

計算論理

塚田 真

平成 13 年度

1 論理とは

論理とは、幾つかの事実や規則から、正しい結論を導くための道具である。論理の例を挙げよう。

「先生の乗った総武線が遅れて、先生が津田沼駅でタクシーに乗らなければ、先生は授業に遅れる。先生の乗った総武線は遅れた。先生は授業に遅れなかった。」

これらの事実を組み合わせて

「先生は津田沼駅でタクシーに乗った。」

という結論を導くことができる。もう一つ別の例を考えてみる。

「A君が授業に出席して、Aくんは授業を聞いていなければ、A君は先生に叱られる。A君は授業に出席していた。A君は先生に叱られなかった。」

これらの事実を組み合わせて

「A君は授業を聞いていた。」

という結論を導くことができる。どうして、このような結論を導けるのであろうか？コンピュータにこのような結論を導けるようにするには、プログラムを作らなければならない。プログラムを作るには、論理のしくみを解明することが必要となる。

上の2つの例は、よく見ると同じ構造をしている。

「 P であり、 Q でなければ、 R である。 P でなかった。 R でなかった。」

とういことから

「 Q である。」

という結論を引き出している。ここで P 、 Q 、 R は論理変数と呼ばれるものである。

ちょっと奇妙な例を挙げよう。実数 x のべき乗 x^n は、 n は自然数である必要はない。そこで、

「 x が無理数であり、 n も無理数であるとき、 x^n が有理数になることがあるか？」

という問題を考えてみよう。 $\sqrt{2}$ は無理数であることは知っている。 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は無理数であるかどうかはわからない。でも、もし $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数であるならば、 $x = \sqrt{2}$ 、 $n = \sqrt{2}$ と考えて、上の問題の答えは yes である。し $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない、即ち無理数の場合はどうであろうか。この場合

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

である。従って、 $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 、 $n = \sqrt{2}$ と考えて、やはり上の問題の答えは yes である。 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ は有理数であるか無理数であるかいずれかであるから、いずれの場合においても、問題の答えは yes でなければならない。ここで使われた論理は

「雨が降らなければ、遠足に行く。雨が降っても、遠足に行く。」

ということから、

「遠足に行く。」

という結論を導くことと同じ構造をしている。即ち、命題変数 P と Q を用いると

「 P でなければ、 Q である。 P ならば、 Q である。」

とういことから

「 Q である。」

という構造である。

2 論理演算

数 x と y から $x + y$ を作ることができるように、命題と命題を組み合わせて新たな命題を作ることが可能である。命題の集まりは一つの言語である。言語を定義する方法の一つに、BNF(Backus-Naur form) によるものがあるので、これを用いることにしよう。

$$\begin{aligned} \langle \text{単純命題} \rangle &::= \text{true} \mid \text{false} \\ \langle \text{命題} \rangle &::= \langle \text{単純命題} \rangle \\ \langle \text{命題} \rangle &::= (\neg \langle \text{命題} \rangle) \\ \langle \text{命題} \rangle &::= (\langle \text{命題} \rangle \wedge \langle \text{命題} \rangle) \\ \langle \text{命題} \rangle &::= (\langle \text{命題} \rangle \vee \langle \text{命題} \rangle) \\ \langle \text{命題} \rangle &::= (\langle \text{命題} \rangle \rightarrow \langle \text{命題} \rangle) \\ \langle \text{命題} \rangle &::= (\langle \text{命題} \rangle \leftrightarrow \langle \text{命題} \rangle) \end{aligned}$$

単純命題は、必要に応じて付け加えるものとする。例えば、

$$\langle \text{単純命題} \rangle ::= p \mid q \mid r$$

を付け加えれば

$$p, (\neg p), (p \wedge (q \rightarrow r))$$

などは命題と言えるが、

$$pq, (p \neq q), x \wedge y$$

などは、命題ではない。単純命題として

$$\langle \text{単純命題} \rangle ::= \text{総武線が遅れる} \mid \text{津田沼駅にタクシーがある} \mid \text{先生は授業に遅れる}$$

を規則に加えれば、

$$((\text{総武線が遅れる} \wedge (\neg \text{津田沼駅にタクシーがある})) \rightarrow \text{先生は授業に遅れる})$$

は命題である。

カッコ記号は、必要に応じて省略して書くことを許す。カッコ記号の省略した場合は、演算子の強さに従ってカッコ記号を補う。演算子の強さは、

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

の順とする (左の方が強い)。同じ強さの演算子が並んだ場合は、左にある演算子が強いものとする。例えば

$$\neg P \rightarrow Q \wedge R \leftrightarrow P \vee Q \vee Q$$

は、

$$(((\neg P) \rightarrow (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee Q))$$

と解釈する。ただし、無闇にカッコ記号を省略し過ぎると判りに難くなるので、適当にカッコ記号を補うことにする。ここで用いた P, Q, R は命題変数である。命題変数には命題を代入することができる。

記号の読み方は次のようにする。

- (1) $(\neg P)$ は、「 P ではない」と読む。
- (2) $(P \wedge Q)$ は、「 P かつ Q 」と読む。
- (3) $(P \vee Q)$ は、「 P または Q 」と読む。
- (4) $(P \rightarrow Q)$ は、「 P ならば Q 」と読む。
- (5) $(P \leftrightarrow Q)$ は、「 P と Q は同値」と読む。

ただし、この段階で、読み方は意味までも規定するものではない。記号そのものの呼び方は、 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ をそれぞれ、否定、論理積、論理和、含意、等価と呼ぶ。

3 証明

連立方程式を解く過程を思い出してみよう。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & \cdots (1) \\ 4x + 5y = 13 & \cdots (2) \end{cases}$$

が与えられたとする。(1) より

$$2x + 3y = 7$$

が正しいので、この両辺を 2 倍した

$$4x + 6y = 14 \quad \cdots (3)$$

も正しい。また、(2) より

$$4x + 5y = 13$$

も正しいので、(3) の両辺からこの両辺を引いた

$$y = 1 \quad \cdots (4)$$

が正しい。これを、(1) に代入した

$$2x + 3 \cdot 1 = 7$$

も正しいので、両辺から 3 を引いた

$$2x = 4$$

も正しい。この両辺を 2 で割った

$$x = 2 \quad \dots (5)$$

も正しい。(5) と (4) より

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

を得る。

前提から出発して、正当な理由で変形を行い、結論に到達するを証明という。正当な理由として上で用いたものとして、例えば「2つの等式の両辺どうし引いてできる等式も正しい」などというものである。正当でない理由「等式は、一方だけを2倍しても正しい等式である」などは、もし使ったら結論は信用できないものとなる。

証明を次のように考えよう。証明は白紙の答案に書いて行く。答案には正しい命題のみ書くことができる。ただし、ワープロのように正しい命題であっても、そのまま書くことは許されない。決められた手続きを用いて書かなければならない。ちょうど、計算機プログラムを書くことに似ている。

証明の文法を BNF により定義しておこう。

$$\begin{aligned} \langle \text{証明} \rangle &::= \langle \text{前提ブロック} \rangle \langle \text{証明ブロック} \rangle \\ \langle \text{前提ブロック} \rangle &::= \langle \text{空行} \rangle \mid \langle \text{前提ブロック} \rangle \langle \text{前提行} \rangle \\ \langle \text{空行} \rangle &::= \\ \langle \text{前提行} \rangle &::= \langle \text{行番号} \rangle \langle \text{命題} \rangle \text{前提より;} \\ \langle \text{行番号} \rangle &::= \langle \text{10進整数} \rangle : \\ \langle \text{証明ブロック} \rangle &::= \langle \text{空行} \rangle \mid \langle \text{証明ブロック} \rangle \langle \text{証明行} \rangle \\ \langle \text{証明行} \rangle &::= \langle \text{行番号} \rangle \langle \text{命題} \rangle \langle \text{規則} \rangle ; \end{aligned}$$

規則については説明する。

$$\begin{array}{lll} 1 : & P \wedge Q & \text{前提より;} \\ 2 : & P & \wedge \text{右除去 (1);} \end{array}$$

は簡単な証明の例である。 $P \wedge Q$ を前提にして、 P を導いた。これを

$$P \wedge Q \vdash P$$

の証明であるという。前提ブロックは前提行

$$1 : \quad P \wedge Q \quad \text{前提より;} \quad$$

の1行のみから成る。証明ブロックも、証明行

$$2 : \quad P \quad \wedge \text{右除去 (1);} \quad$$

の1行のみから成る。

$$P \wedge Q \vdash Q$$

の証明は、

$$\begin{array}{ll} 1: & P \wedge Q \quad \text{前提より;} \\ 2: & Q \quad \wedge\text{左除去 (1);} \end{array}$$

である。

証明ブロックが空の証明もあり得る。

$$1: \quad P \quad \text{前提より;} \\$$

は、

$$P \vdash P$$

の証明である。前提ブロックが空の証明もある。

$$1: \quad \text{true} \quad \text{恒真 ()};$$

は、

$$\vdash \text{true}$$

の証明である。

一般に、前提ブロックの命題を全部集めたのが $P_1, P_2, \dots, P_n$ であり、証明の最後の行の命題が Q であるとき

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の証明であるという。この段階では証明は文法的に正しいだけで、意味的に正しいかどうかについてはわからない。

4 推論規則

前節で、証明行の理由として何の説明もなく

$$\wedge\text{右除去 (1)}, \wedge\text{左除去 (1)}, \text{恒真 ()}$$

などを用いた。これらは次のように定義される。

$$\begin{array}{ll} \frac{P \wedge Q}{P} & \wedge\text{右除去/1} \\ \frac{P \wedge Q}{Q} & \wedge\text{左除去/1} \\ \frac{}{\text{true}} & \text{恒真/0} \end{array}$$

分数の分子にある形の命題がすでに証明の過程で導かれているとき、分母にある形の命題を証明に加えてよいというものである。推論規則の名前のわきに /1 とか /0 とあるのは、その推論規則の引数の数であり、引数には分子にある形が導かれている行番号が使われる。非常によく使われる推論に、三段論法と呼ばれるものがある。

$$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q} \quad \rightarrow\text{左除去/2}$$

この規則は、モーダスポネンスとも呼ばれる。この推論規則には引数が2つある。引数が2つ以上ある場合、引数の順序は分子にある命題の並びに一致したものでなくてはならない。ただし、推論規則 modus ponens/2 が使われるまでの証明の過程で、分子にある2つの形の命題のどちらが先に証明されていても良いものとする。

- | | |
|----------------------------|-------------|
| 1: ソクラテスは人間である | 前提より; |
| 2: ソクラテスは人間である→ソクラテスはいずれ死ぬ | 前提より; |
| 3: ソクラテスはいずれ死ぬ | →左除去 (1,2); |

は、

ソクラテスは人間である,
 ソクラテスは人間である → ソクラテスはいずれ死ぬ
 ⊢ ソクラテスはいずれ死ぬ

の証明である。

∧ に関する推論規則として、次のものも必要である。

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \quad \wedge \text{ 導入/2}$$

これによって、∧ の交換律

$$P \wedge Q \vdash Q \wedge P$$

が証明できる。

- | | |
|-----------------|------------|
| 1: $P \wedge Q$ | 前提より; |
| 2: P | ∧左除去 (1); |
| 3: Q | ∧右除去 (1); |
| 4: $Q \wedge P$ | ∧導入 (3,2); |

∨ に関する推論規則には以下のものがある。

$$\frac{P}{P \vee Q} \quad \vee \text{ 右導入/1}$$

$$\frac{Q}{P \vee Q} \quad \vee \text{ 左導入/1}$$

$$\frac{P \vee Q \quad \neg Q}{P} \quad \vee \text{ 右除去/2}$$

$$\frac{P \vee Q \quad \neg P}{Q} \quad \vee \text{ 左除去/2}$$

以下の規則も重要である。

$$\frac{P \rightarrow \text{false}}{\neg P} \quad \text{背理/1}$$

$$\frac{\text{false}}{P} \quad \text{恒偽/1}$$

$$\frac{P \quad \neg P}{\text{false}} \quad \text{矛盾/2}$$

$$\frac{\neg \neg P}{P} \quad \text{二重否定/1}$$

排他律と呼ばれる

$$P \wedge \neg P \vdash \text{false}$$

は次のように証明される。

- | | |
|----------------------|-----------|
| 1: $P \wedge \neg P$ | 前提より; |
| 2: P | ∧右除去 (1); |
| 3: $\neg P$ | ∧左除去 (1); |
| 4: false | 矛盾 (2,3); |

P を一時的に仮定して Q を導くことによって、 $P \rightarrow Q$ を導くことがしばしばある。このために、証明の文法に次を追加する。

$\langle \text{証明ブロック} \rangle ::= \langle \text{証明ブロック} \rangle \langle \text{仮定ブロック} \rangle$
 $\langle \text{仮定ブロック} \rangle ::= \langle \text{仮定開始行} \rangle \langle \text{証明ブロック} \rangle \langle \text{仮定終了行} \rangle$
 $\langle \text{仮定開始行} \rangle ::= \langle \text{行番号} \rangle : \langle \text{命題} \rangle \text{ 仮定開始 ;}$
 $\langle \text{仮定終了行} \rangle ::= \langle \text{行番号} \rangle : \langle \text{命題} \rangle \rightarrow \langle \text{命題} \rangle \text{ 仮定終了 (} \langle \text{行番号} \rangle \text{) ;}$

証明ブロックを用いた証明の例を挙げよう。証明ブロックの終了行の命題

$\langle \text{命題} \rangle \rightarrow \langle \text{命題} \rangle$

の左側の命題は、仮定開始行の命題と同じでなければならず、右側の命題は直前の行の命題と同じでなければならない。仮定ブロックを用いた最も簡単な証明は

$\vdash P \rightarrow P$

である。この定理には、 $\vdash$ の左側に何も命題が無いので、証明に前提ブロックはない。

1 : P 仮定開始;
 2 : $P \rightarrow P$ 仮定終了 (1);

が証明である。次に、

$\vdash P \wedge Q \rightarrow P$

を証明してみよう。

1 : $P \wedge Q$ 仮定開始;
 2 : P $\wedge$ 左除去 (1);
 3 : $P \wedge Q \rightarrow P$ 仮定終了 (1);

同様に

$\vdash P \wedge Q \rightarrow Q$

も証明できる。では、

$\vdash P \rightarrow P \vee Q$

の証明はどうなるであろうか。

1 : P 仮定開始;
 2 : $P \vee Q$ $\vee$ 右導入 (1);
 3 : $P \rightarrow P \vee Q$ 仮定終了 (1);

が証明である。同様に、 $\vee$ に関する交換律

$P \vee Q \vdash Q \vee P$

の証明を考えてみよう。 $\wedge$ に関する交換律に比べると、少し厄介である。背理法を用いなければならない。

1 :	$P \vee Q$	前提より;
2 :	$\neg(Q \vee P)$	仮定開始;
3 :	P	仮定開始;
4 :	$Q \vee P$	$\vee$ 左導入 (3);
5 :	false	矛盾 (4, 2);
6 :	$P \rightarrow \text{false}$	仮定終了 (3);
7 :	$\neg P$	背理 (6);
8 :	Q	$\vee$ 右除去 (1, 7);
9 :	$Q \vee P$	$\vee$ 右導入 (8);
10 :	false	矛盾 (9, 2);
11 :	$\neg(Q \vee P) \rightarrow \text{false}$	仮定終了 (2);
12 :	$\neg\neg(Q \vee P)$	背理 (11);
13 :	$Q \vee P$	二重否定 (12);

排中律と呼ばれる

$$\vdash P \vee \neg P$$

も似たように証明が可能である。

1 :	$\neg(P \vee \neg P)$	仮定開始;
2 :	P	仮定開始;
3 :	$P \vee \neg P$	$\vee$ 右導入 (2);
4 :	false	矛盾 (3, 1);
5 :	$P \rightarrow \text{false}$	仮定終了 (2);
6 :	$\neg P$	背理 (5);
7 :	$P \vee \neg P$	$\vee$ 左導入 (6);
8 :	false	矛盾 (7, 1);
9 :	$\neg(P \vee \neg P) \rightarrow \text{false}$	仮定終了 (1);
10 :	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	背理 (9);
11 :	$P \vee \neg P$	二重否定 (10);

5 命題、定理、推論規則、および命題の同値関係、順序関係

$P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ を命題とする。

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

は命題であり、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

は定理であり、

$$\frac{P_1, P_2, \dots, P_n}{Q} \text{ 規則 } x/n$$

は推論規則である。これらの間には密接な関係がある。推論規則

$$\frac{P_1, P_2, \dots, P_n}{Q} \text{ 規則 } x/n$$

から、定理

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

を証明できる。実際、

$$\begin{array}{lll} 1 : & P_1 & \text{前提より;} \\ 2 : & P_2 & \text{前提より;} \\ & \vdots & \\ n : & P_n & \text{前提より;} \\ n+1 : & Q & \text{規則 } x(1, 2, \dots, n); \end{array}$$

が証明である。例えば、推論規則

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \quad \wedge \text{ 導入/2}$$

は、

$$\begin{array}{lll} 1 : & P & \text{前提より;} \\ 2 : & Q & \text{前提より;} \\ 3 : & P \wedge Q & \wedge \text{ 導入 } (1, 2); \end{array}$$

という証明によって

$$P, Q \vdash P \wedge Q$$

という定理になる。

逆に、正しい証明を持つ定理

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

があれば、それを推論規則化して

$$\frac{P_1, P_2, \dots, P_n}{Q} \quad \text{名前}/n$$

を付け加えても、証明できる定理に変化はない。つまり、追加した推論規則を用いて証明できる定理は、その推論規則を用いずにも証明が可能である。何故ならば、追加した推論規則を用いた部分を機械的に

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の証明に置き換えることが可能だからである。

まず、次のことに注意する。推論規則に

$$\frac{P}{P} \text{quad 引用/1}$$

という推論規則を加えても、証明できる定理に何ら変わりはない。この規則は

$$\begin{array}{lll} & \vdots & \\ k : & P & \dots; \\ & \vdots & \\ n : & P & \text{引用 } (k); \\ & \vdots & \end{array}$$

のように用いられる。引用/1 という推論規則が無い場合は

$$\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
 k : & P & \dots; \\
 & \vdots & \\
 n : & P \wedge P & \wedge\text{右導入 } (k, k); \\
 n + 1 : & P \wedge P & \wedge\text{右除去 } (n); \\
 & \vdots &
 \end{array}$$

とすれば良いからである。

さて、例えば定理

$$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$$

は次のような証明を持つ。

$$\begin{array}{lll}
 1 : & P \rightarrow Q & \text{前提より;} \\
 2 : & \neg Q & \text{前提より;} \\
 3 : & P & \text{仮定開始;} \\
 4 : & Q & \rightarrow \text{左除去 } (3, 1); \\
 5 : & \text{false} & \text{矛盾 } (4, 2); \\
 6 : & P \rightarrow \text{false} & \text{仮定終了 } (3); \\
 7 : & \neg P & \text{背理 } (6);
 \end{array}$$

従って、これを

$$\frac{P \rightarrow Q, \neg Q}{\neg P} \quad \text{対偶/2}$$

という推論規則にする。これを用いると、例えば次の定理の証明が簡単である。

$$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

証明は実際、

$$\begin{array}{lll}
 1 : & P \rightarrow Q & \text{前提より;} \\
 2 : & \neg Q & \text{仮定開始;} \\
 & & \\
 3 : & \neg P & \text{対偶 } (1, 2); \\
 & & \\
 4 : & \neg Q \rightarrow \neg P & \text{仮定終了 } (2);
 \end{array}$$

である。これを、推論規則 対偶/2 を用いている部分を、先の定理の証明ブロックにそっくり置き

換えると

1 :	$P \rightarrow Q$	前提より;
2 :	$\neg Q$	仮定開始;
3 :	$P \rightarrow Q$	引用 (1);
4 :	$\neg Q$	引用 (2);
5 :	P	仮定開始;
6 :	Q	$\rightarrow$ 左除去 (5, 3);
7 :	false	矛盾 (6, 4);
8 :	$P \rightarrow \text{false}$	仮定終了 (5);
9 :	$\neg P$	背理 (8);
10 :	$\neg Q \rightarrow \neg P$	仮定終了 (5);

という、推論規則 対偶/2 を用いない証明ができる。

正しい証明を持つ定理は、ちょうど計算機プログラム言語の手続き (サブルーチン、関数) の定義に似ている。 $\vdash$ の左が入力で、右が出力されるものである。 $\vdash$ の左が空の場合は、入力が無く、出力だけがある。定理の証明は、手続きのプログラムである。推論規則は、あらかじめ処理系に組み込まれた基本的な手続きと考えられる。また、定理や推論規則に登場する命題変数が、手続きの仮引数に対応する。 $\wedge$ 左除去/1 の定義においては、 $P \wedge Q$ が仮引数で、 P が出力されるという形で書いてあった。証明の過程で

$$n : \quad P \wedge (P \rightarrow Q) \quad \dots;$$

$$m : \quad P \rightarrow Q \quad \wedge \text{左除去 } (n);$$

という形で使われた場合、実引数は $P \wedge (P \rightarrow Q)$ であり、 $P \rightarrow Q$ が出力される。

次に、命題と定理の関係に目を向けてみよう。

$$\vdash (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \vdash Q$$

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \vdash Q$$

のいずれか 1 つ定理に正しい証明があれば、他の 2 つの定理の正しい証明が機械的に作れる。いま、

$$\vdash (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

の正しい証明があったとする。このとき、上で述べたようにこれを推論規則

$$\frac{}{(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q} \quad \text{規則 1/0}$$

として、他の証明に用いることができる。これを用いて

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \vdash Q$$

を証明するのは易しい。

$$\begin{array}{lll} 1 : & P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n & \text{前提より;} \\ 2 : & (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q & \text{規則 1()}; \\ 3 : & Q & \wedge\text{左除去 (2)}; \end{array}$$

が証明である。次に

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \vdash Q$$

の正しい証明があったとしよう。これも推論規則

$$\frac{P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n}{Q} \quad \text{規則 2/1}$$

として用いる。

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の証明は次のようになる。

$$\begin{array}{lll} 1 : & P_1 & \text{前提より;} \\ 2 : & P_2 & \text{前提より;} \\ & \vdots & \\ n : & P_n & \text{前提より;} \\ n+1 : & P_1 \wedge P_2 & \wedge\text{導入 (1, 2)}; \\ n+2 : & P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 & \wedge\text{導入 (n+1, 3)}; \\ & \vdots & \\ 2n-1 : & P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n & \wedge\text{導入 (2n-2, n)}; \\ 2n : & Q & \text{規則 2(2n-1)}; \end{array}$$

最後に、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の正しい証明があったとする。これも

$$\frac{P_1, P_2, \dots, P_n}{Q} \quad \text{規則 3/n}$$

としよう。

$$\vdash (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

の証明は

$$\begin{array}{lll} 1 : & P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n & \text{仮定開始;} \\ 2 : & P_1 & \wedge\text{右除去 (1)}; \\ 3 : & P_2 \wedge \dots \wedge P_n & \wedge\text{左除去 (1)}; \\ & \vdots & \\ 2n-2 : & P_{n-1} & \wedge\text{右除去 (2n-3)}; \\ 2n-1 : & P_n & \wedge\text{左除去 (2n-3)}; \\ 2n : & Q & \text{規則 3(2, 4, \dots, 2n-2, 2n-1)}; \\ 2n+1 : & (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q & \text{仮定終了 (1)}; \end{array}$$

である。

以上からもわかるように、定理はなるべく

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \vdash Q$$

の形にしておいた方が証明も簡単であり、推論規則化した場合もそれを他の定理の証明に用いるときにも便利である。論理演算子を削除したり導入したりする作業の手間が省ける。

論理演算子 $\leftrightarrow$ に関する推論規則を決めていなかった。 $\leftrightarrow$ に関する推論規則として、次の3つを採用する。

$$\begin{array}{ll} \frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q} & \rightarrow \text{右緩和/1} \\ \frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P} & \rightarrow \text{左緩和/1} \\ \frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow P}{P \leftrightarrow Q} & \rightarrow \text{導入/2} \end{array}$$

なお、

$$\vdash P \rightarrow Q$$

が正しい定理であるとき、

$$P \Rightarrow Q$$

と書き、

$$\vdash P \leftrightarrow Q$$

が正しい定理であるとき、

$$P \Leftrightarrow Q$$

と書くことにする。

命題どうしの関係 $\Rightarrow$ は順序関係となる。即ち、

(反射的) $P \Rightarrow P$;

(反対称的) $P \Rightarrow Q$ であり $Q \Rightarrow P$ であるとき、 $P \Leftrightarrow Q$;

(推移的) $P \Rightarrow Q$ であり $Q \Rightarrow R$ であるとき、 $P \Rightarrow R$.

また、命題どうしの関係 $\Leftrightarrow$ は同値関係となる。即ち、

(反射的) $P \Leftrightarrow P$;

(対称的) $P \Leftrightarrow Q$ であるとき、 $Q \Leftrightarrow P$;

(推移的) $P \Leftrightarrow Q$ であり $Q \Leftrightarrow R$ であるとき、 $P \Leftrightarrow R$.

6 真理値表

前節までは、論理演算子の意味を推論規則によって与えた。論理演算子に意味を与える別の方法として、我々は既に真理値表というものを知っているはずである (情報数理 I)。

true	false	P	$\neg P$	P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
真	偽	真	偽	真	真	真	真	真	真
		真	偽	真	偽	偽	真	偽	偽
		偽	真	偽	真	偽	真	真	偽
		偽	偽	偽	偽	偽	偽	真	真

上に挙げた真理値表が、論理演算子の意味を定義しているものとする。これらを組み合わせ、より複雑な真理値表を作ることは既に学んだ。真理値表は一般に次のような形をしている。

P_1	P_2	$\dots$	P_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$P_1, P_2, \dots, P_n$ から取りだした $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}, P_m$ に対して、各 $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$ の真理値がすべて真となる行では必ず P_m の真理値も真になるとき、

$$P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k} \models P_m$$

と書くことにする。特に、 $k = 0$ のとき

$$\models P_m$$

と書く。これは、 P_m がトートロジ (恒真式) であることを意味する。例えば、上の真理値表に並んだ命題から $P, P \rightarrow Q, Q$ を取り出して、 $P, P \rightarrow Q$ の真理値がどちらも真である行を見ると、 Q の真理値は真になっているので、

$$P, P \rightarrow Q \models Q$$

と書くことが可能である。実は、推論規則に

$$\frac{P_1, P_2, \dots, P_n}{Q} \quad \text{名前}/n$$

とあるものはすべて

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models Q$$

と書けることがわかる。推論規則の数は少ないので、これをいちいち確かめるのは易しい。では、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の正しい証明がある場合

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models Q$$

と書くことは可能であろうか。正しい証明を持つ定理は無限に作ることができるので、一つ一つ調べるわけにはいかない。しかしながら、可能であることを一般に証明することができる。これは健全性定理という名前で知られている。

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の正しい証明の証明ブロックの行数 s 行であるとき、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models Q$$

であることを、 s に関する数学的帰納法によって示す。 $s = 0$ の場合、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の証明ブロックは空なので、 Q は P_n と同じものでなければならない。従って、真理値表で

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

の真理値がすべて真の行を取り出したら、 P_n の真理値は真であるから Q も真でなければならない。よって

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models Q$$

である。次に、 $s < m$ である s に対して主張が成立すると仮定して $s = m$ のときも成立することを示す。

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の証明ブロックの行数が m とする。このとき、一番最後の行に着目する。例えば

$$m : \quad Q_1 \wedge Q_2 \quad \wedge \text{導入} (k);$$

で終わっていたとする。このとき

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q_1$$

と

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q_2$$

の証明ブロックが m 行未満の正しい証明があるはずである。従って、帰納法の仮定より、

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

の真理値がすべて真の行を取り出したら、 Q_1 の真理値も Q_2 の真理値も真でなければならない。 Q は $Q_1 \wedge Q_2$ の形をしているから、 Q の真理値もこのとき真でなければならない。その他の推論規則についても、同様に示すことができる。問題は、証明ブロックの最後の行が

$$m : \quad Q_1 \rightarrow Q_2 \quad \text{仮定終了} (k);$$

で終わっている場合である。この場合、この仮定ブロックは

$$k : \quad Q_1 \quad \text{仮定開始};$$

で始まっているはずである。この仮定開始行と仮定終了行を取り去って、さらに前提ブロックの最後の行に

$$j : \quad Q_1 \quad \text{前提より};$$

を加えたものは

$$P_1, P_2, \dots, P_n, Q_1 \vdash Q_2$$

の正しい証明である。この証明ブロックの証明行の行数は m 行未満なので、帰納法の仮定より

$$P_1, P_2, \dots, P_n, Q_1$$

の真理値がすべて真の行を取り出したら、 Q_2 の真理値も真となっている。従って、 Q は $Q_1 \rightarrow Q_2$ の形をしていることから、 Q の真理値も真でなければならない。一方、

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

の真理値がすべて真であり、 Q_1 が偽の行をとりだしたとしても、 Q は $Q_1 \rightarrow Q_2$ の形をしていることから、 Q の真理値も真でなければならない。以上により、 $s = m$ のときも主張は成立する。

健全性定理の意味することを一言で言えば、「証明できることは正しい」ということである。その逆「正しいことは、証明できる」ということも言えるであろうか。それを述べたものが、完全性定理と呼ばれるものである。完全性定理は即ち、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models Q$$

が言えれば

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の正しい証明があることを主張している。これを示すには、次の3つのステップに従う。

(ステップ1)

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models Q$$

が言えれば、

$$\models (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

が言える。即ち、 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$ はトートロジである。

(ステップ2)

$$\models P$$

が言えれば、即ち P がトートロジであれば

$$\vdash P$$

の正しい証明がある。

(ステップ3)

$$\vdash (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

の正しい証明があれば、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

の正しい証明がある。

(ステップ3)については、前節の最後で検証した。(ステップ1)もそれほど難しくないので、練習問題とする。(ステップ2)でやることは、 Q の真理値表が与えられたとき、機械的にその真理値表から

$$\vdash Q$$

の正しい証明が作るアルゴリズムがあることを示せばよい。そのために、次の補助定理を必要とする。

補助定理 Φ を任意の命題とし、 Φ に現れる単純命題を

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$$

とする。 Φ の真理値表は、 2^k 行から成る。このうち、任意の行を取りだして、

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k, \Phi$$

の各々の真理値が真であるか偽であるかに応じて、

$$\phi_1', \phi_2', \dots, \phi_k', \Phi'$$

という命題を考える。ここで、 $'$ の付いた命題は、対応する真理値の値が真ならば $'$ の付かない命題と同じもの、対応する命題の真理値の値が偽ならば $'$ の付かない命題の否定命題とする。このとき、必ず

$$\phi_1', \phi_2', \dots, \phi_k' \vdash \Phi'$$

の正しい証明ができる。

このことを、 Φ の深さ n に関する数学的帰納法で証明する。命題の深さとは、次で定義する。

- (1) 単純命題 (論理記号が用いられていない命題) の深さは0とする。
- (2) P の深さが n のとき、 $(\neg P)$ の深さは $n+1$ とする。
- (3) P の深さが m 、 Q の深さが n のとき、 $(P \wedge Q)$ の深さは $\max\{m, n\} + 1$ とする。
- (4) P の深さが m 、 Q の深さが n のとき、 $(P \vee Q)$ の深さは $\max\{m, n\} + 1$ とする。
- (5) P の深さが m 、 Q の深さが n のとき、 $(P \rightarrow Q)$ の深さは $\max\{m, n\} + 1$ とする。
- (6) P の深さが m 、 Q の深さが n のとき、 $(P \leftrightarrow Q)$ の深さは $\max\{m, n\} + 1$ とする。

補助定理の証明 $n=0$ の場合、 Φ は単純命題であるので、 Φ' は

$$\phi_1', \phi_2', \dots, \phi_k'$$

のいずれかであるので

$$\phi_1', \phi_2', \dots, \phi_k' \vdash \Phi'$$

の正しい証明を作るとは易しい。即ち、補助定理の主張は正しい。

次に、 $n < m$ である n に対して補助定理の主張が正しいとして、 $n = m$ のときも主張は正しいことを示す。 Φ は

$$\neg \Phi_1, \Phi_1 \wedge \Phi_2, \Phi_1 \vee \Phi_2, \Phi_1 \rightarrow \Phi_2, \Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2$$

のいずれかの形をしている。 $\neg \Phi_1$ の形をしているとして証明する。他も同じように示すことができる。

Φ' が、 Φ である場合を考えよう。この場合、 Φ の真理値は真であるので、 Φ_1 の真理値は偽である。 Φ_1 の深さは m より小さいから、帰納法の仮定より

$$\phi_1', \phi_2', \dots, \phi_k' \vdash \neg\Phi_1$$

の証明がある。これは、

$$\phi_1', \phi_2', \dots, \phi_k' \vdash \Phi$$

の証明に他ならない。では、 Φ' が、 $\neg\Phi$ である場合を考えよう。この場合、 Φ の真理値は偽であるので、 Φ_1 の真理値は真である。 Φ_1 の深さは m より小さいから、帰納法の仮定より

$$\phi_1', \phi_2', \dots, \phi_k' \vdash \Phi_1$$

の証明がある。この証明の最後

$$s : \quad \Phi_1 \quad \dots;$$

で終わっている。これに

$s + 1 :$	$\neg\Phi_1$	仮定開始;
$s + 2 :$	false	矛盾 ($s, s + 1$);
$s + 3 :$	$\neg\Phi_1 \rightarrow \text{false}$	仮定終了 ($s + 1$);
$s + 4 :$	$\neg\neg\Phi_1$	背理 ($s + 3$);

を付け加える。 $\neg\neg\Phi_1$ は $\neg\Phi$ に他ならないので、

$$\phi_1', \phi_2', \dots, \phi_k' \vdash \neg\Phi$$

の正しい証明を得ることが出来る。これで補助定理の証明が終わった。

さて、話を元に戻そう。 Q がトートロジであるとき

$$\vdash Q$$

の証明を作りたい。 Q に登場する単純命題を

$$p_1, p_2, \dots, p_k$$

として、補助定理から 2^k 個の定理

$$p_1', p_2', \dots, p_k' \vdash Q$$

の正しい証明作れることが保証された。ここで、 Q はトートロジなので $\vdash$ の右はすべて Q のままであることに注意する。前節の最後で述べたことから、これらをすべて推論規則化して 2^k 個の推論規則

$$\frac{p_1', p_2', \dots, p_k'}{Q} \quad \text{規則 } i/k$$

を作る。これらを用いて

$$\vdash Q$$

の正しい証明を作ることは、時間はかかるが単純作業である。 2^k 個の場合分け (これがすべてを尽くしている) して、それぞれの場合に Q が導けることを示せばよいだけである。以上により、完全性定理が証明された。

7 命題の代数と標準形

命題 P および Q に対して、

(a) $P \vdash Q$

(b) $\vdash P \rightarrow Q$

(c) $P \models Q$

(d) $\models P \rightarrow Q$

のいずれか1つが言えれば、他の3つも言える。このような関係が成立するとき、

$$P \Rightarrow Q$$

と表す。 $P \Rightarrow Q$ と $Q \Rightarrow P$ のいずれもが言えるとき、

$$P \Leftrightarrow Q$$

と表す。 $P \Leftrightarrow Q$ を確かめるには

(a) $P \vdash Q$ かつ $Q \vdash P$

(b) $\vdash P \Leftrightarrow Q$

(c) $P \models Q$ かつ $Q \models P$

(d) $\models P \Leftrightarrow Q$

のいずれか1つを確かめればよい。

P 、 Q および R をそれぞれ命題とすると、次のことが言える。

(0) $P \Leftrightarrow P,$

(1-1) $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P,$

(1-2) $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P,$

(2-1) $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R,$

(2-2) $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R,$

(3-1) $P \wedge \text{true} \Leftrightarrow P,$

(3-2) $P \vee \text{true} \Leftrightarrow \text{true},$

(3-3) $P \wedge \text{false} \Leftrightarrow \text{false},$

(3-4) $P \vee \text{false} \Leftrightarrow P,$

(4-1) $P \wedge \neg P \Leftrightarrow \text{false},$

(4-2) $P \vee \neg P \Leftrightarrow \text{true},$

(5-1) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$

(5-2) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$

また、

$$P \Leftrightarrow Q \quad \text{かつ} \quad R_1 \Leftrightarrow R_2$$

が言えるとき、命題 Q の中に登場する R_1 の幾つかを R_2 に置き換えた命題をそれぞれ Q' とするならば、

$$P \Leftrightarrow Q'$$

が言える。この規則を**置換規則**と呼ぶ。上に挙げた性質 (0) と置換規則は、 $\Leftrightarrow$ が代数計算における等号 $=$ の役割を果たすことを意味している。そして、性質 (1)～(5) は Boole(ブール) 代数の性質である。

命題間の関係 $\Rightarrow$ は、Boole 代数上の順序関係になっている。

$$R \Rightarrow P \text{ かつ } R \Rightarrow Q$$

であるとき

$$R \Rightarrow P \wedge Q$$

であることは容易に確かめられる。即ち、命題 P と Q に対して、 $P \vee Q$ は、この順序関係に関する P と Q の上限となっている。同様に、

$$P \Rightarrow R \text{ かつ } Q \Rightarrow R$$

であるとき

$$P \vee Q \Rightarrow R$$

であることも容易に確かめられる。即ち、命題 P と Q に対して、 $P \vee Q$ は、この順序関係に関する P と Q の上限となっている。

Boole 代数において、**補元の一意性**と呼ばれる性質は次のように表現できる。

$$P \vee Q \Leftrightarrow \text{true} \quad \text{かつ} \quad P \wedge Q \Leftrightarrow \text{false}$$

ならば

$$Q \Leftrightarrow \neg P$$

である。これは代数的な計算によって示することができる。実際に、性質 (1)～(5) と置換規則のみを用いて

$$\begin{aligned} Q &\Leftrightarrow Q \wedge \text{true} \\ &\Leftrightarrow Q \wedge (P \vee \neg P) \\ &\Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow \text{false} \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q) \\ &\Leftrightarrow \neg P \wedge (P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow \neg P \wedge \text{true} \\ &\Leftrightarrow \neg P \end{aligned}$$

という計算によって示される。

更に、

$$\begin{array}{ll}\text{二重否定} & \neg\neg P \Leftrightarrow P, \\ \text{ベキ等律} & P \wedge P \Leftrightarrow P, \\ & P \vee P \Leftrightarrow P, \\ \text{吸収律} & P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P, \\ \text{ド・モルガンの法則} & \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q, \\ & \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q\end{array}$$

などとも言える。代数的な計算によるド・モルガンの法則の証明は以下のようにになる。すでに述べたことから

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \text{true} \quad \text{かつ} \quad (P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \text{false}$$

を示せば

$$\neg P \vee \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$$

が言える。

$$\begin{aligned}(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q) &\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee \neg P) \vee \neg Q \\ &\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P)) \vee \neg Q \\ &\Leftrightarrow (\text{true} \wedge (Q \vee \neg P)) \vee \neg Q \\ &\Leftrightarrow (Q \vee \neg P) \vee \neg Q \\ &\Leftrightarrow Q \vee (\neg P \vee \neg Q) \\ &\Leftrightarrow Q \vee (\neg Q \vee \neg P) \\ &\Leftrightarrow (Q \vee \neg Q) \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \text{true} \vee \neg P \\ &\Leftrightarrow \text{true}, \\ (P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) &\Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \\ &\Leftrightarrow P \wedge ((Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)) \\ &\Leftrightarrow P \wedge ((Q \wedge \neg P) \vee \text{false}) \\ &\Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \wedge Q) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \wedge Q \\ &\Leftrightarrow \text{false} \wedge Q \\ &\Leftrightarrow \text{false}\end{aligned}$$

ド・モルガンの法則のもう一つの方も殆ど同様に示すことができる。

論理演算子 $\rightarrow$ および $\leftrightarrow$ について

$$\begin{aligned}P \rightarrow Q &\Leftrightarrow \neg P \vee Q, \\ P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)\end{aligned}$$

が成立するので、すべての命題は $\Leftrightarrow$ の関係で変形することによって論理演算子 $\neg$ 、 $\wedge$ および $\vee$ だけを使った命題に変形することができる。

命題の文法に、新たな用語を付け加えよう。

$$\begin{aligned}
\langle \text{正のリテラル} \rangle &::= \langle \text{単純命題} \rangle \\
\langle \text{負のリテラル} \rangle &::= (\neg \langle \text{単純命題} \rangle) \\
\langle \text{リテラル} \rangle &::= \langle \text{正のリテラル} \rangle \mid \langle \text{負のリテラル} \rangle \\
\langle \text{連言節} \rangle &::= \langle \text{リテラル} \rangle \mid (\langle \text{連言節} \rangle \wedge \langle \text{リテラル} \rangle) \\
\langle \text{選言節} \rangle &::= \langle \text{リテラル} \rangle \mid (\langle \text{選言節} \rangle \vee \langle \text{リテラル} \rangle) \\
\langle \text{連言標準形} \rangle &::= \langle \text{選言節} \rangle \mid (\langle \text{連言標準形} \rangle \wedge \langle \text{選言節} \rangle) \\
\langle \text{選言標準形} \rangle &::= \langle \text{連言節} \rangle \mid (\langle \text{選言標準形} \rangle \vee \langle \text{連言節} \rangle)
\end{aligned}$$

すべての命題は $\Leftrightarrow$ の関係で変形することによって連言標準形にすることが可能である。同様に、すべての命題は $\Leftrightarrow$ の関係で変形することによって選言標準形にすることが可能である。例えば、 p および q が単純命題のとき、命題 $p \leftrightarrow q$ の連言標準形は

$$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

であり、選言標準形は

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

である。

選言節が

$$p_1 \vee \dots \vee p_m \vee \neg q_1 \vee \dots \vee \neg q_n$$

の形 ($p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n$ はすべて正のリテラル) をしているとき、

$$p_1, \dots, p_m \leftarrow q_1, \dots, q_n$$

と書いて、これを節形式という。 $m = 0$ であっても、或いは $n = 0$ であっても構わない。特に $m = n = 0$ のときの節形式 $\leftarrow$ を空節という。

節形式 $p_1, \dots, p_m \leftarrow q_1, \dots, q_n$ は、論理式

$$q_1 \wedge \dots \wedge q_n \rightarrow p_1 \vee \dots \vee p_m$$

を意味している。特に、節形式 $\leftarrow q_1, \dots, q_n$ は、論理式

$$q_1 \wedge \dots \wedge q_n \rightarrow \text{false}$$

を、節形式 $p_1, \dots, p_m \leftarrow$ は、論理式

$$\text{true} \rightarrow p_1 \vee \dots \vee p_m$$

を意味しているとも考えられる。従って、空節は

$$\text{true} \rightarrow \text{false}$$

を表している。これは偽の命題である。

8 導出法

節形式に対する推論規則として、次のものを設ける。

$$\frac{A, P, B \leftarrow C \quad D \leftarrow E, P, F}{A, B, D \leftarrow C, E, F} \quad \text{導出/2}$$

ただし、ここで P は正のリテラルであり、 A, B, C, D, E および F はいずれも正のリテラルの並び (それぞれ空列であってもよい) とする。

定理

$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash r \vee s$$

を考えてみよう。この定理を証明するには

$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash \neg(r \vee s) \rightarrow \text{false}$$

を証明すればよく、更にこれは

$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s, \neg(r \vee s) \vdash \text{false}$$

を証明すればよい。これを次のように証明する。前提はそれぞれ、連言標準形にする。

$$p \vee q, r \vee \neg p, s \vee \neg q, \neg r \wedge \neg s \vdash \text{false}$$

$\wedge$ はカンマに代える。

$$p \vee q, r \vee \neg p, s \vee \neg q, \neg r, \neg s \vdash \text{false}$$

このようにして、前提はすべて選言節となるので、証明の前提行に書くときはそれを節形式で書き下す。後は、推論規則として導出 /2 だけを用いて、 $\leftarrow$ を導く。

1 :	$p, q \leftarrow$	前提より
2 :	$r \leftarrow p$	前提より
3 :	$s \leftarrow q$	前提より
4 :	$\leftarrow r$	前提より
5 :	$\leftarrow s$	前提より
6 :	$q, r \leftarrow$	導出 (1, 2)
7 :	$r, s \leftarrow$	導出 (6, 3)
8 :	$s \leftarrow$	導出 (7, 4)
9 :	$\leftarrow$	導出 (8, 5)

最後に導かれた空節は偽の命題であるから、導出 /2 という推論規則だけを用いて

$$p \vee q, r \vee \neg p, s \vee \neg q, \neg r, \neg s \vdash \text{false}$$

が証明された。

導出を用いた証明は、正しい証明であることを見よう。

$$P \vee Q, \neg P \vee R \vdash Q \vee R$$

或いは

$$P \vee Q, \neg P \vee R \models Q \vee R$$

が言えることをみるのはそれほど難しくない。従って、推論規則

$$\frac{P \vee Q \quad \neg P \vee R}{Q \vee R} \quad \text{導出'/2}$$

を付け加えても、証明できる定理に変化はない。更に、 $\vee$ の交換法則、結合法則

$$\begin{aligned} & \frac{P \vee Q}{Q \vee P} \quad \vee \text{ 交換/1} \\ & \frac{(P \vee Q) \vee R}{P \vee (Q \vee R)} \quad \vee \text{ 結合右/1} \\ & \frac{P \vee (Q \vee R)}{(P \vee Q) \vee R} \quad \vee \text{ 結合左/1} \end{aligned}$$

を推論規則化したものを加える。節形式の推論規則である 導出/2 は節形式を選言節に代えると、これを用いた推論は上の 4 つの推論規則を組み合わせるによって同じ結論を導くことが可能である。従って、導出法により証明できる定理は正しい証明を持つ。

$P_1, P_2, \dots, P_n$ が命題であるとき、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models \text{false}$$

であるということは、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ を同時に真とすることはできないという意味である。従って、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models \text{false}$$

ではないということは、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 中の登場する単純命題に適当に真または偽を割り当てることによって、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ を同時に真とすることができるという意味である。このとき、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ は充足可能であるという。充足可能でないとき、充足不能であるという。

導出によって必ず充足可能かどうかを調べることができる。単純な場合を考えよう。 p を単純命題として、 Q, R を選言節として、 Q と R のいずれにもリテラル p 或いは $\neg p$ が含まれないとする。このとき、 $p \vee Q, \neg p \vee R$ が充足可能かどうかと $Q \vee R$ が充足可能かどうかは同値である。何故ならば、 $Q \vee R$ が充足可能であれば Q と R のいずれかは充足可能である。 Q が充足可能であるとすると、このときは $\neg p$ が真となるように、即ち p に偽の真理値を与えればよい。 R が充足可能であれば、 p に真の真理値を与えればよい。逆に、 $Q \vee R$ が充足不能であれば、 Q も R も充足不能であるので、 $p \vee Q, \neg p \vee R$ を充足可能にすることはできない。選言節 $Q \vee R$ が充足不能であるのは、空節のときしかありえない。一般の場合は数学的帰納法によるが、これは練習問題とする。

$P_1, P_2, \dots, P_n$ から、導出を使って導き出されるすべての節形式は高々有限個しかない。それらの中に、空節があるかどうかを調べれば $P_1, P_2, \dots, P_n$ が充足可能であるかどうかわかる。しかしそれは大変な作業である (真理値表を調べ尽くすのと同じ程度の手間がかかる)。節形式にしたとき、

$$\begin{aligned} & \leftarrow q_1, q_2, \dots, q_n, \\ & p \leftarrow q_1, q_2, \dots, q_n, \\ & p \leftarrow , \\ & \leftarrow \end{aligned}$$

のいずれかの形 ($p, q_1, q_2, \dots, q_n$ はいずれも単純命題) をしているとき、この節形式のことを Horn 節と呼ぶ。

$P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ がどれも Horn 節であるとき、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash \neg Q$$

という定理が正しい証明を持てばその証明を、持たなければ持たないということを教えてくれる効率的なアルゴリズムがある。

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash \neg Q$$

を調べるには

$$P_1, P_2, \dots, P_n \models \neg Q$$

を真理値表によって確かめればよい。即ち、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ がすべて真であるとき、 $\neg Q$ も必ず真となることを確かめれば良いわけであるが、それは膨大な時間を要する (真理値表の大きさを考えよ)。また、それがわかったとしてそれから証明を作るにも膨大な時間を要する (完全性定理の証明に従えば、証明を作ることは可能であるが)。これから述べるアルゴリズムは、せいぜい $P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ に現れる単純命題の個数程度の回数で済む。まず、

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash \neg Q$$

は

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q \rightarrow \text{false}$$

と等価であり、さらにこれは

$$P_1, P_2, \dots, P_n, Q \vdash \text{false}$$

と等価であることに注意する。まず

$$P_1$$

$$P_2$$

$$\vdots$$

$$P_n$$

$$Q$$

と、Horn 節を 1 行に 1 つずつ書く。この中で

$$p \leftarrow$$

の形をしている Horn 節を消す。同時に、他の Horn 節の $\leftarrow$ の左側に p があれば、その p もすべて消す。これを繰り返して

$$\leftarrow$$

という行が出来たら、

$$P_1, P_2, \dots, P_n, Q \vdash \text{false}$$

が証明できたことになる。もし途中で行き詰まってしまったら、上の定理は正しい証明を決して持たない。

(例 1)

$$1 : \quad \leftarrow p, q, r$$

$$2 : \quad \leftarrow t$$

$$3 : \quad p \leftarrow r$$

4 : $r \leftarrow$
 5 : $q \leftarrow$
 6 : $s \leftarrow u$
 7 : $u \leftarrow$

1 : $\leftarrow p, q$
 2 : $\leftarrow t$
 3 : $p \leftarrow$
 5 : $q \leftarrow$
 6 : $s \leftarrow u$
 7 : $u \leftarrow$

1 : $\leftarrow q$
 2 : $\leftarrow t$
 5 : $q \leftarrow$
 6 : $s \leftarrow u$
 7 : $u \leftarrow$

1 : $\leftarrow$
 2 : $\leftarrow t$
 6 : $s \leftarrow u$
 7 : $u \leftarrow$

(例 2)

1 : $\leftarrow p, q, s$
 2 : $p \leftarrow q, r$
 3 : $s \leftarrow$

1 : $\leftarrow p, q$

$$2 : \quad p \leftarrow q, r$$

上のアルゴリズムが成功したら ($\leftarrow$) その過程を、証明に書き換えるのは易しい。前提ブロックを

$$\begin{array}{ll} 1 : & P_1 \quad \text{前提より;} \\ 2 : & P_2 \quad \text{前提より;} \\ & \vdots \\ n : & P_n \quad \text{前提より;} \\ n+1 : & Q \quad \text{前提より;} \end{array}$$

として、

$$\begin{array}{l} \vdots \\ p \\ \vdots \\ q \leftarrow r_1, \dots, r_k, p, r'_1, \dots, r'_{k'} \\ \vdots \end{array}$$

から p を消して

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ q \leftarrow r_1, \dots, r_k, r'_1, \dots, r'_{k'} \\ \vdots \end{array}$$

とする過程を、証明の過程で

$$\begin{array}{ll} \vdots & \\ s : & p \\ \vdots & \\ t : & q \leftarrow r_1, \dots, r_k, p, r'_1, \dots, r'_{k'} \\ \vdots & \\ u : & q \leftarrow r_1, \dots, r_k, r'_1, \dots, r'_{k'} \quad \text{導出}(s, t); \end{array}$$

と書き下せばよいだけである。

(練習問題) 次の命題が充足可能かどうか判定せよ。

(1) $(p \wedge q \wedge w \rightarrow \text{false}) \wedge (t \rightarrow \text{false}) \wedge (r \rightarrow q) \wedge (\text{true} \rightarrow r) \wedge (\text{true} \rightarrow q) \wedge (r \wedge u \rightarrow w) \wedge (u \rightarrow s) \wedge (\text{true} \rightarrow u).$

(2) $(p \wedge q \wedge s \rightarrow p) \wedge (q \wedge r \rightarrow p) \wedge (p \wedge s \rightarrow s).$

- (3) $(p_5 \rightarrow p_1) \wedge (p_2 \wedge p_3 \wedge p_5 \rightarrow p_4) \wedge (\text{true} \rightarrow p_5) \wedge (p_5 \wedge p_1 \rightarrow \text{false})$.
- (4) $(\text{true} \rightarrow q) \wedge (\text{true} \rightarrow s) \wedge (w \rightarrow \text{false}) \wedge (p \wedge q \wedge s \rightarrow \text{false}) \wedge (v \rightarrow s) \wedge (\text{true} \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)$.
- (5) $(\text{true} \rightarrow q) \wedge (\text{true} \rightarrow s) \wedge (w \rightarrow \text{false}) \wedge (p \wedge q \wedge s \rightarrow v) \wedge (v \rightarrow s) \wedge (\text{true} \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)$.

9 述語

命題論理の世界では、例えば

ソクラテスは人間である

は、単純命題であり、これはもうそれ以上分解できない文章である。この文章は、自然言語の文法的には

ソクラテス

という主語と、

は人間である

という述語に分解される。主語に当たる部分には、別の名詞

聖徳太子

をもってきて、

聖徳太子は人間である

とか、或いは

鉄腕アトム

をもってきて、

鉄腕アトムは人間である

という文章を作ることが可能である。命題の文法に次を加える。

〈定数〉 ::= ソクラテス | 聖徳太子 | 鉄腕アトム

〈項〉 ::= 〈定数〉

〈単純命題〉 ::= は人間である (〈項〉)

〈単純命題〉 ::= はいずれ死ぬ (〈項〉)

このとき、例えば

(は人間である (聖徳太子) $\wedge$ ($\neg$ はいずれ死ぬ (鉄腕アトム)))

などは命題となる。論理演算に付随するカッコ記号は今まで同様に省略して

は人間である (聖徳太子) $\wedge$ $\neg$ はいずれ死ぬ (鉄腕アトム)

と書いてもよい。ここで、は人間である や はいずれ死ぬ を述語記号と言う。この述語記号は、引き続き () の中には必ず項が1つだけあるので、それを明確にして は人間である/1 や はいずれ死ぬ/1 などと書く。例えば、文法に

〈単純命題〉 ::= と、は兄弟である (〈項〉, 〈項〉)

〈単純命題〉 ::= は、の息子である (〈項〉, 〈項〉)

を付け加えると、

と、は兄弟である/2

や

は、の息子である/2

などという述語が定義される。

と、は兄弟である (ソクラテス, 聖徳太子)

や

は、の息子である (聖徳太子, 鉄腕アトム)

便宜上、自然言語風にこれらを

は、の息子である/2

などという述語が定義される。

ソクラテス と、聖徳太子 は兄弟である

や

聖徳太子 は、鉄腕アトム の息子である

のように記述してもよいことにする。それならばいっそのこと、初めから文法を

〈単純命題〉 ::= 〈項〉 は人間である

〈単純命題〉 ::= 〈項〉 はいずれ死ぬ

〈単純命題〉 ::= 〈項〉 と、〈項〉 は兄弟である

〈単純命題〉 ::= 〈項〉 は、〈項〉 の息子である

としておいても良いように思える。勿論、そうしても構わないのであるが、ここでは述語を明確にするため敢えて述語記号を関数記号のように用い、自然言語のような語順は便宜上の書き換えと考えることにする。なお、自然言語では、項にあたるものにはさらに主語とか目的語、補語などの区別があるが、論理の文法ではその区別はない。

項と述語という概念を導入することによって、次のような定理を考えることが可能になる。

は人間である (X), は人間である (X) $\rightarrow$ はいずれ死ぬ (X) $\vdash$ はいずれ死ぬ (X)

ここで、 X は任意の項である。この証明は、

- | | | |
|----|---|---------------------------|
| 1: | は人間である (X) | 前提より; |
| 2: | は人間である (X) $\rightarrow$ はいずれ死ぬ (X) | 前提より; |
| 3: | はいずれ死ぬ (X) | $\rightarrow$ 左除去 (1, 2); |

と書ける。項として現在のところ考えられるのは、ソクラテス、聖徳太子、鉄腕アトムの3つであるから、上の定理は、3つの定理

は人間である (ソクラテス), は人間である (ソクラテス) $\rightarrow$ はいずれ死ぬ (ソクラテス)

$\vdash$ はいずれ死ぬ (ソクラテス),

は人間である (聖徳太子), は人間である (聖徳太子) $\rightarrow$ はいずれ死ぬ (聖徳太子)

$\vdash$ はいずれ死ぬ (聖徳太子),

は人間である (鉄腕アトム), は人間である (鉄腕アトム) $\rightarrow$ はいずれ死ぬ (鉄腕アトム)

$\vdash$ はいずれ死ぬ (鉄腕アトム)

を含んでいる。
文法にさらに、

$$\langle \text{項} \rangle ::= \text{を生んだ母親} (\langle \text{項} \rangle)$$
$$\langle \text{項} \rangle ::= \text{の夫} (\langle \text{項} \rangle)$$

を付け加える。このとき、

$$\text{の夫} (\text{を生んだ母親} (\text{を生んだ母親} (\text{聖徳太子})))$$

などが項となる。を生んだ母親/1 や の夫/1 は関数記号と呼ばれる。述語記号と関数記号は形上は区別はないが、述語記号は引数に項を代入することによって一つの命題となるが、関数記号は引数に項を代入しても命題にはならない。定数は

$$\text{ソクラテス}/0, \text{聖徳太子}/0, \text{鉄腕アトム}/0$$

のような関数記号の特別な場合と考えてよい。

上のような文法を加えると、項は無限に存在することになる。この場合は、定理

$$\text{は人間である} (X), \text{は人間である} (X) \rightarrow \text{はいずれ死ぬ} (X) \vdash \text{はいずれ死ぬ} (X)$$

は、無限個の定理を含んでいることになる。このような形の定理を、普通の定理 (X などを含まない定理) と区別するために、定理図式ということがある。定理図式の証明も、定理図式と呼ぶ。つまり、定理図式は定理の雛形であり、 X に具体的に項を代入して本当の意味での定理が一つ得られる。証明図式も証明の雛形であり、 X に具体的に項を代入して本当の意味での証明が一つ得られる。

定数、述語、関数として何を認めるかは、考えている対象に依存する。例えば自然数についてペアノの公理から出発するならば

$$\langle \text{定数} \rangle ::= 0$$
$$\langle \text{命題} \rangle ::= \text{は自然数である} (\langle \text{項} \rangle)$$
$$\langle \text{項} \rangle ::= \text{の後続の数} (\langle \text{項} \rangle)$$

が最低限必要である。

複合述語という概念を導入する。述語は定義域が項であり値域が命題である関数と考えることができる。例えば、

$$\text{は人間である} (X)$$

は、 X に具体的に「ソクラテス」とか「を生んだ母親 (ソクラテス)」を代入することによって、1つの命題となる。同様に、

$$\text{と、は兄弟である} (\text{を生んだ母親} (X), Y)$$

も、 X と Y に具体的に項を代入すると命題となる。これは

$$\text{は、の母方の叔父である} (Y, X)$$

ということを述べている。

$$\text{は、の母方の叔父である}/2$$

という述語は実際には文法に定義されていないが、これと同じ意味のことを上の命題で表すことが可能である。このような命題を複合述語と呼ぶ。この複合述語は引数にあたるものが2つあるので、

$$\varphi/2$$

で表すと、 $\varphi(\text{ソクラテス}, \text{聖徳太子})$ は、命題

と、は兄弟である (を生んだ母親 (ソクラテス), 聖徳太子)

のことである。複合述語

と、は兄弟である (を生んだ母親 (ソクラテス), Y)

と

と、は兄弟である (を生んだ母親 (X), Y)

は区別して考えなければならない。

と、は兄弟である (を生んだ母親 (ソクラテス), Y)

を、

$$\varphi/1$$

で表すと、 $\varphi(\text{ソクラテス}, \text{聖徳太子})$ は、命題

と、は兄弟である (を生んだ母親 (ソクラテス), 聖徳太子)

のことであるが、

と、は兄弟である (を生んだ母親 (聖徳太子), ソクラテス)

は、この $\varphi/1$ を用いて表現することはできない。また、

と、は兄弟である (を生んだ母親 (X), X)

も複合述語であるが、これも

と、は兄弟である (を生んだ母親 (X), Y)

と区別して考えなければならない。

と、は兄弟である (を生んだ母親 (X), X)

は、命題の中に同じ項が2回登場するが、この2つの項は同じものでなければならず、

$$\varphi/1$$

で表すと、 $\varphi(\text{鉄腕アトム})$ は

と、は兄弟である (を生んだ母親 (鉄腕アトム), 鉄腕アトム)

という命題を表す。

どのような対象を論じるにせよ、「等しい」という概念は重要である。そこで

$$\langle \text{命題} \rangle ::= = (\langle \text{項} \rangle, \langle \text{項} \rangle)$$

によって、述語 $=/2$ を定義する。 $=(X, Y)$ は、通常は $X = Y$ と表記することにする。等号の意味は、次の推論規則によって明確になる。

$$\frac{}{X = X} \text{等号 1/0}$$

および

$$\frac{X = Y \quad \varphi(X)}{\varphi(Y)} \text{等号 2/2}$$

ここで、 X および Y は任意の項であり、 $\varphi/1$ は任意の述語または複合述語である。
等号に関する次の定理を証明することができる。

$$X = Y \vdash Y = X$$

証明は次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 1: & X = Y \quad \text{前提より;} \\ 2: & X = X \quad \text{等号 1/0;} \\ 3: & Y = X \quad \text{等号 2/(1, 2);} \end{array}$$

ここで、等号 2/2 の推論規則を用いるとき複合述語 $\varphi(\cdot)$ として、項 X を固定して

$$= (\cdot, X) \quad (\text{即ち、} \cdot = X)$$

を考えている。この定理を推論規則化して、

$$\frac{X = Y}{Y = X} \text{等号 3/1}$$

としておこう。

同様に、次の定理が証明できる。

$$X = Y, Y = Z \vdash X = Z$$

証明は次のようになる。

$$\begin{array}{ll} 1: & X = Y \quad \text{前提より;} \\ 2: & Y = Z \quad \text{前提より;} \\ 3: & Y = X \quad \text{等号 3(1);} \\ 4: & X = Z \quad \text{等号 2/(3, 2);} \end{array}$$

ここで、等号 2/2 の推論規則を用いるとき複合述語 $\varphi(\cdot)$ として、項 Z を固定して

$$= (\cdot, Z) \quad (\text{即ち、} \cdot = Z)$$

を考えている。この定理も推論規則化して、

$$\frac{X = Y, Y = Z}{X = Z} \text{等号 4/2}$$

としておく。

等号の推論規則から

$$\begin{aligned}\text{ソクラテス} &= \text{ソクラテス} \\ \text{を生んだ母親(ソクラテス)} &= \text{を生んだ母親(ソクラテス)} \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

などはすべて真の命題となる。即ち、 $=$ の両側が同じ項であればそれはいつでも真の命題である。しかし、このこと (すべて) をまとめて1つの命題として表現することはできない。このことを可能にするために、命題の文法を拡張することにする。まず、変数記号を導入する。

$$\langle \text{変数} \rangle ::= x \mid y \mid z \mid x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid \cdots$$

変数記号は必要に応じていつでも導入できるものとする。そして、 $\varphi/1$ が任意の述語、若しくは複合述語であるときに、

$$\forall x(\varphi(x))$$

は命題であるとする。この命題は、

$$\text{任意の } x \text{ に対して、} \varphi(x) \text{ である}$$

と読む。記号 $\forall$ は、全称記号と呼ぶ。次は、命題の例である。

$$\begin{aligned}\forall x(x = x) \\ \forall x(x = \text{ソクラテス}) \\ \forall x(\text{ソクラテス} = \text{ソクラテス})\end{aligned}$$

同様に、 $\varphi/1$ が任意の述語、若しくは複合述語であるときに、

$$\exists x(\varphi(x))$$

は命題であるとする。この命題は、

$$\text{ある } x \text{ が存在して、} \varphi(x) \text{ である}$$

と読む。記号 $\exists$ は、存在記号と呼ぶ。次は、命題の例である。

$$\begin{aligned}\exists x(x = x) \\ \exists x(x = \text{ソクラテス}) \\ \exists x(\text{ソクラテス} = \text{ソクラテス})\end{aligned}$$

全称記号と存在記号を総称して、量化記号という。 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ を量化記号とする (即ち、各 Q_i は $\forall$ または $\exists$ のいずれか)。 $x_1, x_2, \dots, x_n$ と、述語または複合述語 φ/n に対して

$$Q_1 x_1 (Q_2 x_2 (\cdots (Q_n x_n (\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) \cdots))$$

は命題である。カッコ記号は省略して

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と書き表すことにする。