関数**と呼ぶ．



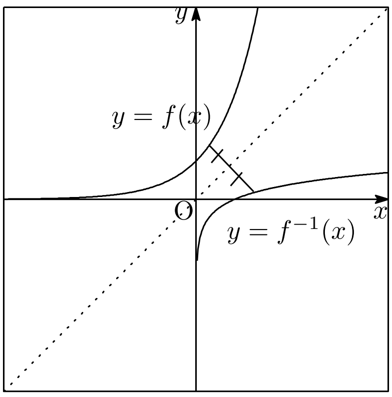
絶対値関数

$y=|x|$ は絶対値関数と呼ばれ, $y=$ABS(x) と記されることもある.



逆関数

(1) 関数 $y=f(x)$ に対して, 値域内の各 y について $y=f(x)$ を満たす x がただ一つ決まるとき y から x に対応させることができるので, それを $x=f^{-1}(y)$ と記す. x と y を入れ替えて独立変数を x, 従属変数を y として, $y=f^{-1}(x)$ を関数 $y=f(x)$ の**逆関数**という.
(2) $y=f^{-1}(x)$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフは 直線 $y=x$ に関して対称である.



例題 [1]

$f(x)=x^2,\ g(x)=3x+2,\ h(x)=x^3+3x$ とする.
(1) $f(1),\ g(2),\ h(-1)$ をそれぞれ求めよ.
(2) $f(x-a)$ を求めよ.
(3) $(f\circ g)(x)(=f(g(x)))$ を求めよ.
(4) $(f\circ g)(2)$ を求めよ.

解答例：(1) $1,\ 8,\ -4$ (2) $f(x-a)=(x-a)^2$ (3) $f(g(x))=f(3x+2)=(3x+2)^2$ (4) 64

例題 [2]

次の関数の値域を求めよ．また定義域が明示されていないときはその関数が計算できる範囲を定義域として考え，定義域も求めよ．

(1) $f(x) = 3x + 1,\ -1 \leqq x \leqq 1$

(2) $f(x) = x^2,\ -1 \leqq x \leqq 1$

(3) $f(x) = \sqrt{x-1}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

ポイント：$\sqrt{}$ 内 $\geqq 0$，(分母) $\neq 0$

解答例：(1) $-2 \leqq y \leqq 4$　(2) $0 \leqq y \leqq 1$　(3) $x \geqq 1,\ y \geqq 0$　(4) x, y とも 0 以外の全実数

例題 [3]

関数 $y = x^2 + 2x$ のグラフを以下のように移動するとどのような式の関数のグラフになるかをそれぞれ求めよ．

(1) x 軸方向に 3 平行移動する．

(2) y 軸に関して対称移動する．

(3) x 軸に関して対称移動する．

(4) x 軸方向に -2, y 軸方向に 5 だけ平行移動する．

(5) x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍, y 軸方向に 3 倍する．

解答例：(1) $y = x^2 - 4x + 3$　(2) $y = x^2 - 2x$　(3) $y = -x^2 - 2x$　(4) $y = x^2 + 6x + 13$
(5) $y = 12x^2 + 12x$

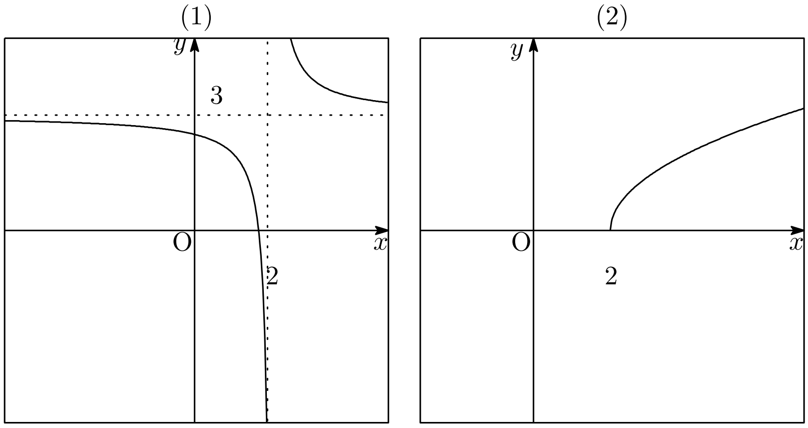
例題 [4]

次の各関数のグラフを書きなさい．また漸近線があれば明示しなさい．

(1) $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$

(2) $y = \sqrt{2x-4}$

解答例：(1) $\dfrac{3x-5}{x-2} = \dfrac{3(x-2)+1}{x-2} = 3 + \dfrac{1}{x-2}$. 従って $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$ のグラフは $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 平行移動したものである．漸近線は $x = 2$ と $y = 3$ である．
(2) $\sqrt{2x-4} = \sqrt{2(x-2)}$ より $y = \sqrt{2x-4}$ のグラフは $y = \sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に 2 平行移動したものになる．



例題 [5]

次の関数の逆関数を求めよ．

(1) $y = 3x + 1$

(2) $y = x^2 \ (x \leqq 0)$

ポイント： $y = f(x)$ の逆関数を求めるには，まず x について解いて $x = g(y)$ の形にし，それから x と y を入れ替えて $y = g(x)$ とすればよい．

解答例：(1) $y = \dfrac{x-1}{3}$.

(2) $y = x^2$ より $x = \pm\sqrt{y}$. $x \leqq 0$ であるので $x = -\sqrt{y}$. x と y を入れ替えて $y = -\sqrt{x}$.

確認問題４

1　$f(x)=3x^2+x,\ g(x)=2x-3$ とするとき，$g\circ f(x)=\boxed{}x^2+2x-3$

2　$y=\dfrac{1}{x+1}$ のグラフを原点に関して対称移動すると次の式の関数のグラフになる．

$y=\dfrac{\boxed{}}{x-1}$

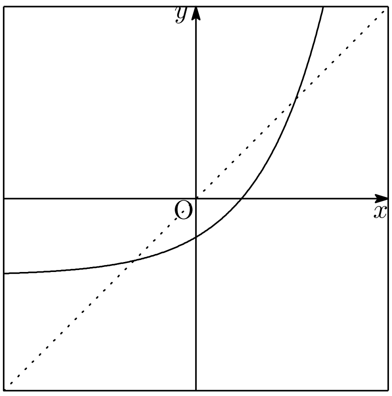
3　$y=\dfrac{6}{x+3}$ のグラフを x 軸に関して $\dfrac{1}{3}$ 倍し，y 軸に関して 2 倍すると次の式の関数のグラフになる．

$y=\dfrac{\boxed{}}{x+1}$

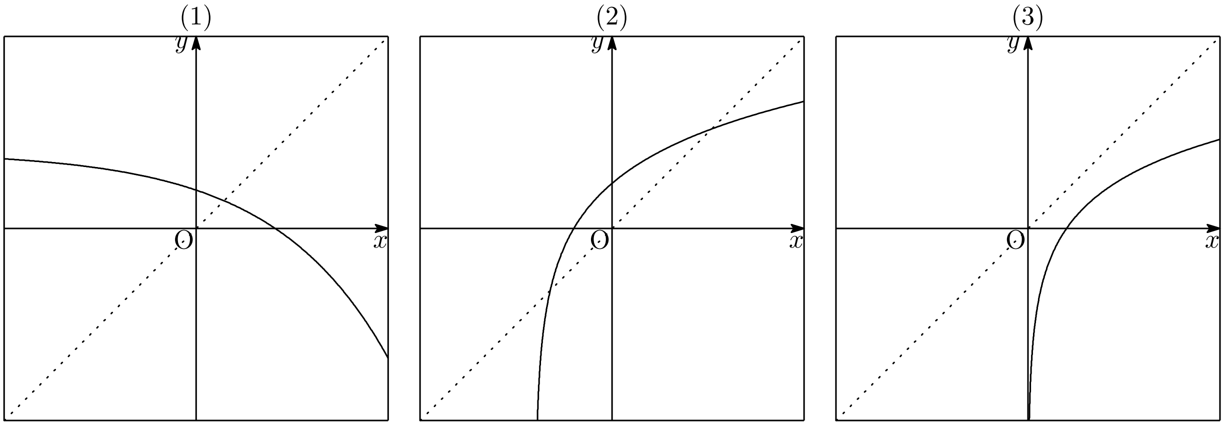
4　$y=1-\dfrac{x^2}{4}\ \ (x\leqq 0)$ の逆関数は

$y=\boxed{}\sqrt{1-x}$

5　次はある関数のグラフである．



この関数の逆関数のグラフを以下から選ぶと$\boxed{}$である．



1		**2**		**3**		**4**		**5**	

5）指数関数・対数関数

基本公式（指数法則）

$a \neq 0$ とするとき，次が成り立つ：

(1) $a^0 = 1$

$a, b > 0$, 実数 x, y に対して，次が成り立つ：

(2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(3) $a^x a^y = a^{x+y}$

(4) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(5) $(a^x)^y = a^{xy}$

(6) $(ab)^x = a^x b^x$

また，x, y が整数であるとき，a や b が負の数であっても上記 (2)〜(6) は成り立つ．

基本事項（累乗根）

a を数とし，n を自然数とする．a の n 乗根とは，n 乗して a になるような数のことである．すなわち方程式 $x^n - a = 0$ の解 x を **a の n 乗根**という．

記号 $\sqrt[n]{a}$（**n 乗根 a**）は，a の n 乗根のうち $\begin{cases} n\text{ が奇数のときは，実数になるもの} \\ n\text{ が偶数のときは，0 以上になるもの} \end{cases}$ を表す．

よって，$\sqrt[n]{a}$ の表す数は必ずただ 1 つに決まる．

たとえば，-1 の 3 乗根は -1, $\dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ の 3 つあることが知られているが，そのうち $\sqrt[3]{-1}$ の表す数は -1 のみである．また，4 の 2 乗根 (**平方根**) は ± 2 であり，そのうち $\sqrt{4}$ の表す数は 2 のみである．“$\sqrt{4} = \pm 2$” は間違いなので注意．一般に，n が偶数のとき $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ である．

基本公式（根号との関係）

$a > 0$, n を自然数とするとき，次が成り立つ：

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

指数関数

a を 1 でない正の定数とするとき，関数 $y = a^x$ を **a を底とする x の指数関数**という．指数関数 $y = a^x$ は，次の性質をもつ：

(1) 定義域は実数全体，値域は正の数

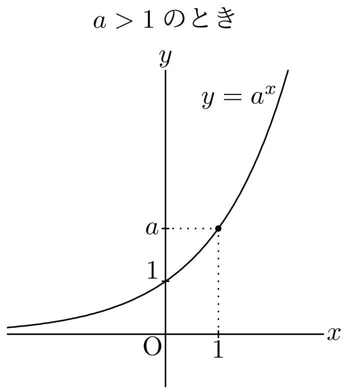
(2) $p = q \iff a^p = a^q$

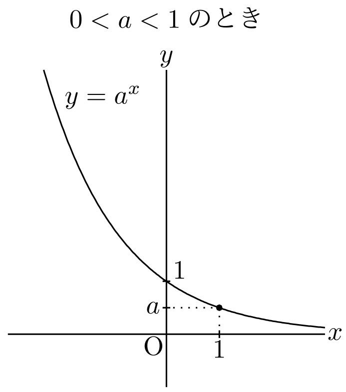
(3) $0 < a < 1$ のとき，$p < q \iff a^p > a^q$

(4) $a > 1$ のとき，$p < q \iff a^p < a^q$

指数関数のグラフ

いずれも y 切片が $(0, 1)$ であり，x 軸を漸近線として持つ．





例題 [1]

a, b を正の数とするとき， 常に成立する式を選べ．

(1) $a^6 \cdot a^8 = a^{48}$　(2) $(a^2)^3 = a^5$　(3) $(ab)^3 = ab^3$

(4) $(a^3)^2 = a^6$　(5) $(ab^3)^2 = a^2b^6$

解答例： (1) $a^6 \cdot a^8 = a^{14}$　(2) $(a^2)^3 = a^6$　(3) $(ab)^3 = a^3b^3$　(4) $(a^3)^2 = a^6$

(5) $(ab^3)^2 = a^2(b^3)^2 = a^2b^6$　以上より答えは (4), (5)

例題 [2]

次の各式を簡単にせよ．

(1) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}}$　(2) $\left(\dfrac{9}{3^{-\frac{1}{4}}}\right)^2$　(3) $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2$

解答例： (1) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} = 4$　(2) $\left(\frac{9}{3^{-\frac{1}{4}}}\right)^2 = \left(\frac{3^2}{3^{-\frac{1}{4}}}\right)^2 = \left(3^{\frac{9}{4}}\right)^2 = 3^{\frac{9}{2}} = 81\sqrt{3}$

(3) $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} = x + 2 + \dfrac{1}{x}$

例題 [3]

次の各値を根号のない値で表せ．

(1) $\sqrt[3]{27}$　(2) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$　(3) $\sqrt[3]{-8}$　(4) $\sqrt{(-2)^2}$

解答例： (1) 3　(2) $\frac{1}{2}$　(3) -2　(4) 2

例題 [4]

次の指数で表現された数を根号で表し， 根号で表された数を指数で表現せよ．

(1) $5^{-\frac{1}{4}}$　(2) $\sqrt[4]{3^7}$　(3) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1000000}}$

解答例： (1) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$　(2) $3^{\frac{7}{4}}$　(3) 10^{-2}

例題 [5]

a, b を正の数とするとき，次の各式を簡単にせよ．

(1) $\sqrt[3]{a^7}\sqrt[3]{a^2}$ (2) $\dfrac{(\sqrt[5]{b^4a})^3}{\sqrt[5]{a^8b^2}}$ (3) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}\right)^2$

解答例：(1) $\sqrt[3]{a^7}\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{7}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{9}{3}}=a^3$ (2) $\dfrac{(\sqrt[5]{b^4a})^3}{\sqrt[5]{a^8b^2}}=\dfrac{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{12}{5}}}{a^{\frac{8}{5}}b^{\frac{2}{5}}}=a^{-1}\cdot b^2=\dfrac{b^2}{a}$

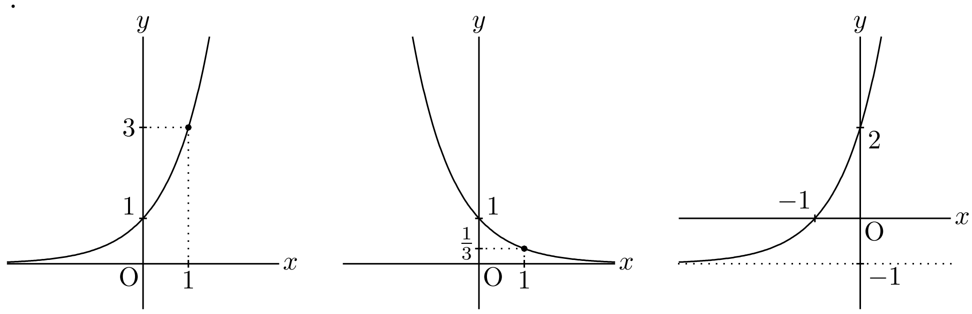
(3) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}\right)^2=a^{3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

例題 [6]

次の関数のグラフをかけ．

(1) $y=3^x$ (2) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ (3) $y=3^{x+1}-1$

解答例：



(1) (2) (3)

基本事項（対数の定義）

$a>0,\ a\neq 1,\ x>0$ に対して

$\log_a x=y \iff x=a^y$

x について $\log_a x$ を求めることを，$\boldsymbol{x}$ **の**［a を底とする］**対数をとる**という．また，このとき x を，この対数の**真数**という．

基本公式（対数法則）

$a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y>0$ とするとき

(1) $\log_a 1=0,\ \log_a a=1$

(2) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(3) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(4) $\log_a x^b=b\log_a x$

基本公式（底の変換）

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ x>0$ とするとき

$\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

常用対数

10 を底とする対数 $\log_{10} x$ を**常用対数**という．底の変換公式により $\log_a x = \dfrac{\log_{10} x}{\log_{10} a}$

常用対数により，数の桁数が分かる．

- $N \geqq 1$ のとき，N の整数部分が k 桁 $\Leftrightarrow k-1 \leqq \log_{10} N < k$
- $0 < N < 1$ のとき，N の小数第 k 位にはじめて 0 でない数が現れる $\Leftrightarrow -k \leqq \log_{10} N < -k+1$

対数関数

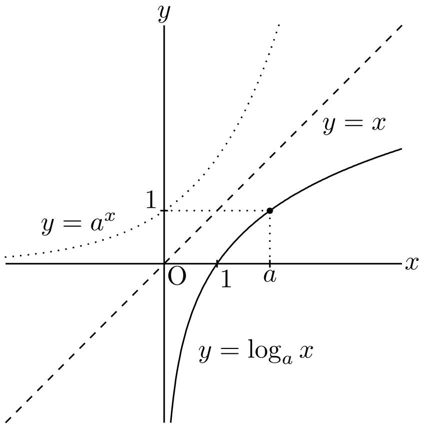
a を 1 でない正の定数とするとき，関数 $y = \log_a x$ を $\boldsymbol{a}$ **を底とする** $\boldsymbol{x}$ **の対数関数**という．対数関数 $y = \log_a x$ は，次の性質をもつ：

(1) 定義域は正の数，値域は実数全体
(2) $p = q \iff \log_a p = \log_a q$
(3) $0 < a < 1$ のとき，$0 < p < q \iff \log_a p > \log_a q$
(4) $a > 1$ のとき，$p < q \iff \log_a p < \log_a q$

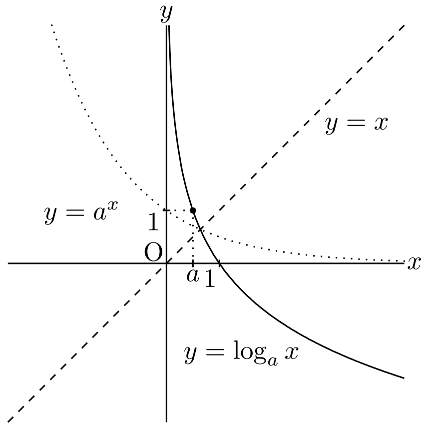
対数関数のグラフ

いずれも x 切片が $(1, 0)$ であり，y 軸を漸近線として持つ．$y = \log_a x$ のグラフは $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である．

$a > 1$ のとき



$0 < a < 1$ のとき



例題 [7]

次の $\boxed{}$ に適切な字句を入れよ．なお，$\boxed{(2)}$, $\boxed{(3)}$ は順不同である．
$y = \log_a x$ で a は $\boxed{(1)}$ と呼ばれ， 条件 $\boxed{(2)}$ および $\boxed{(3)}$ を満たす．また x は $\boxed{(4)}$ と呼ばれていて条件 $\boxed{(5)}$ を満たす．
$y = \log_a x$ は次の関係式と同じである: $x = a^{\boxed{(6)}}$

解答例：

(1) 底　(2), (3) $a > 0,\ a \neq 1$（順不同）　(4) 真数　(5) $x > 0$　(6) y

例題 [8]

次の各関係式を対数で表現せよ．

(1) $2^3 = 8$　(2) $5^0 = 1$　(3) $a^m = b$　$(a,\, b > 0,\ a \neq 1)$

解答例：(1) $\log_2 8 = 3$　(2) $\log_5 1 = 0$　(3) $\log_a b = m$

例題 [9]

次の各関係式を指数で表現せよ．

(1) $\log_3 81 = 4$　(2) $\log_2 \dfrac{1}{4} = -2$　(3) $\log_5 \sqrt{5} = \dfrac{1}{2}$

解答例：(1) $3^4 = 81$　(2) $2^{-2} = \frac{1}{4}$　(3) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

例題 [10]

次の各関係式の中で常に成立するものを選べ．ただし，$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$ とする．

(1) $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a x + \log_a y$　(2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(3) $c \log_a x = \log_a x^c$　(4) $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$ $(x \neq 1$ とする$)$

(5) $a^{\log_a x} = x$

解答例：(1) $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ である．(1) 以外は正しいから，解答は (2) (3) (4) (5).

例題 [11]

次の各式を簡単にせよ．

(1) $\log_2 18 - 2\log_2 3$　(2) $\log_3 \dfrac{2}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{1}{4}$　(3) $\log_3 8 \cdot \log_2 3$

解答例：

(1) $\log_2 18 - 2\log_2 3 = \log_2 \dfrac{18}{9} = 1$　(2) $\log_3 \dfrac{2}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{1}{4} = \log_3 \left\{ \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{1/2} \right\} = -\dfrac{3}{2}$

(3) $\log_3 8 \cdot \log_2 3 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 3} \cdot \log_2 3 = 3$

例題 [12]

$y = \log_2 x$ について次の問いに答えよ．

(1) 定義域を求めよ．

(2) グラフの漸近線を求めよ．

(3) x 軸との交点を求めよ．

解答例：(1) $x > 0$　(2) $x = 0$ (y 軸)　(3) $(1, 0)$

例題 [**13**]

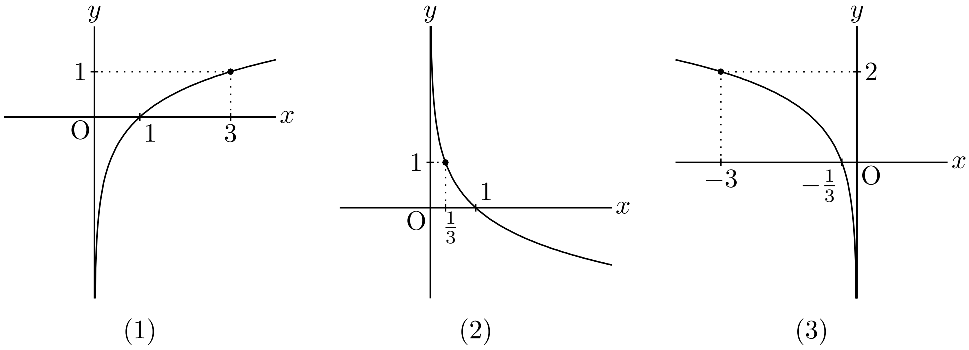
次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = \log_3 x$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

(3) $y = \log_3(-x) + 1$

解答例：



確認問題５

1　次の各値を根号のない値で表せ.

(1)　$\sqrt{(-5)^2} = \boxed{\quad}$

(2)　$\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \dfrac{1}{\boxed{\quad}}$

(3)　$\sqrt[5]{-32} = \boxed{\quad}$

2　$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}\right)^6$ を指数で表すと　$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}\right)^6 = a^{\boxed{\quad}}$

3　$\left(a^{-\frac{1}{2}}b^3\right)^5\left(a^3b^{-2}\right)^2$ を簡単にすると　$\left(a^{-\frac{1}{2}}b^3\right)^5\left(a^3b^{-2}\right)^2 = a^{\frac{\boxed{\quad}}{2}}b^{11}$

4　以下の数を小さい方から並べたとき，２番めにくるものの番号は$\boxed{\quad}$である.

(1)　$3^{0.1}$　　(2)　$\frac{1}{9^{-1}}$　　(3)　$\sqrt[5]{3}$　　(4)　$3\sqrt{3}$　　(5)　1

5　$\log_3 \boxed{\quad} = 4$

6　$\log_{\boxed{\quad}} 27 = 0.75$

7　次の式を簡単にせよ：　$\log_{10} 24 - \log_{10} 54 + 4\log_{10}\sqrt{150} = \boxed{\quad}$

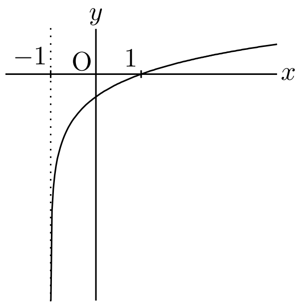
8　$\log_3 5 \cdot \log_{25} 8 \cdot \log_2 3$ を簡単にすると

$\log_3 5 \cdot \log_{25} 8 \cdot \log_2 3 = \dfrac{\boxed{\quad}}{2}$

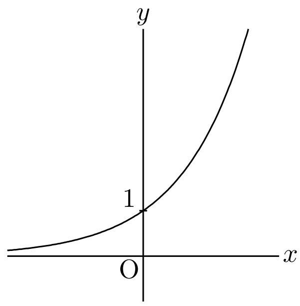
9　次の各関数をグラフにしたものを，次のページの (1)〜(8) のグラフからそれぞれ選びなさい.

(a)	$y = 2^x$		(b)	$y = 0.7^x$	
(c)	$y = 3^{x+1} - 2$		(d)	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$	
(e)	$y = \log_2 x$		(f)	$y = \log_{0.4} x$	
(g)	$y = \log_4(x+1) - \frac{1}{2}$		(h)	$y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$	

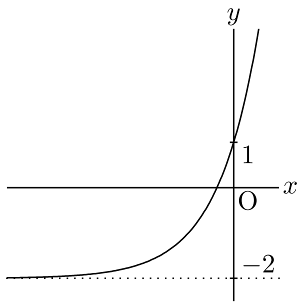
1	(1)		(2)		(3)		**2**		**3**							
4		**5**		**6**		**7**		**8**								
9	(a)		(b)		(c)		(d)		(e)		(f)		(g)		(h)	



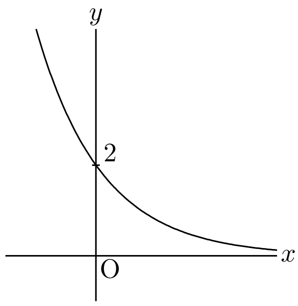
(1)



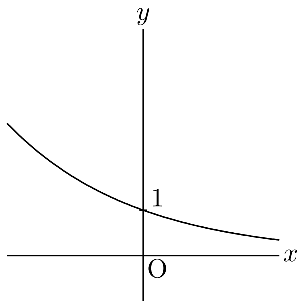
(2)



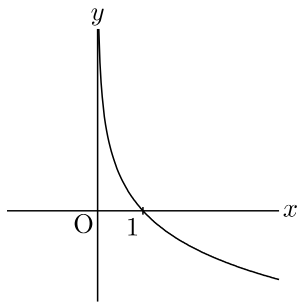
(3)



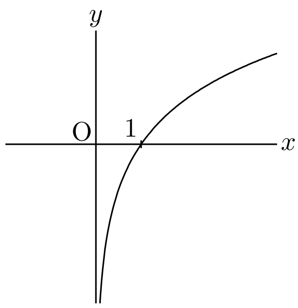
(4)



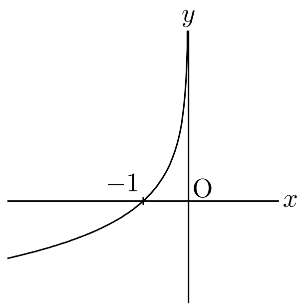
(5)



(6)



(7)

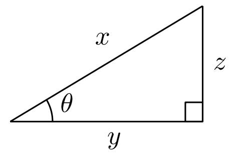


(8)

6) 三角関数

三角比

右のような直角三角形について， 角 θ の三角比を次のように定義する．



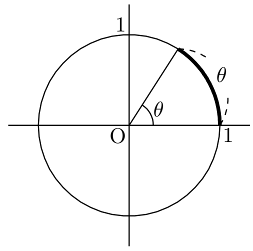
サイン (正弦) $\sin\theta = \dfrac{z}{x}$

コサイン (余弦) $\cos\theta = \dfrac{y}{x}$

タンジェント (正接) $\tan\theta = \dfrac{z}{y}$

特に，次の関係式が成り立つ： $x\cos\theta = y,\ x\sin\theta = z,\ y\tan\theta = z$

弧度法



単位円の円周上に長さ θ の円弧をとるとき，この円弧がなす扇形の中心角を θ ラジアンと定める．すなわち $360° = 2\pi$(ラジアン),$180° = \pi$(ラジアン) である．以下，角度は主にラジアンで表す．

例題 [1]

次の角を，度数はラジアンに，ラジアンは度数に直せ．

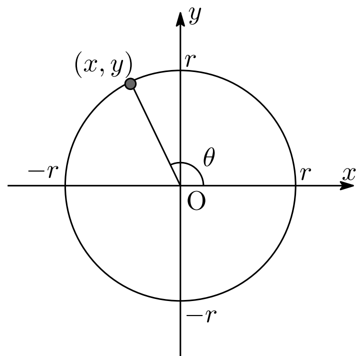
(1) $30°$ (2) $45°$ (3) $60°$ (4) $\frac{3}{2}\pi$ (5) $\frac{3}{4}\pi$ (6) $\frac{7}{6}\pi$

解答例：(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $270°$ (5) $135°$ (6) $210°$

一般角と三角関数

原点中心，半径 r の円について，x 軸の正の部分を**始線**， 始線を原点中心反時計回りに θ だけ回転させた半直線を**動径**という． 動径と始線のなす角に対し，動径が正または負の方向に何周もしている状況を想定し，$\theta = \alpha + 2n\pi$ (n は整数) の形で表される角を**一般角**という．

動径と円の交点の座標を (x, y) とするとき
一般角 θ に対する $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ を次のように定義する．

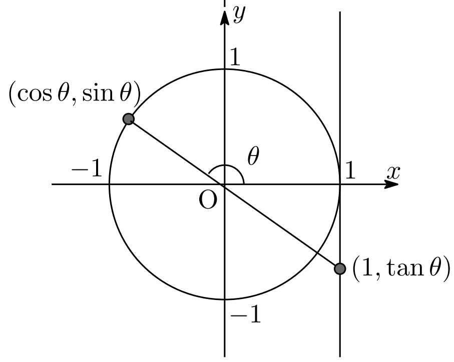


サイン (正弦) $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

コサイン (余弦) $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

タンジェント (正接) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

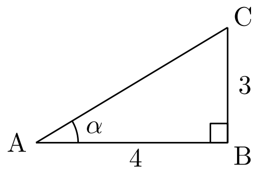
このとき，$y = \sin\theta,\ y = \cos\theta,\ y = \tan\theta$ などは θ を変数にもつ関数であり， **三角関数**と呼ばれる．



また， 原点中心の単位円 (半径 1 の円) を考えたとき，
動径と単位円との交点の座標が $(\cos\theta, \sin\theta)$ になる．
直線 $x = 1$ と動径を延長して得られる直線の
交点の座標が $(1, \tan\theta)$ になる．

例題 [2]

AB$=4$，BC$=3$，$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ の直角三角形 ABC において，
$\angle\mathrm{CAB}=\alpha$ とするとき，$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ の値を求めよ．
また，三角関数表 (章末) を使って，α が約何度か求めよ．



解答例：三平方の定理 $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2$ より $4^2+3^2=\mathrm{AC}^2$ だから，AC$=5$ である．
$\sin\alpha=\dfrac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CA}}=\dfrac{4}{5}$, $\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{3}{4}$.
$\sin\alpha=0.6$ に最も近い値を三角関数表で探すと，$\sin 37^\circ=0.6018$ より α は約 37° である．

三角関数の性質

三角関数 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ について， 次の等式が成り立つ．

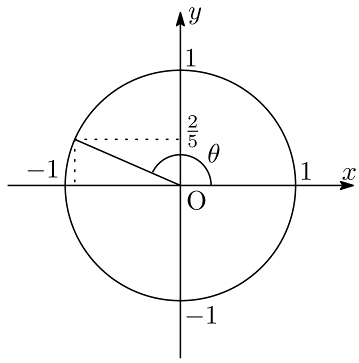
$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,\quad \cos(-\theta)=\cos\theta,\quad \tan(-\theta)=-\tan\theta$$

例題 [3]

θ が第 2 象限の角で $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ．

解答例：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\cos^2\theta=1-\dfrac{4}{25}=\dfrac{21}{25}$.
θ は第 2 象限の角だから $\cos\theta<0$ より，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ となる．
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，$\tan\theta=\dfrac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}}=-\dfrac{2}{\sqrt{21}}$ となる．

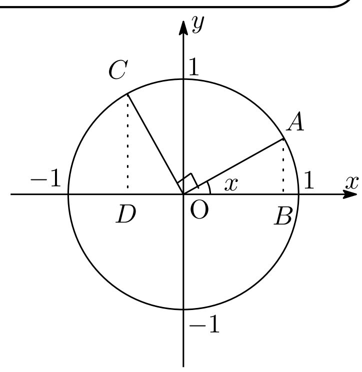


例題 [4]

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right), \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right), \tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ を $\sin x, \cos x, \tan x$ を用いて表せ．

解答例：右図において $\triangle$OAB と $\triangle$COD は合同なので
$\mathrm{CD}=\mathrm{OB}=\cos x$. よって，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{CD}=\cos x$.
また，$\mathrm{OD}=\mathrm{AB}=\sin x$ により $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{OD}=-\sin x$.

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-\frac{1}{\tan x}.$$



加法定理

任意の角 α, β について， 次の等式が成り立つ．

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

例題 [5]

加法定理を使って，$\sin\dfrac{5\pi}{12}$，$\cos\dfrac{5\pi}{12}$，$\tan\dfrac{5\pi}{12}$ の値を求めよ．

解答例：

$\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ だから，

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = 2+\sqrt{3}.$$

したがって，$\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，$\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.

倍角公式・半角公式

加法定理において $\beta = \alpha$ とおくと，任意の角 α について， 次の等式が成り立つ．

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

例題 [6]

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\cos\alpha = \frac{3}{4}$ のとき $\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ を求めよ．

解答例：$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\sin\alpha > 0$ だから，$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 3\sqrt{7}$

積から和の公式・和から積の公式

任意の角 α, β について， 次の等式が成り立つ (右辺に加法定理を適用すれば左辺になる)．

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}, \quad \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}, \quad \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

上の式で，$A=\alpha+\beta$, $B=\alpha-\beta$ とおくことにより次の等式が得られる．

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\qquad \sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\qquad \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

例題 [7]

(1) $\sin 5\theta\cos 3\theta$ を三角関数の和の形に書き直せ．
(2) $\cos 4\theta+\cos 6\theta$ を三角関数の積の形に書き直せ．

解答例：(1) $\sin 5\theta\cos 3\theta=\frac{1}{2}\{\sin(5\theta+3\theta)+\sin(5\theta-3\theta)\}=\frac{1}{2}\sin 8\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$

(2) $\cos 4\theta+\cos 6\theta=2\cos\dfrac{4\theta+6\theta}{2}\cos\dfrac{4\theta-6\theta}{2}=2\cos 5\theta\cos\theta$

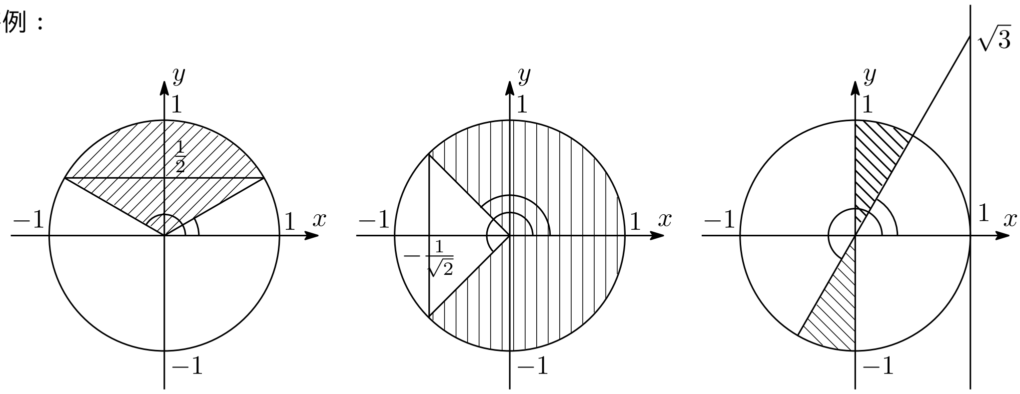
例題 [8]

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け．

(1) $\sin x=\dfrac{1}{2}$　(2) $\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $\tan x=\sqrt{3}$

(4) $\sin x>\dfrac{1}{2}$　(5) $\cos x\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(6) $\tan x\geqq\sqrt{3}$

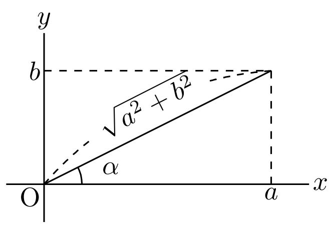
解答例：



(1) $x=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$　(2) $x=\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$　(3) $x=\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$

(4) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}$　(5) $0\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}\leqq x<2\pi$　(6) $\dfrac{\pi}{3}\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{4\pi}{3}\leqq x<\dfrac{3\pi}{2}$

三角関数の合成



右図のような a, b と角 α の関係があるとき，次の等式が成り立つ．

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$$

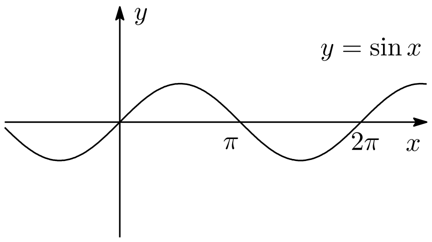
実際，$\sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha$ と，図より $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ だから両辺は等しい．左辺から右辺の形に変形することを三角関数の合成という．

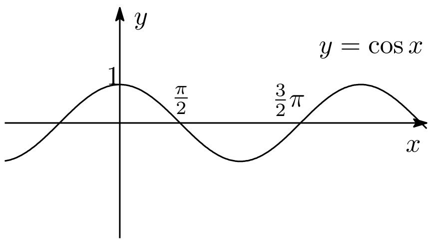
例題 [9]

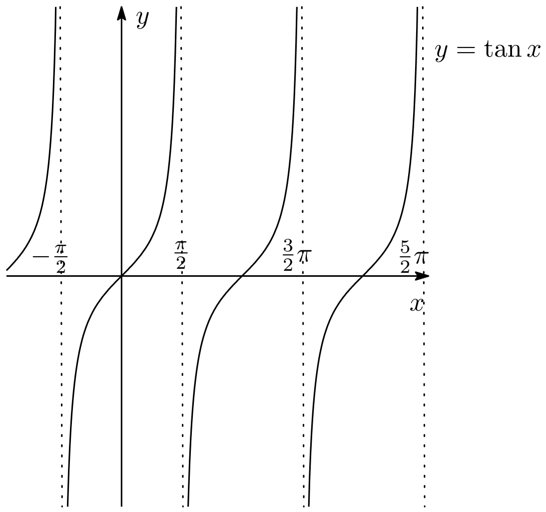
$\sin x+\sqrt{3}\cos x$ を $r\ \sin(x+\alpha)$ $(r>0,\ 0\leqq\alpha<2\pi)$ の形に変形せよ．

解答例：$r=\sqrt{1+3}=2$ だから $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる角 α は $\alpha=\frac{\pi}{3}$ であるから，$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ となる．

三角関数のグラフ







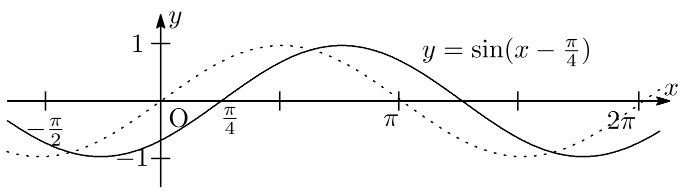
これらを基本に，平行移動，x 軸，y 軸方向への拡大・縮小を利用して様々な三角関数のグラフをかくことができる.

例題 [10]

次の三角関数のグラフをかけ.

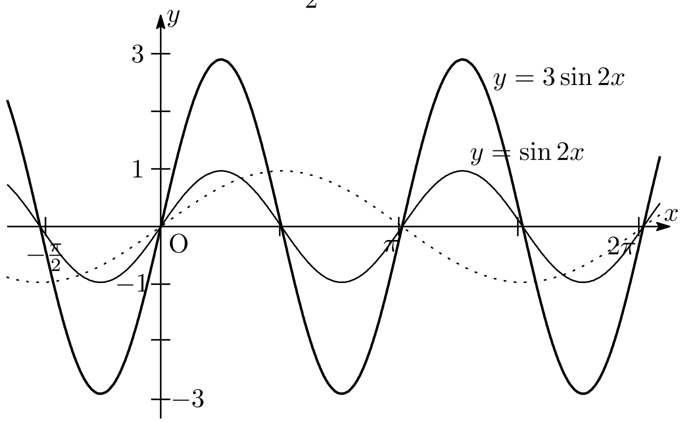
(1) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$　　(2) $y = \sin 2x$　　(3) $y = 3\sin 2x$

解答例：(1) $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ 平行移動して次が得られる.



(2) $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小して次が得られる.

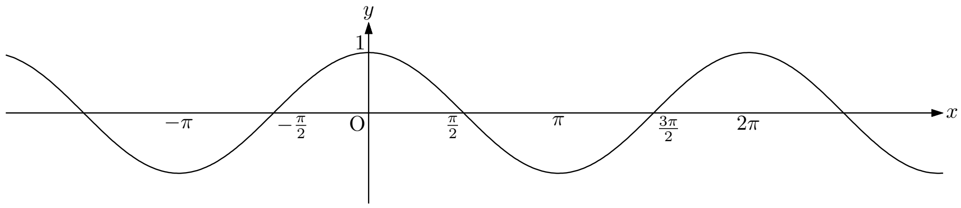
(3) $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小，y 軸方向に 3 倍に拡大して次が得られる.



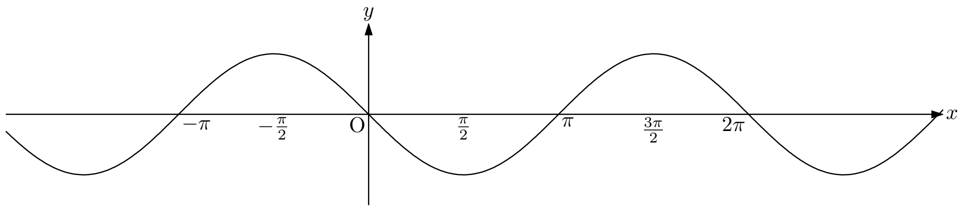
例題 [11]

$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向にそれぞれ
(1) $-\frac{\pi}{2}$　(2) $-\pi$　(3) $-\frac{3\pi}{2}$　(4) -2π　(5) $\frac{\pi}{2}$
平行移動した関数を求め，そのグラフを描け．また，それは $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$ のどれと一致しているか考えよ．

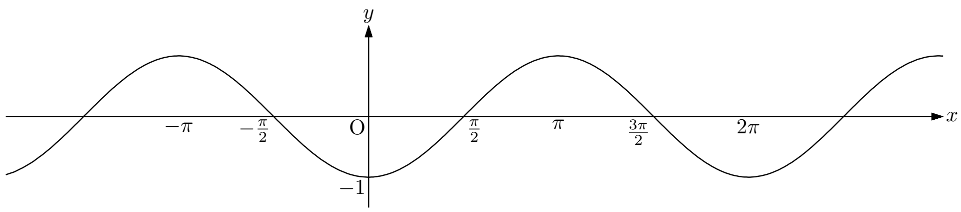
解答例：(1) $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ であり，グラフは以下の通り．$y=\cos x$ に一致．



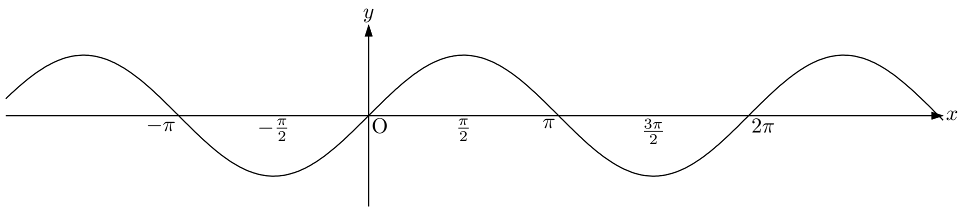
(2) $y=\sin(x+\pi)$ であり，グラフは以下の通り．$y=-\sin x$ に一致．



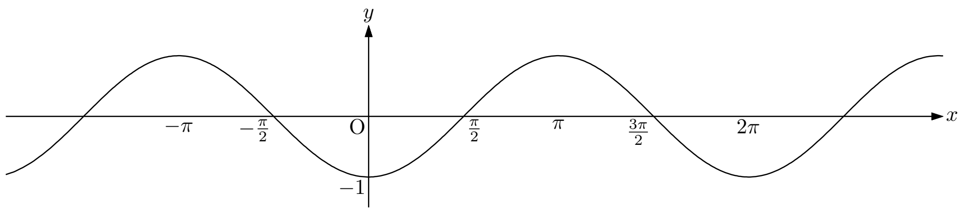
(3) $y=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$ であり，グラフは以下の通り．$y=-\cos x$ に一致．



(4) $y=\sin(x+2\pi)$ であり，グラフは以下の通り．$y=\sin x$ に一致．



(5) $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ であり，グラフは以下の通り．$y=-\cos x$ に一致．

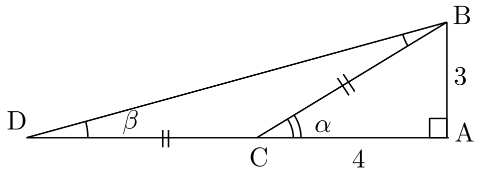


三角関数表

角	sin	cos	tan	角	sin	cos	tan
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	なし

確認問題 6

1 図において， AB= 3, AC= 4, ∠BAC=90°, BC=CD, ∠BCA $=\alpha$, ∠BDA $=\beta$ とする．



このとき $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\boxed{}}}$ となる．

2 θ が第 2 象限の角で $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{\boxed{}}}{4}$

3 α が鈍角，β が第 3 象限の角で $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta = -\dfrac{12}{13}$ であるとき，

$\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\boxed{}}{65}$

4 $\cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{5\pi}{9} + \cos\dfrac{7\pi}{9} = \boxed{}$

5 $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos x \geqq -\dfrac{1}{2}$ を解くと

$0 \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{\boxed{}\pi}{3} \leqq x < 2\pi$

6 次の式を $r\sin(x+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi < \alpha \leqq \pi$ とする．

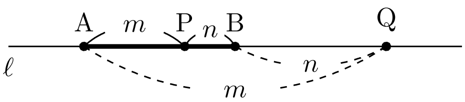
$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{\boxed{}}\right)$

1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**	

7）平面上の図形

内分点・外分点

直線 ℓ 上に 2 点 A, B をとる．直線 ℓ 上の点 X で AX : BX $= m : n$ を満たす点は 2 点あり，そのうち線分 AB 上にあるものを点 P，外側にあるものを点 Q とおく．このとき点 P を線分 AB の**内分点**，点 Q を線分 AB の**外分点**とよぶ．



数直線上の 2 点 A(a) と B(b) に対し，2 点間の距離を AB で表すと AB$= |b-a|$ となる．また，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P(x) は $x = \dfrac{mb+na}{m+n}$, $m : n$ に外分する点 Q(x) は $x = \dfrac{mb-na}{m-n}$ となる．特に $1 : 1$ に内分する点 R(x) を AB の**中点**といい，$x = \dfrac{a+b}{2}$ となる．

平面上の 2 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) に対し，2 点間の距離 AB は AB$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ で与えられる（三平方の定理から導かれる）．また，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P は $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$，$m : n$ に外分する点 Q は $\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}, \dfrac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$，中点 R は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ で表される．

例題 [1]

平面上の二点 A$(-2, 4)$, B$(4, 1)$ に対して次の問に答えよ．
(1) 点 A と点 B の距離 AB を求めよ．
(2) 線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 P を求めよ．
(3) 線分 AB の 中点 R を求めよ．
(4) 線分 AB を $3 : 1$ に外分する点 Q を求めよ．

解答例:(1) PQ$= \sqrt{\{4-(-2)\}^2+(1-4)^2} = 3\sqrt{5}$ (2) $\left(\dfrac{2\cdot 4+1\cdot(-2)}{2+1}, \dfrac{2\cdot 1+1\cdot 4}{2+1}\right) = (2, 2)$ より P$(2, 2)$ (3) $\left(\dfrac{(-2)+4}{2}, \dfrac{4+1}{2}\right) = \left(1, \dfrac{5}{2}\right)$ より R$\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$
(4) $\left(\dfrac{3\cdot 4-1\cdot(-2)}{3-1}, \dfrac{3\cdot 1-1\cdot 4}{3-1}\right) = \left(7, -\dfrac{1}{2}\right)$ より Q$\left(7, -\dfrac{1}{2}\right)$.

直線の方程式

a と b の少なくとも一方が 0 でないとき，$ax+by+c=0$ を満たす点 (x, y) の集合は直線をなす (直線の方程式)．この方程式は，$b \neq 0$ のとき $y = mx+n$, $b = 0$ のとき $x = k$ の形で表せる．

$$ax+by+c=0 \iff y = mx+n \text{ または } x = k$$

ここで $y = mx+n$ は傾き m で y 切片 n の直線を表し，$x = k$ は y 軸に平行な直線である．

さらに，傾き m で点 (x_1, y_1) を通る直線は $y - y_1 = m(x-x_1)$ と表される．また 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の方程式は，$x_1 \neq x_2$ のとき $y - y_1 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ と表され，$x_1 = x_2$ のとき $x = x_1$ と表される．

直線 $\ell_1\colon y=mx+n$ と直線 $\ell_2\colon y=px+q$ について，“ℓ_1, ℓ_2 が平行 $\Leftrightarrow$ $m=p$” および “ℓ_1, ℓ_2 が垂直 $\Leftrightarrow$ $mp=-1$” が成立する．また，$x=k$ で表される直線に平行な直線は $x=p$, 垂直な直線は $y=q$ で表される．

例題 [2]

次の直線の方程式を求めよ．
(1) 点 $(3,1)$ を通り， 傾きが -3 である直線．
(2) 2 点 $(-2,2)$, $(4,-1)$ を通る直線．
(3) 2 点 $(3,-1)$, $(3,3)$ を通る直線．
(4) 点 $(-2,4)$ を通り， 直線 $3x+2y-2=0$ に平行な直線．
(5) 点 $(1,4)$ を通り， 直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ に垂直な直線．

解答例： (1) $y-1=-3(x-3)$ より， $y=-3x+10$. (2) 傾きは $\dfrac{-1-2}{4-(-2)}=-\dfrac{1}{2}$. よって求める直線の方程式は $y-2=-\dfrac{1}{2}(x+2)$ より $y=-\dfrac{1}{2}x+1$. (3) 2 点の x 座標が一致しているので， 求める直線の方程式は $x=3$. (4) 平行な 2 直線の傾きは等しい． また $3x+2y-2=0 \Longleftrightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+1$ より， 求める直線の傾きは $-\dfrac{3}{2}$. よって求める直線は $y-4=-\dfrac{3}{2}(x+2)$ より $y=-\dfrac{3}{2}x+1$. (5) 垂直な 2 直線の傾きの積は -1 となるから， 求める直線の傾きを m とすると $-\dfrac{1}{2}\cdot m=-1$. よって $m=2$ となり， 求める直線は $y-4=2(x-1)$ より $y=2x+2$.

円の方程式

中心が (x_1,y_1) で半径 r の円の方程式は，標準形 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$ で与えられる．一般に $x^2+y^2+ax+by+c=0$ の形の式は円の方程式の標準形に変形することができる．中心が原点の円の方程式は $x^2+y^2=r^2$ で与えられる．

例題 [3]

(1) 中心 $(-2,5)$ で， 半径 3 の円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ の形で表せ．
(2) 円 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ の中心と半径をそれぞれ求めよ．
(3) 中心が $(2,4)$ で点 $(1,1)$ を通る円の方程式を求めよ．
(4) 3 点 $A(0,3)$, $B(1,6)$, $C(2,-1)$ を通る円の方程式を求めよ．
(5) 直線 $y=2x+k$ が円 $C\colon x^2+y^2=4$ の接線であるとき k の値を求めよ．

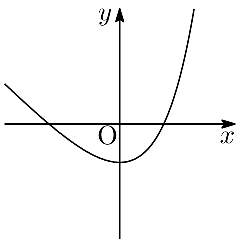
解答例： (1) 中心 $(-2,5)$ で半径 3 の円の方程式は $(x+2)^2+(y-5)^2=3^2$ で表せる．この式を展開して $x^2+y^2+4x-10y+20=0$. (2) $x^2+y^2-2x+4y+1=0 \Longleftrightarrow (x^2-2x+1-1)+(y^2+4y+4-4)+1=0 \Longleftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=2^2$. よって中心 $(1,-2)$, 半径 2. (3) 求める円の半径は $\sqrt{(2-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$. よって求める円の方程式は $(x-2)^2+(y-4)^2=10$. (4) 求める円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおく．これが 3 点 $A(0,3)$, $B(1,6)$, $C(2,-1)$ を通るから代入して，$3b+c+9=0\cdots$①, $a+6b+c+37=0\cdots$②, $2a-b+c+5=0\cdots$③. ② − ① より $a+3b+28=0\cdots$④. また ② − ③ より $-a+7b+32=0\cdots$⑤. ④, ⑤ より，$b=-6$, $a=-10$. このとき $c=9$. よって求める円の方程式は $x^2+y^2-10x-6y+9=0$. [別解] 線分 AB の垂直二等分線と線分 AC の垂直二等分線が円の中心となることを用いる．2 つの垂直

二等分線は $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{14}{3}$, $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$. この 2 直線の交点は $(5,3)$. よって中心は $(5,3)$. 半径は中心と A の距離だから 5. よって求める円の方程式は $(x-5)^2+(y-3)^2=25$.　(5) $y=2x+k$ を $x^2+y^2=4$ に代入して，$x^2+(2x+k)^2=4$. つまり $5x^2+4kx+k^2-4=0$. この二次方程式の判別式が 0 になればよいので $\left(16k^2-4\cdot 5(k^2-4)=0 \iff\right) 4k^2-5(k^2-4)=0 \iff k^2=20$ $\therefore k=\pm 2\sqrt{5}$

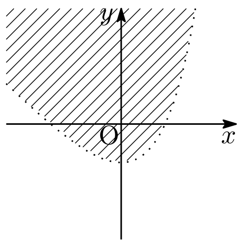
不等式と領域

変数 x, y に関する不等式は，それを満たす平面の点 (x,y) からなる領域とみなすことができる．不等式 $y>f(x)$ の表す領域は，関数 $y=f(x)$ のグラフより上側の部分であり，不等式 $y<f(x)$ の表す領域は，関数 $y=f(x)$ のグラフより下側の部分である．この場合，$y=f(x)$ のグラフ上の点は含まない．不等式 $y \geqq f(x)$ や $y \leqq f(x)$ はグラフ上の点も含む．

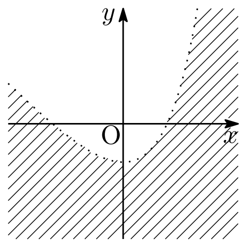
$y=f(x)$ のグラフ



領域 $y>f(x)$

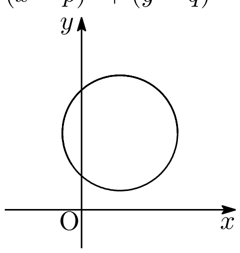


領域 $y<f(x)$

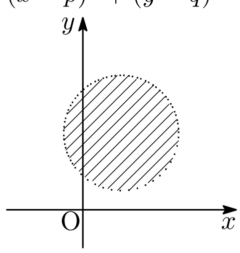


円 C: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ に対し，$(x-p)^2+(y-q)^2<r^2$ は C の内部，$(x-p)^2+(y-q)^2>r^2$ は C の外部の領域を表す．

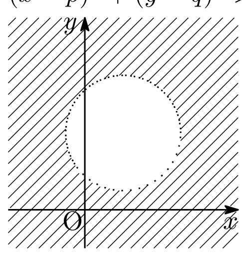
$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$



$(x-p)^2+(y-q)^2<r^2$

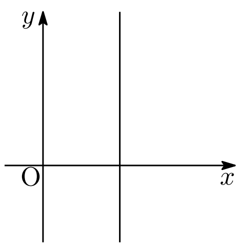


$(x-p)^2+(y-q)^2>r^2$

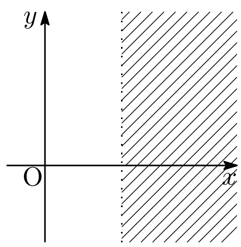


直線 $x=k$ に対し，$x>k$ は直線の右側，$x<k$ は直線の左側の領域を表す．

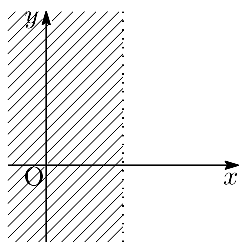
$x=k$



$x>k$



$x<k$

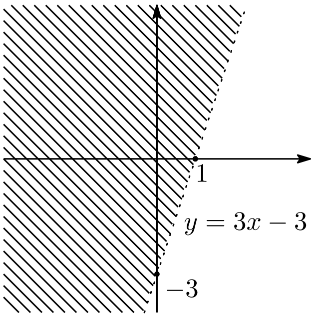


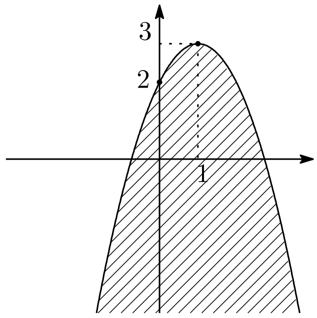
例題 [4]

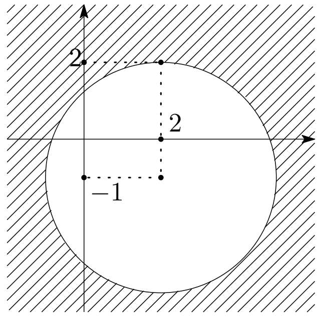
次の不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $y>3x-3$　　(2) $y \leqq -x^2+2x+2$　　(3) $x^2+y^2-4x+2y-4 \geqq 0$

解答例: (1) 直線 $y=3x-3$ の上側 (下図左)．境界を含まない． (2) 2 次関数 $y=-(x-1)^2+3$ の下側 (下図中)．境界を含む． (3) 円 $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$ の外側 (下図右)．境界を含む．

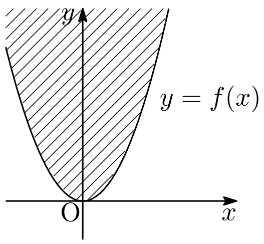




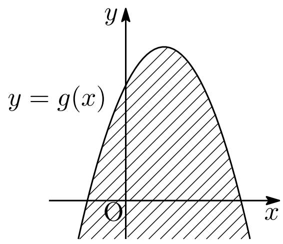


連立不等式の表す領域は，それぞれの不等式の表す領域の共通部分に等しい．

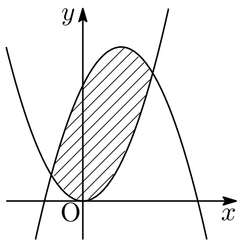
$y \geqq f(x)$



$y \leqq g(x)$



$f(x) \leqq y \leqq g(x)$



例題 [5]

次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

(1) $x^2 \leqq y \leqq x$

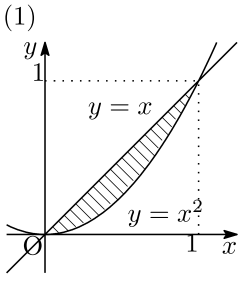
(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq y \leqq \sin x$

(3) $x^2+y^2<1,\ y>x$

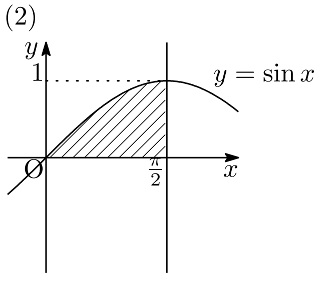
注． $A<B<C$ は連立不等式 $A<B,\ B<C$ と同じ．

解答例: (1) $y=x^2$ の上側かつ $y=x$ の下側 (下図左)．境界を含む． (2) $y=0$ の上側，$y=\sin x$ の下側，$x=0$ の右側，$x=\frac{\pi}{2}$ の左側 (下図中)．境界を含む． (3) 円 $x^2+y^2=1$ の内側，直線 $y=x$ の上側 (下図右)．境界を含まない．

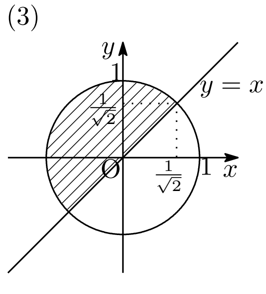
(1)



(2)



(3)



確認問題 7

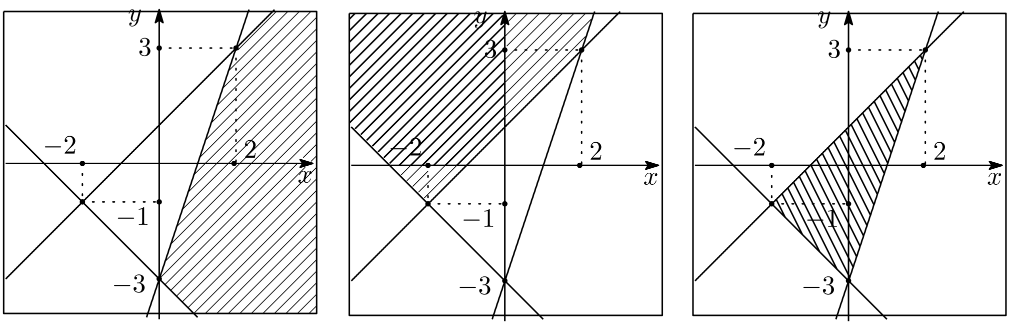
1 平面上の二点 $P(-3,6)$, $Q(2,3)$ に対して

線分 PQ を $3:1$ に内分する点 $A=\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{\boxed{}}{4}\right)$

2 点 $(-2,2)$ を通り，直線 $2x+3y-6=0$ に垂直な直線は $\boxed{}x-2y+10=0$

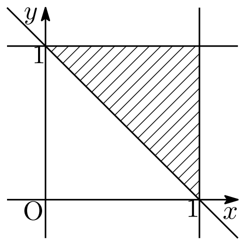
3 3 点 $(-1,-1)$, $(1,5)$, $(3,1)$ を通る円の半径は $\sqrt{\boxed{}}$

4 連立不等式，$y \leqq x+1$, $y \geqq -x-3$, $y \geqq 3x-3$ の表す領域を U とする．
領域 U を次の (1),(2),(3) から選ぶと $\boxed{}$.



(1) (2) (3)

5 下図の領域を表す連立不等式を次の (1)〜(6) から選ぶと $\boxed{}$.



(1) $0 \leqq x \leqq 1,\ y \leqq -x+1,\ y \leqq 1$
(2) $0 \leqq x \leqq 1,\ y \leqq -x+1,\ 1 \leqq y$
(3) $0 \leqq x \leqq 1,\ -x+1 \leqq y \leqq 1$
(4) $0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq -x+1$
(5) $0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq 1$
(6) $0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq x$

1		**2**		**3**		**4**		**5**	

8）個数の処理

場合の数

ある事柄において， 起こりうるすべての場合を数えるとき， その総数を**場合の数**という.

和の法則

同時に起こらない事柄 A, B について，A の起こり方が m 通り，B の起こり方が n 通りあるとき，A または B の起こる場合の数は $m+n$ 通りある．3 つ以上の事柄についても同様.

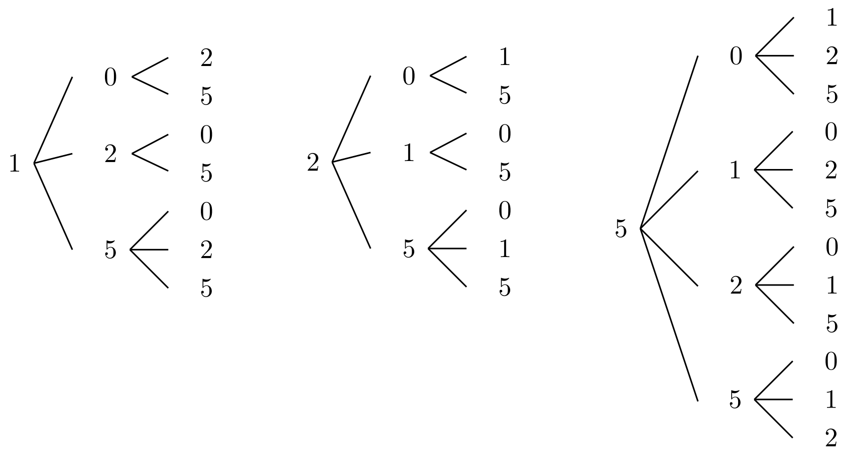
また，A の起こり方が m 通り，A 以外が起こる場合が $\bar{m}$ 通り，全体として起こる場合の数を N とすると，和の法則より $m+\bar{m}=N$ である．よって，A 以外が起こる場合の数は $\bar{m}=N-m$ で求められる.

例題 [1]

5 つの数字 $0, 1, 2, 5, 5$ を並べて出来る次の数は何通りあるか答えよ.

(1) 3 桁の偶数　　(2) 3 桁の奇数　　(3) 3 桁の 5 の倍数

解答例：樹形図により調べる (0 から始まる数は 2 桁の数になる).



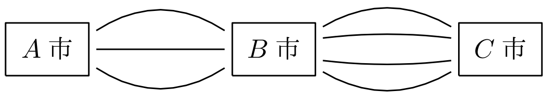
(1) 1 桁目が 0 または 2 になる場合である．樹形図より 1 桁目が 0 になるのは 7 通り，2 になるのは 5 通り．よって，和の法則により 12 通り．　(2) 3 桁の数全体のうち，偶数でない場合である．樹形図より 3 桁の数全体は 26 通りあるから，$26-12=14$ 通り．(3) 1 桁目が 0 または 5 になる場合である．樹形図より 1 桁目が 0 になるのは 7 通り，5 になるのは 9 通り．よって，和の法則により 16 通り.

積の法則

事柄 A の起こり方が m 通り， その各々に対して事柄 B が n 通りずつ起こるとき，A, B がともに起こる場合の数は $m \times n$ 通りある．3 つ以上の事柄についても同様.

例題 [2]

次の図のように A 市から B 市へ行くのに 3 つの道が， B 市から C 市へ行くのに 4 つの道がある．このとき次の問に答えよ．



(1) A 市から C 市へ行き， また A 市まで戻る道は何通りあるか答えよ．
(2) A 市から C 市へ行き， 同じ道を通らずに A 市まで戻る方法は何通りあるか答えよ．

解答例：(1) 積の法則により $3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$ 通り． (2) 積の法則により $3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$ 通り．

例題 [3]

次の約数の個数を求めよ．
(1) $2^4 \cdot 3^2$ の約数の個数．
(2) 600 の約数の個数．
(3) 600 の約数で偶数の個数．

解答例：(1) 約数は $2^a \cdot 3^b$ $(a = 0, 1, 2, 3, 4,\ b = 0, 1, 2)$ と表せる．a が 5 通り，b が 3 通りあるから，積の法則により約数は $5 \times 3 = 15$ 個． (2) $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ により約数は $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ $(a = 0, 1, 2, 3,\ b = 0, 1,\ c = 0, 1, 2)$ と表せる．よって，積の法則により約数は $4 \times 2 \times 3 = 24$ 個． (3) 偶数の約数は $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ $(a = 1, 2, 3,\ b = 0, 1,\ c = 0, 1, 2)$ と表せる．よって，積の法則により約数は $3 \times 2 \times 3 = 18$ 個．

順列

いくつかのものに順序をつけて 1 列に並べたものを**順列**という．異なる n 個のものから異なる r 個を選び， 1 列に並べる並べ方を **n 個から r 個をとる順列**といい，その総数を ${}_n\mathbf{P}_r$ と表す．

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\ \text{個の積}} $$

${}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ を n の**階乗**といい， $\boldsymbol{n!}$ と表す．

$$ n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 $$

$0! = 1$ と定義することにより， 0 以上 n 以下の整数 r に対して順列の総数は次のように表せる．

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

重複順列

異なる n 個のものから繰り返しとることを許して r 個を取り出し並べる順列を **n 個から r 個をとる重複順列**といい， その総数は n^r である．

例題 [4]

次を満たす数は何通りあるか答えよ．

(1)　$1, 2, 3, 4, 5$ から異なる 3 個を取り出してできる 3 桁の数．

(2)　同じ数を何回使っても良いので，$1, 2, 3, 4, 5$ の中の数を並べてできる 3 桁の数．

解答例：(1)　${}_5\mathrm{P}_3 = 60$ 通り．　(2)　$5^3 = 125$ 通り．

組合せ

異なる n 個のものから異なる r 個の選び方を **n 個から r 個をとる組合せ**といい，その総数を ${}_n\mathbf{C}_r$ と表す．

$$
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個の積}}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}
$$

また，次の式が成り立つ．

$$
{}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}\ (0 \leqq r \leqq n), \quad {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r\ (1 \leqq r \leqq n-1)
$$

例題 [5]

4 種類の果物 (いちご，なし，りんご，みかん) がある．ここから 3 つの果物を選ぶ．次のような選び方は何通りあるかを答えよ．

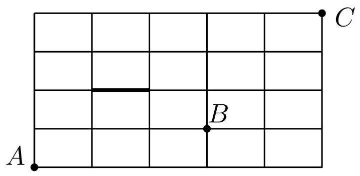
(1)　重複なく 3 つの果物を選ぶ方法．

(2)　重複なく 3 つの果物を選び，食べる順番まで決める方法．

解答例：(1)　${}_4\mathrm{C}_3 = 4$ 通り　(2)　${}_4\mathrm{P}_3 = 24$ 通り

例題 [6]

次の図において最短距離で移動する道が何通りあるかを答えよ．



(1)　A から C まで移動する道は何通りあるか．

(2)　A から C へ，太線の道を通って移動する道は何通りあるか．

(3)　A から B を通らずに C へ移動する道は何通りあるか．

解答例：(1)　9 回の移動のうち右に移動する 5 回を選べば良いので ${}_9\mathrm{C}_5 = 126$ 通り．　(2)　A から太線の左端まで移動する道が ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 通り，太線の右端から C まで移動する道が ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りあるから，積の法則により $3 \times 10 = 30$ 通り．　(3)　全体から B を通る道を引けば良いので，$126 - {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 86$ 通り．

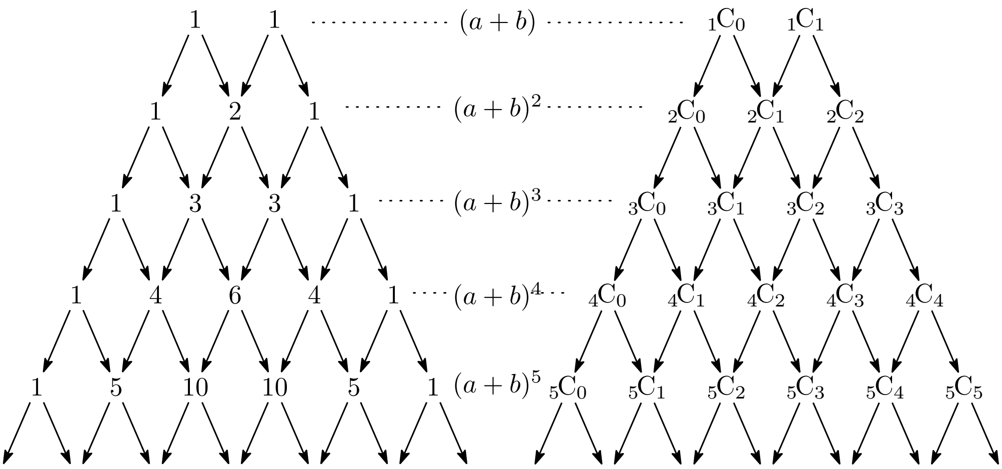
二項定理

$(a+b)^n$ を展開したとき，$a^{n-k}b^k$ の項を考えるとき $\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{ 個の積}}$ のうち，b を選ぶ

方法が ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りなので， $a^{n-k}b^k$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_k$ になる．よって，次が得られる．

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n.$$

二項定理で得られる展開式の各項の係数を**二項係数**という．二項係数を求めるには下図を用いるのが便利である．この図は**パスカルの三角形**と呼ばれ，前述の公式 ${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ を図式化したものである．



例題 [7]

次の問に答えよ．

(1) $(a+b)^6$ を展開せよ．

(2) $(2x-1)^4$ を展開せよ．

(3) $(3x+2y)^{10}$ の展開式において， $x^{10-k}y^k$ の係数を求めよ．

解答例：(1) $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

(2) $(2x)^4 + 4(2x)^3(-1) + 6(2x)^2(-1)^2 + 4(2x)(-1)^3 + (-1)^4 = 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$.

(3) 第 k 項は ${}_{10}\mathrm{C}_k(3x)^{10-k}(2y)^k$ と表せるので， 係数は ${}_{10}\mathrm{C}_k 3^{10-k}2^k$.

確認問題 8

1 6 つの数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 を並べて出来る次の数は何通りあるか答えよ．

(1) 2 桁の数で各位の数の和が奇数 $\boxed{}$ 通り

(2) 3 桁の数 $\boxed{}$ 通り

(3) 3 桁の数で各位の数の積が偶数 $\boxed{}$ 通り

2 質問が 5 項目あるアンケートでそれぞれの項目に○，△，×で答えるとき，○，△，×のつけ方は全部で $\boxed{}$ 通りある．

3 ${}_7\mathrm{C}_5 = \boxed{}$

4 男子 5 人，女子 4 人から 3 人を選ぶとき，全部で $\boxed{}$ 通りの選び方がある．

5 男子 5 人，女子 4 人から 3 人を選ぶとき少なくとも男子が 1 人いるようにしたい．この選び方は $\boxed{}$ 通りある．

6 $\left(x^2 + \dfrac{2}{x}\right)^6 = x^{12} + 12x^9 + 60x^6 + 160x^3 + \boxed{} + \dfrac{192}{x^3} + \dfrac{64}{x^6}$

1	(1)		(2)		(3)		**2**		
3		**4**		**5**		**6**			

9）微分と積分

関数の極限

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，その近づき方によらず $f(x)$ の値が一定の値 β に近づくならば，
x が a に近づくとき $f(x)$ は β に**収束する**といい

$$\lim_{x\to a} f(x) = \beta \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \beta \ (x \to a)$$

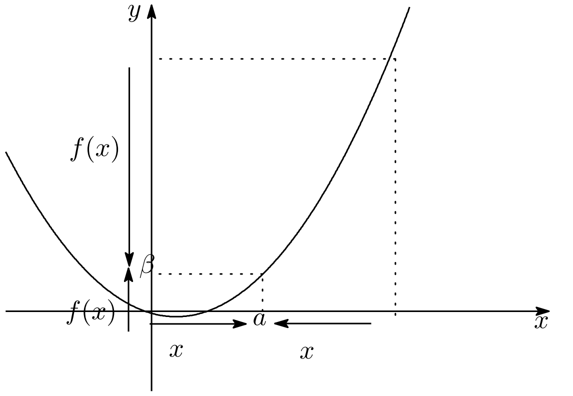
と表す．また，β のことを**極限値**という．

例えば

$$\lim_{x\to 3}(x^2+x-3) = 3^2+3-3 = 9$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$$



例題 [1]

次の極限を求めよ．　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

解答例：(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x-1} = \frac{2^2-3}{2-1} = 1.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x^2-x+1) = 3.$

微分係数と導関数

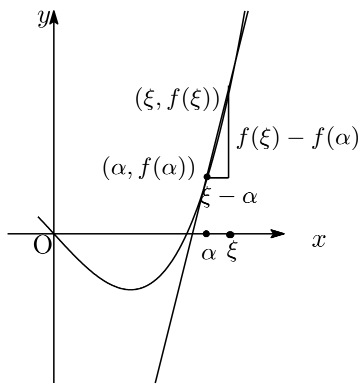
関数 $y = f(x)$ に対して $x = \alpha$ で微分可能であるとは次の極限が存在することである．

$$f'(\alpha) = \lim_{\xi\to\alpha}\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$$

この $f'(\alpha)$ を $x = \alpha$ における**微分係数**という．右の図のように $(\alpha, f(\alpha))$ と $(\xi, f(\xi))$ を結ぶ直線の傾きが $\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$ であるから, $\xi \to \alpha$ として得られる $f'(\alpha)$ は, ちょうど $(\alpha, f(\alpha))$ における**接線の傾き**を表している．

また $\Delta x = \xi - \alpha$ とおくことにより, 微分係数 $f'(\alpha)$ は次の式でも定義される．

$$f'(\alpha) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\alpha+\Delta x)-f(\alpha)}{\Delta x}$$



x の値にに対して微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を**導関数**といい, $f'(x), \dfrac{df(x)}{dx}, \dfrac{dy}{dx}$ などと記す．導関数を求めることを**微分**するという．

導関数は微分係数と同様に次の式で定義される．

$$f'(x) = \lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \quad \text{または} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

例題 [2]

$f(x) = x^2$ の導関数を定義を用いて求めよ.

解答例：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

導関数の公式

微分可能な関数 f, g と定数 c，正の整数 n について

(1) $(c)' = 0$ ， $(x^n)' = nx^{n-1}$

(2) $(cf)' = cf'$

(3) $(f+g)' = f' + g'$

例題 [3]

次の関数を微分せよ.

(1) $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 5$

(2) $y = \dfrac{3x^3 - 7x + 1}{2}$

(3) $y = at^2 + g$ （t を独立変数，a, g を定数とする.）

解答例：(1) $y' = 2(x^3)' + 5(x^2)' - 7(x)' + 5' = 6x^2 + 10x - 7$, (2) $y' = \dfrac{3(x^3)' - 7(x)' + 1'}{2} = \dfrac{9x^2 - 7}{2}$, (3) $y' = 2at$

関数の増減と導関数

$f(x)$ は開区間 $I = (a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ で微分可能とする．このとき，開区間 I のすべての x について

1) $f'(x) > 0$ ならば，$f(x)$ は I で単調に増加する.

2) $f'(x) < 0$ ならば，$f(x)$ は I で単調に減少する.

極値

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で**極大（極小）**になるとは $x = a$ の近くでは $x = a$ で最大（最小）になることである. このとき $f(a)$ を**極大値（極小値）**という. 極大値および極小値を**極値**という.

極値と微分

微分可能な関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で極値を持つならば $f'(a) = 0$ が成立する.

増減表

次のような関数 $y = f(x)$ の表を**増減表**という.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 ($f(\alpha)$ も可)	$\searrow$	極小 ($f(\beta)$ も可)	$\nearrow$

上の増減表より $x=\alpha$ で極大値 $f(\alpha)$、$x=\beta$ で極小値 $f(\beta)$ をとることが分かる。

例題 [4]

$y=2x^4-x^2$ の増減を調べ極値を求めよ.

解答例：$y'=8x^3-2x=2x(2x-1)(2x+1)$ より $x=0,\pm\frac{1}{2}$ で $y'=0$. 増減表を書くと以下のようになる.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$(極小)	$\nearrow$	0(極大)	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$(極小)	$\nearrow$

極小値 $-\frac{1}{8}$ $(x=\pm\frac{1}{2})$, 極大値 0 $(x=0)$

接線の方程式

$y=f(x)$ で $x=\alpha$ で微分可能であるとする. $y=f(x)$ のグラフで $(\alpha,f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$$

例題 [5]

曲線 $y=x^3+2x^2+x-1$ 上の点 $(1,3)$ における接線の方程式を求めよ.

解答例：$y'=3x^2+4x+1$ より $y'(1)=8$ したがって $(1,3)$ における接線の方程式は $y=8x-5$

不定積分

関数 $f(x)$ に対して $F'(x)=f(x)$ を満たす $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という. $f(x)$ のすべての原始関数は C を定数として $F(x)+C$ と表される. $F(x)+C$ を $f(x)$ の **不定積分**といい $\int f(x)dx=F(x)+C$ と記す.

不定積分の公式

関数 $f(x)$, $g(x)$ と定数 k, 自然数 n について

(1) $\int f(x)dx+\int g(x)dx=\int\{f(x)+g(x)\}dx$

(2) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

(3) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

(4) $\int dx=x+C$

例題 [6]

次の各不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (x^3 + 5x^2 - 3x - 7)dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 7x + 1}{5}dx$

(3) $\displaystyle\int (t^2 + at + 1)dt$ (a は定数)

解答例：(1) $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} - 7x + C$, (2) $\dfrac{x^3}{15} - \dfrac{7x^2}{10} + \dfrac{x}{5} + C$, (3) $\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{at^2}{2} + t + C$

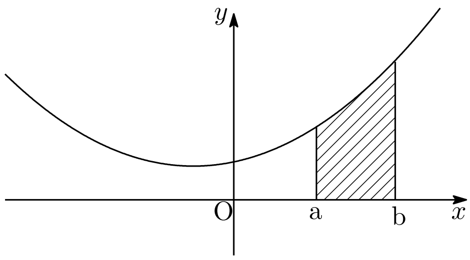
定積分

定積分は元々高校の数 III で学習するような区分求積法で与えられる．次の不定積分から定積分を求める式は定義ではなく公式として理解して欲しい.

関数 $y = f(x)$ を a から b まで**定積分**とは,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

$a < b$ であって $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のときは $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は右図の面積になる.



例題 [7]

次の各定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 3x + 5)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{x^3 - x + 1}{2}dx$

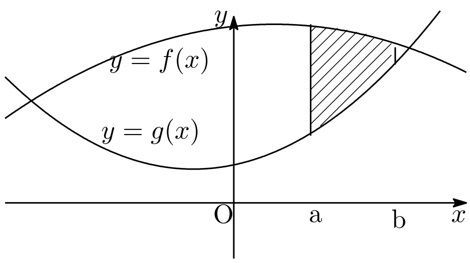
解答例：(1) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 3x + 5)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^1 + [5x]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 5 = \frac{41}{6}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{x^3 - x + 1}{2}dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_{-1}^3 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^3 + \left[\frac{x}{2}\right]_{-1}^3 = 10 - 2 + 2 = 10$

関数のグラフで囲まれる領域の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ では $f(x) \geqq g(x)$ とする．直線 $x = a$ と $x = b$ と曲線 $y = f(x)$ および曲線 $y = g(x)$ で囲まれる領域の面積は以下の式で与えられる.

$$\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$



例題 [8]

曲線 $y = x^2$ と曲線 $y = -x^2 + x + 1$ とで囲まれた領域の面積を求めよ.

解答例：共有点の x 座標を求めると $x = 1, -\dfrac{1}{2}$. $-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ で $x^2 \leqq -x^2 + x + 1$ であるので求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \{(-x^2 + x + 1) - x^2\}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (-2x^2 + x + 1)dx = \left[-\frac{2x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left[x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

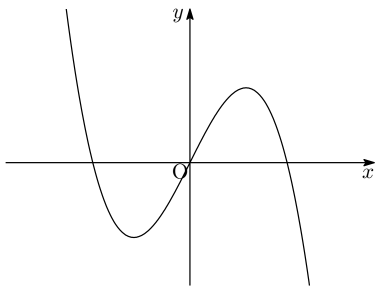
$$= -\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

確認問題 9

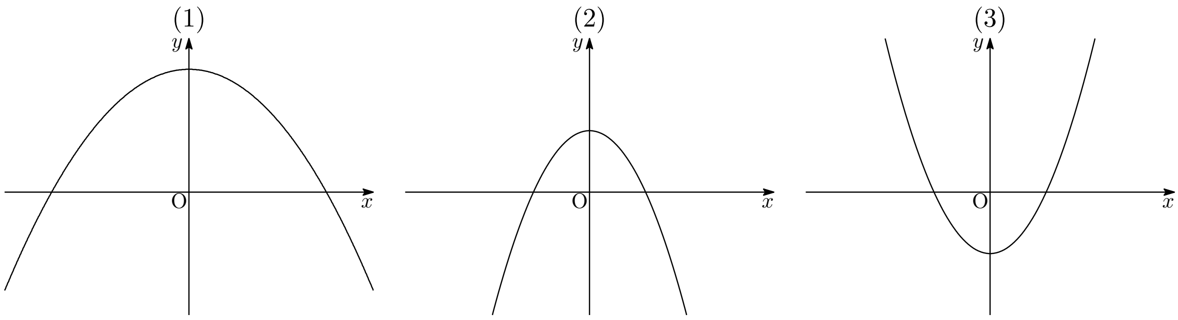
1 次は $f(x) = x^3$ の導関数を定義によって求めたものである．$\boxed{}$ に適切な値を入れよ．

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{}\,x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

2 次はある関数 $y = f(x)$ のグラフである。



この関数の導関数のグラフを次から選ぶと $\boxed{}$ である．ただしグラフの縮尺はすべて同一とする．



3 $\{(x-2)^3\}'$ の x^2 の項の係数は $\boxed{}$ である．

4 $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x$ は $x = \boxed{}$ で極大値をとる．

5 $\displaystyle\int_1^3 (x^3 - 3x^2 + x)dx = \boxed{}$

6 $y = x^3 + x - 1$ と $y = 5x - 1$ とで囲まれた領域の面積は $\boxed{}$ である．

1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**	