

塚田 真

2000 年

I. 命題論理.

事実を述べた文章のことを命題という。ある命題が与えられたとき、述べている事実が正しいときその命題は真であるといい、間違っているとき偽であるという。例えば

3 は 2 より大きい

という命題は真であり、

2 乗して負になる実数がある

という命題は偽である。

問 1. 以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) 123 は 321 より小さい.
- (2) 123 は 321 より大きい.
- (3) 999 に 1 を加えると 1000 になる.
- (4) 1000 から 1 を引くと 999 になる.
- (5) 奇数に奇数を加えるといつでも奇数となる.
- (6) 奇数に奇数を掛けるといつでも奇数になる.
- (7) 素数はいつでも奇数である.
- (8) 2 つの素数の和が素数になることがある.
- (9) 3 角形の 3 辺の垂直 2 等分線は必ず 1 点で交わる.
- (10) 4 角形の 4 辺の垂直 2 等分線は必ず 1 点で交わる.

命題はしばしば記号を用いて簡潔に表現される。例えば上の (1),(2),(3),(4) の命題はそれぞれ

$$\begin{aligned}123 &< 321, \\123 &> 321, \\999 + 1 &= 1000, \\1000 - 1 &= 999\end{aligned}$$

と表現される。いま

P

がある命題を表すとする。このとき

$\neg(P)$

は命題であると約束することにする。即ち

$\neg(3 \text{ は } 2 \text{ より大きい})$

とか

$\neg(2 \text{ 乗して負になる実数がある})$

は命題である。 $\neg(P)$ という命題は、 P という命題が真であるときは偽であり、偽であるときは真であることにする。この関係を表にしておくと次のようになる。

P	$\neg(P)$
真	偽
偽	真

例えば

3 は 2 より大きい

という命題は真であるので

$\neg(3 \text{ は } 2 \text{ より大きい})$

は偽の命題であり、

2 乗して負になる実数がある

は偽であるので

$\neg(2 \text{ 乗して負になる実数がある})$

は真の命題である。

問 2. 以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $\neg(123 < 321)$.
- (2) $\neg(123 > 321)$.
- (3) $\neg(999 + 1 = 1000)$.
- (4) $\neg(1000 - 1 = 999)$.
- (5) $\neg(\text{奇数に奇数を加えるといつでも奇数となる})$.
- (6) $\neg(\text{奇数に奇数を掛けるといつでも奇数になる})$.
- (7) $\neg(\text{素数はいつでも奇数である})$.
- (8) $\neg(2 \text{ つの素数の和が素数になることがある})$.
- (9) $\neg(3 \text{ 角形の } 3 \text{ 辺の垂直 } 2 \text{ 等分線は必ず } 1 \text{ 点で交わる})$.
- (10) $\neg(4 \text{ 角形の } 4 \text{ 辺の垂直 } 2 \text{ 等分線は必ず } 1 \text{ 点で交わる})$.

$\neg(\cdot)$ が付いた命題を、それを取り去った命題の否定命題であるということにする。否定命題は、別の言葉や記号で書き換えられることがある。上の (1),(2),(3),(4) はそれぞれ

$$\begin{aligned} 123 &\not< 321, \\ 123 &\not> 321, \\ 999 + 1 &\neq 1000, \\ 1000 - 1 &\neq 999 \end{aligned}$$

と表すことがある。ところで、 P が命題であるならば $\neg(P)$ も命題であるので、この否定命題に更に $\neg(\cdot)$ を付けた

$$\neg(\neg(P))$$

も命題であることになる。 P が真 (偽) であるならば $\neg(P)$ は偽 (真) であるので、 $\neg(\neg(P))$ は真 (偽) であるということになる。表で表すと

P	$\neg(P)$	$\neg(\neg(P))$
真	偽	真
偽	真	偽

このことから、 P という命題と $\neg(\neg(P))$ という命題はいつでも真偽が一致していることがわかる。

問 3. 以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $\neg(123 < 321)$.
- (2) $\neg(123 > 321)$.
- (3) $\neg(999 + 1 \neq 1000)$.
- (4) $\neg(1000 - 1 \neq 999)$.
- (5) $\neg(\neg(\text{奇数に奇数を加えるといつでも奇数となる}))$.
- (6) $\neg(\neg(\text{奇数に奇数を掛けるといつでも奇数になる}))$.
- (7) $\neg(\neg(\text{素数はいつでも奇数である}))$.
- (8) $\neg(\neg(2 \text{ つの素数の和が素数になることがある}))$.
- (9) $\neg(\neg(3 \text{ 角形の } 3 \text{ 辺の垂直 } 2 \text{ 等分線は必ず } 1 \text{ 点で交わる}))$.
- (10) $\neg(\neg(4 \text{ 角形の } 4 \text{ 辺の垂直 } 2 \text{ 等分線は必ず } 1 \text{ 点で交わる}))$.

今度は、2 つの命題

P

および

Q

を考える。このとき

$P \wedge Q$

も命題であると約束することにする。例えば

3 は 2 より大きい $\wedge$ 2 乗して負になる実数がある

は命題である。 $P \wedge Q$ という命題は、命題 P および命題 Q がいずれも真であるとき真であり、いずれか一方或いは両方が偽のときは偽であるとする。これを表で表すと以下ようになる。

P	Q	$P \wedge Q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

従って

3 は 2 より大きい $\wedge$ 2 乗して負になる実数がある

という命題は

2 乗して負になる実数がある

が偽の命題であるので偽の命題ということになる。

問 4. 以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $123 < 321 \wedge 123 = 321$.
- (2) $123 = 321 \wedge 123 > 321$.
- (3) $999 = 1000 \wedge 999 + 1 = 1000$.
- (4) $999 + 1 = 1000 \wedge 1000 - 1 = 999$.
- (5) 奇数に奇数を加えるといつでも奇数となる $\wedge$ 奇数に奇数を掛けるといつでも奇数になる.
- (6) 素数はいつでも奇数である $\wedge$ 2 つの素数の和が素数になることがある.
- (7) 3 角形の 3 辺の垂直 2 等分線は必ず 1 点で交わる $\wedge$ 3 角形の 3 角の 2 等分線は必ず 1 点で交わる.
- (8) 4 角形の 4 辺の垂直 2 等分線は必ず 1 点で交わる $\wedge$ 4 角形の 4 角の 2 等分線は必ず 1 点で交わる.

x, y, z が数を表すとき、

$$x < y \wedge y < z,$$

$$x < y \wedge y = z,$$

$$x = y \wedge y < z,$$

$$x = y \wedge y = z$$

等の命題はそれぞれ簡潔に

$$x < y < z,$$

$$x < y = z,$$

$$x = y < z,$$

$$x = y = z$$

等と表す。

問 5. 次の命題の真偽を判定せよ。

$$(1) 0 < 1 < 2.$$

$$(2) 0 = \pi < 4.$$

$$(3) 1 + 2 = 3 < 4.$$

$$(4) 2 + 3 = 2 \times 3 = 6.$$

また、

$$Q \wedge P$$

も命題であり、命題 $P \wedge Q$ と真偽が一致することは明かである。2 つとも同じ命題を $\wedge$ で結びつけても構わない。即ち

$$P \wedge P$$

は命題であり、表

P	$P \wedge P$
真	真
偽	偽

よにり、 P と真偽は一致することがわかる。3 つの命題 P, Q, R を考えたとき、 $P \wedge Q$ は命題であるので、この命題と Q を $\wedge$ で結んだ

$$(P \wedge Q) \wedge R$$

は命題となる。ここで括弧記号は、命題 P と命題 $Q \wedge R$ を $\wedge$ で結んだ命題

$$P \wedge (Q \wedge R)$$

を区別する為に用いている。四則演算の括弧記号と同じ意味で用いている。この 2 つの命題は、命題としては異なるものであるが、以下の表によってわかるように真偽は一致する。

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$
真	真	真	真	真	真	真
真	真	偽	真	偽	偽	偽
真	偽	真	偽	偽	偽	偽
真	偽	偽	偽	偽	偽	偽
偽	真	真	偽	偽	真	偽
偽	真	偽	偽	偽	偽	偽
偽	偽	真	偽	偽	偽	偽
偽	偽	偽	偽	偽	偽	偽

従って、括弧記号を省略して

$$P \wedge Q \wedge R$$

と書いてこれをどちらに解釈しても構わない。 P, Q, R のすべてが真のときのみ真であり、どれか 1 つでも偽の命題があれば偽となる。

再び、2 つの命題

$$P$$

および

$$Q$$

を考える。このとき

$$P \vee Q$$

も命題であると約束することにする。例えば

3 は 2 より大きい $\vee$ 2 乗して負になる実数がある

は命題である。 $P \vee Q$ という命題は、命題 P および命題 Q のいずれか一方或いは両方真であるとき真であり、いずれも偽のときは偽であるとする。これを表で表すと以下のようになる。

P	Q	$P \vee Q$
真	真	真
真	偽	真
偽	真	真
偽	偽	偽

従って

3 は 2 より大きい $\vee$ 2 乗して負になる実数がある

という命題は

3 は 2 より大きい

が真の命題であるので真の命題ということになる。

問 6. 以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $123 < 321 \vee 123 = 321$.
- (2) $123 = 321 \vee 123 > 321$.
- (3) $999 = 1000 \vee 999 + 1 = 1000$.
- (4) $999 + 1 = 1000 \vee 1000 - 1 = 999$.
- (5) 奇数に奇数を加えるといつでも奇数となる $\vee$ 奇数に奇数を掛けるといつでも奇数になる.
- (6) 素数はいつでも奇数である $\vee$ 2 つの素数の和が素数になることがある.
- (7) 3 角形の 3 辺の垂直 2 等分線は必ず 1 点で交わる $\vee$ 3 角形の 3 角の 2 等分線は必ず 1 点で交わる.
- (8) 4 角形の 4 辺の垂直 2 等分線は必ず 1 点で交わる $\vee$ 4 角形の 4 角の 2 等分線は必ず 1 点で交わる.

x, y が数を表すとき

$$x = y \vee x < y,$$

$$x = y \vee x > y$$

等の命題はそれぞれ簡潔に

$$x \leq y$$

$$x \geq y$$

と書かれる。

問 7. 次の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $1 \leq 2$.
- (2) $1 \leq 1$.
- (3) $\pi \geq 3.14$.
- (4) $3.14 \geq 3 + 0.14$.

問 8. x, y, z が数を表すとき、

$$x = y \leq z$$

および

$$x \not\leq y \neq z$$

はどのような命題と解釈すべきか考えよ。また、この命題を真とするような x, y, z の例を挙げよ。

また、

$$Q \vee P$$

も命題であり、命題 $P \vee Q$ と真偽が一致することは明かである。2 つとも同じ命題を $\vee$ で結びつけても構わない。即ち

$$P \vee P$$

は命題であり、表

P	$P \vee P$
真	真
偽	偽

よりに、 P と真偽は一致することがわかる。3 つの命題 P, Q, R を考えたとき、 $P \vee Q$ は命題であるので、この命題と Q を $\vee$ で結んだ

$$(P \vee Q) \vee R$$

は命題となる。ここで括弧記号は、命題 P と命題 $Q \vee R$ を $\vee$ で結んだ命題

$$P \vee (Q \vee R)$$

を区別する為に用いている。四則演算の括弧記号と同じ意味で用いている。この 2 つの命題は、命題としては異なるものであるが、以下の表によってわかるように真偽は一致する。

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
真	真	真	真	真	真	真
真	真	偽	真	真	真	真
真	偽	真	真	真	真	真
真	偽	偽	真	真	偽	真
偽	真	真	真	真	真	真
偽	真	偽	真	真	真	真
偽	偽	真	偽	偽	真	真
偽	偽	偽	偽	偽	偽	偽

従って、括弧記号を省略して

$$P \vee Q \vee R$$

と書いてこれをどちらに解釈しても構わない。 P, Q, R どれか 1 つでも偽の命題があれば真であり、すべてが偽のときのみ偽となる命題となる。

問 9. P を命題とするとき、命題

$$P \wedge \neg(P)$$

の真偽を確かめよ。

問 10. P を命題とするとき、命題

$$P \vee \neg(P)$$

の真偽を確かめよ。

問 11. P, Q を命題とするとき、命題

$$\neg(P \wedge Q)$$

の真偽を確かめよ。

問 12. P, Q を命題とするととき、命題

$$\neg(P \vee Q)$$

の真偽を確かめよ。

問 13. P, Q を命題とするととき、命題

$$\neg(P) \wedge \neg(Q)$$

の真偽を確かめよ。

問 14. P, Q を命題とするととき、命題

$$\neg(P) \vee \neg(Q)$$

の真偽を確かめよ。

P, Q を命題とするととき、

$$P \rightarrow Q$$

も命題であると約束して、この命題の真偽は以下の表により定まるとする。

P	Q	$P \rightarrow Q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

例えば

$$3 > 2 \rightarrow 2 \text{ 乗して負になる実数がある,}$$

$$2 \text{ 乗して負になる実数がある} \rightarrow 3 > 2,$$

$$3 \leq 2 \rightarrow 2 \text{ 乗して負になる実数がある,}$$

$$2 \text{ 乗して負になる実数はない} \rightarrow 3 > 2$$

はいずれも命題であり、最初の 1 つだけが偽であとの 3 つはいずれも真である。

問 15. 以下の命題の真偽を判定せよ。

(1) $2 \text{ 乗して負になる実数がある} \rightarrow 3 > 2.$

(2) $3 > 2 \rightarrow 2 \text{ 乗して負になる実数がある.}$

(3) $2 \text{ 乗して負になる実数がある} \rightarrow 3 \leq 2.$

(4) $3 > 2 \rightarrow 2 \text{ 乗して負になる実数はない.}$

問 16. P, Q を命題とするととき、以下の命題の真偽を確かめよ。

$$Q \rightarrow P,$$

$$\neg(P \rightarrow Q),$$

$$\neg(Q \rightarrow P),$$

$$\neg(P) \rightarrow \neg(Q),$$

$$\neg(Q) \rightarrow \neg(P).$$

P, Q を命題とするととき、

$$P \leftrightarrow Q$$

も命題であると約束して、この命題の真偽は以下の表により定まるとする。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	真

例えば

$$\begin{aligned} 3 > 2 &\leftrightarrow 2 \text{ 乗して負になる実数がある,} \\ 2 \text{ 乗して負になる実数がある} &\leftrightarrow 3 > 2, \\ 3 \leq 2 &\leftrightarrow 2 \text{ 乗して負になる実数がある,} \\ 2 \text{ 乗して負になる実数はない} &\leftrightarrow 3 > 2 \end{aligned}$$

はいずれも命題であり、最初の 2 つが偽であとの 2 つは真である。

問 17. 以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $2 \text{ 乗して負になる実数がある} \leftrightarrow 3 > 2.$
- (2) $3 > 2 \leftrightarrow 2 \text{ 乗して負になる実数がある}.$
- (3) $2 \text{ 乗して負になる実数がある} \leftrightarrow 3 \leq 2.$
- (4) $3 > 2 \leftrightarrow 2 \text{ 乗して負になる実数はない}.$

問 18. P, Q を命題とすると、以下の命題の真偽を確かめよ。

$$\begin{aligned} Q &\leftrightarrow P, \\ \neg(P &\leftrightarrow Q), \\ \neg(Q &\leftrightarrow P), \\ \neg(P) &\leftrightarrow \neg(Q), \\ \neg(Q) &\leftrightarrow \neg(P). \end{aligned}$$

特別な命題として

真

および

偽

を考える。前者は真の命題であり後者は偽の命題であるとする。従って

$$\neg(\text{真})$$

は偽の命題であり、

$$\neg(\text{偽})$$

は真の命題である。 P をある命題とすると、表

P	真	$P \wedge \text{真}$	$P \vee \text{真}$	偽	$P \wedge \text{偽}$	$P \vee \text{偽}$
真	真	真	真	偽	偽	真
偽	真	偽	真	偽	偽	偽

により命題

$$P \wedge \text{真}$$

および命題

$$P \vee \text{偽}$$

の命題の真偽は命題 P の真偽に一致し、命題

$$P \wedge \text{偽}$$

はいつでも偽の命題で、命題

$$P \vee \text{真}$$

はいつでも真の命題である。

問 19. P を命題とすると、

$$\text{偽} \rightarrow P$$

および

$$P \rightarrow \text{真}$$

はいつでも真であることを示せ。

いままでの説明でしばしばもちいた P, Q, R という変数は、命題を表す変数なので命題変数と呼ばれる。命題変数はどんな命題をも表すが、1つの命題の中に登場する同じ名前の変数は同じ命題を表す。これはちょうど数を表す変数 x に対して

$$x^2 + x + 1$$

という式を考えたとき、最初の x と次の x に違った値を代入してはいけないことと同じである。2つの変数 x, y を用いた式

$$x^2 + y + 1$$

に対しては、第1項にある x と第2項の y に別々の値を代入しても構わない。

関数記号 $f(\cdot)$ を用いて、式

$$x^2 + x + 1$$

を $f(x)$ で表すことにすると、

$$f(1)$$

は式

$$1^2 + 1 + 1$$

を表し、また

$$f(\pi)$$

は式

$$\pi^2 + \pi + 1$$

を表すし、また

$$x^2 + y + 1$$

を関数を用いて

$$g(x, y)$$

で表すとすれば、

$$g(123, 456)$$

は式

$$123^2 + 456 + 1$$

を表すといった記号の用い方にはすでに慣れていであろう。これと全く同様に、命題変数を用いた式、例えば

$$P \vee \neg(P)$$

を関数記号を用いて

$$f(P)$$

で表すと、

$$f(2 > 1)$$

は命題

$$2 > 1 \vee \neg(2 > 1)$$

を表し、また

$$f(1 + 2 = 3)$$

は命題

$$1 + 2 = 3 \vee \neg(1 + 2 = 3)$$

を表すことにする。また

$$(P \wedge Q) \rightarrow P$$

を関数記号

$$\mathbf{g}(P, Q)$$

で表すことにすれば、

$$\mathbf{g}(1 = 2, (-1)^2 < 1)$$

は命題

$$(1 = 2 \wedge (-1)^2 < 0) \rightarrow 1 = 2$$

を表すことになる。

問 20. 命題変数 P, Q, R が用いられた式

$$(P \wedge (\text{奇数に奇数を加えると奇数である} \vee Q)) \rightarrow (P \wedge R)$$

を $\mathbf{f}(P, Q, R)$ で表す。以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $\mathbf{f}(2 \text{ は素数である, 奇数に奇数を掛けると奇数である, } 1 > 0)$.
- (2) $\mathbf{f}(1 \leq 0, \text{ 奇数に奇数を加えると偶数である, } 3 \text{ 三角形の内角の和は } 2 \text{ 直角である})$.
- (3) $\mathbf{f}(2 > 1 > 0, \text{ 素数に素数を掛けると素数である, } \pi \text{ は有理数である})$.

命題変数 $P_1, P_2, \dots, P_n$ が使われた式

$$\mathbf{f}(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

が、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ にいかなる命題を代入しても常に真となると、 $\mathbf{f}(P_1, P_2, \dots, P_n)$ は恒真式（トートロジー）であるという。恒真式であるかを判定するには、 $P_1, P_2, \dots, P_n$ のそれぞれに真または偽を代入した 2^n 個の命題がすべて真であること見れば十分である。

$$P \leftrightarrow \neg(\neg(P))$$

は恒真式である。この式は、命題の 2 重否定命題はもとの命題と真偽が一致することを述べている。

$$P \vee \neg(P)$$

も恒真式である。この式は命題とその否定命題のいずれか一方は必ず真であることを述べている。

$$\neg(P \wedge \neg(P))$$

は恒真式であり、

$$P \wedge \neg(P)$$

が常に偽、即ち命題とその否定命題が同時に真となることはないことを述べている。

$$\text{偽} \rightarrow P,$$

$$P \rightarrow \text{真},$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow P,$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow Q,$$

$$P \rightarrow (P \vee Q),$$

$$Q \rightarrow (P \vee Q),$$

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P),$$

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R),$$

$$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P),$$

$$(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$$

がいずれも恒真式であることは既に調べた。

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) \rightarrow g(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

の形をした式が恒真式であるとき

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) \Rightarrow g(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

と書く。これは $f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ が真であるときはいつでも $g(P_1, P_2, \dots, P_n)$ も真であることと同じである。また

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) \leftrightarrow g(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

の形をした式が恒真式であるとき

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow g(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

と書くことにする。 $f(P_1, P_2, \dots, P_n)$ が真であるときはいつでも $g(P_1, P_2, \dots, P_n)$ も真であり偽であるときはいつでも偽、即ち両者の真偽が全く一致することと同じである。例えば

$$\begin{aligned} \text{偽} &\Rightarrow P, \\ P &\Rightarrow \text{真}, \\ P \wedge Q &\Rightarrow P, \\ P \wedge Q &\Rightarrow Q, \\ P &\Rightarrow P \vee Q, \\ Q &\Rightarrow P \vee Q, \\ P \wedge Q &\Leftrightarrow Q \wedge P, \\ P \wedge (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R, \\ P \vee Q &\Leftrightarrow Q \vee P, \\ P \vee (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R \end{aligned}$$

等と書くことができる。

問 21. 以下を確かめよ。

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\ P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \end{aligned}$$

問 22. 以下を確かめよ。

$$\begin{aligned} \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg(P) \vee \neg(Q), \\ \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg(P) \wedge \neg(Q). \end{aligned}$$

これをド・モルガンの法則という。

問 23. 次を確かめよ。

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(Q) \rightarrow \neg(P).$$

これは対偶について述べたものである。

問 24. 次を確かめよ。

$$\begin{aligned} \text{真} &\rightarrow P \Leftrightarrow P, \\ P &\rightarrow \text{偽} \Leftrightarrow \neg(P), \\ \text{真} &\Rightarrow P \vee \neg(P), \\ P \wedge \neg(P) &\Rightarrow \text{偽}. \end{aligned}$$

特に 2 番目と 4 番目の式は背理法の原理となっている。

問 25. 以下を確かめよ。

$$\begin{aligned} P \wedge (P \rightarrow Q) &\Rightarrow Q, \\ P \rightarrow (Q \rightarrow R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R, \\ (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) &\Rightarrow P \rightarrow R. \end{aligned}$$

II. 命題関数.

例えば次のような文章

x は 0 より大きい

を考えてみる。この x の部分を 1 と読み替えれば

1 は 0 より大きい

となり、真の命題が得られる。 x を -10 に読み替えれば

-10 は 0 より大きい

という偽の命題が得られる。 x を変数と言い、読み替えるという作業を代入するということにする。変数に様々な値を代入することによって、それに応じて様々な命題が得られる。

x	x は 0 より大きい
-1.5	-1.5 は 0 より大きい
0	0 は 0 より大きい
1	1 は 0 より大きい
2	2 は 0 より大きい
π	π は 0 より大きい
.	.
.	.
.	.

x は 0 より大きい

のような文章はそれ自身では真偽は確定しないので命題ではない。そこで用いられている変数に具体的なものを代入してはじめて命題になるので、命題関数と呼ぶことにする。

x は素数である $\wedge$ x は偶数である

や

$x^2 + x + 1$ は素数である

のような命題関数を考えることもできる。この場合最初に登場する x と 2 番目に登場する x には常に同じものが代入されなければならない。

問 1. 命題関数

$$\begin{aligned} x \text{ は素数である} \wedge x \text{ は奇数である}, \\ x \text{ は素数である} \vee x \text{ は奇数である}, \\ x \text{ は素数である} \rightarrow x \text{ は奇数である}, \\ x \text{ は素数である} \leftrightarrow x \text{ は奇数である} \end{aligned}$$

の変数 x に、1, 2, 3, 4, 5 をそれぞれ代入したときの命題の真偽を判定せよ。

問 2. 命題関数

x は東京より北に位置する

の変数 x に、札幌, 仙台, 新潟, 那覇, ニューヨーク, パリ をそれぞれ代入したときの命題の真偽を判定せよ。

問 3. 命題関数

x は日本人である $\wedge x$ は小説家である

および

x は日本人である $\vee x$ は小説家である

の変数 x に、夏目漱石, トルストイ, 諸葛孔明, 聖徳太子, ナポレオン をそれぞれ代入したときの命題の真偽を判定せよ。

命題関数を考えたとき、そこに登場する変数に代入しても良いものは限られたものであることを暗黙のうちに仮定していることがある。例えば上の問 1 の変数 x は自然数を、問 2 の x は都市を、問 3 の x は人を考えるのが普通である。このように変数の値のとり範囲を議論の対象となる宇宙と呼ぶことがある。これは通常関数の定義域にあたるものである。命題関数は議論の対象となる宇宙で定義され、命題に値をとる関数と考えることができる。

命題関数にも関数記号を導入することは都合がよい。 $P(x)$ は

x は実数である $\rightarrow x^2$ は 0 以上である

を表すと約束した場合、

$$P(5)$$

は x に 5 を代入した命題

5 は実数である $\rightarrow 5^2$ は 0 以上である

のことを表し、

$$P(i)$$

は x に虚数単位 i を代入した命題

i は実数である $\rightarrow i^2$ は 0 以上である

を表す。 $P(x)$ は

x は実数である $\rightarrow x^2$ は 0 以上である

を表すと約束するということを、記号

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \text{ は実数である} \rightarrow x^2 \text{ は 0 以上である}$$

によって表し、命題関数 $P(x)$ は

x は実数である $\rightarrow x^2$ は 0 以上である

によって定義されるということにする。

問 4.

$$Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 \text{ は奇数である}$$

と定義する。このとき、命題 $Q(1), Q(2), Q(3), Q(4), Q(5)$ の真偽を判定せよ。

問 5.

$$R(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \text{ は生物である} \wedge x \text{ は卵から生まれる}$$

と定義する。このとき、命題 $R(\text{チューリップ}), R(\text{かぶと虫}), R(\text{くじら}), R(\text{にわとり}), R(\text{金})$ の真偽を判定せよ。

命題関数に登場する変数は 1 個とは限らない。

$$x \text{ は } y \text{ 以上である}$$

も命題関数である。このような命題関数は 2 変数関数

$$P(x, y)$$

などで表す。即ち

$$P(x, y) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \text{ は } y \text{ 以上である}$$

と定義すれば

$$P(1, 2)$$

は命題

$$1 \text{ は } 2 \text{ 以上である}$$

を表し、

$$P(2, 1)$$

は命題

$$2 \text{ は } 1 \text{ 以上である}$$

を表す。また

$$P(5, 5)$$

は命題

$$5 \text{ は } 5 \text{ 以上である}$$

を表す。

命題には変数は 1 つも登場しないが、命題関数と考えることができる。そしてそれを $P(x)$ 等で表しても構わない。例えば

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 2 \text{ は素数である}$$

と定義するならば、 $P(0), P(1), P(2), P(3)$ はすべて同じ命題

$$2 \text{ は素数である}$$

を表すことになる。同様に

$$P(x, y) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^2 + x + 1 \text{ は負ではない}$$

と定義すれば、 $P(1, 0), P(1, 1), P(1, -10)$ はいずれも命題

$$1^2 + 1 + 1 \text{ は負ではない}$$

を表し、 $P(2, -1), P(2, 3), P(2, \pi)$ はいずれも

$$2^2 + 2 + 1 \text{ は負ではない}$$

を表す。

問 6. 命題関数

$$P(x, y) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \wedge \quad x \text{ は奇数である}$$

と定義する。このとき、命題 $P(1, 0)$ および $P(-1, 1)$ の真偽を判定せよ。また

$$Q(x, y) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \wedge \quad y \text{ は奇数である}$$

と定義する。このとき、命題 $Q(1, 0)$ および $Q(-1, 1)$ の真偽を判定せよ。

記号 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ は、ある表現を別の新しい表現で言い替える場合にも用いられる。例えば $>$ という記号は

$$x > y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \text{ が } 0 \text{ より大きい}$$

により定義され、偶数という意味は

$$x \text{ は偶数である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \text{ は } 2 \text{ で割り切れる}$$

で定義されるといった具合に用いられる。

問 7.

$$x|y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} y \text{ は } x \text{ で割り切れる}$$

と定義することにする。以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $2|4$.
- (2) $4|2$.
- (3) $3|4$.
- (4) $4|3$.

問 8.

$$x \star y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \text{ は } y \text{ を書いた}$$

と定義することにする。以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) 夏目漱石 $\star$ 三四郎.
- (2) 森鷗外 $\star$ 暗夜行路.
- (3) トルストイ $\star$ 風と共に去りぬ.
- (4) 手塚治 $\star$ 鉄腕アトム.

2 つの命題関数が $\rightarrow$ で結ばれた

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

がそのような形をしている命題関数の場合に、命題変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ にどのような値を代入した命題も真となるときに

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と書くことにする。例えば

$$x \text{ が実数である} \rightarrow x^2 \geq 0$$

は、

$$x \text{ が実数である}$$

を $P(x)$ とし、

$$x^2 \geq 0$$

を $Q(x)$ とすれば

$$P(x) \rightarrow Q(x)$$

という形をしている。この命題は、 $P(x)$ が偽ならば $Q(x)$ の真偽によらず真であるので、 $P(x)$ が真になるときに $Q(x)$ が真ありさえすれば、 x が何であっても真である。 $P(x)$ が真であるとき、即ち

$$x \text{ が実数である}$$

が真であるときには必ず

$$x^2 \geq 0$$

も真、即ち $Q(x)$ が真であることは言えるので

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

即ち

$$x \text{ が実数である} \Rightarrow x^2 \geq 0$$

と書ける。しかし

$$x \text{ は素数である} \rightarrow x \text{ は奇数である}$$

は x に 2 を代入した場合には偽となるので

$$x \text{ は素数である} \Rightarrow x \text{ は奇数である}$$

とは書くとは間違いである。

問 9. 以下で、 $\Rightarrow$ の使い方が正しいものはどれか。

- (1) x はアメリカ合衆国の大統領である $\Rightarrow x$ はアメリカ合衆国の国籍を持つ.
- (2) x はアメリカ合衆国の国籍を持つ $\Rightarrow x$ はアメリカ合衆国の大統領である.
- (3) x は空を飛ぶ動物である $\Rightarrow x$ は鳥である.
- (4) x は鳥である $\Rightarrow x$ は空を飛ぶ動物である.
- (5) $(a > 0 \wedge ax > ay) \Rightarrow x > y$.
- (6) $(a \geq 0 \wedge ax \geq ay) \Rightarrow x \geq y$.

同様に、命題関数

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

がそのような形をしている場合に、命題変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ にどのようなものを代入した命題も真となるときに

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と書くことにする。例えば

$$x - y > 0 \Leftrightarrow x > y$$

と書くのは正しいが、

$$x^2 > y^2 \Leftrightarrow x > y$$

とは書くのは正しくない。また、

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} Q(x)$$

であるならば、 $P(x)$ と $Q(x)$ は形こそ違え同じ命題を表す ($P(x)$ は $Q(x)$ の言い替えである) という約束なので

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

であることは明かである。

問 10. 以下で、 $\Leftrightarrow$ の使い方が正しいものはどれか。

- (1) $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.
- (2) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \wedge x = 2)$.
- (3) x は空を飛ぶ動物である $\Leftrightarrow x$ は鳥である.
- (4) x は惑星である $\Leftrightarrow x$ は太陽の回りを回っている星である.

ところで、 $P(x)$ および $Q(x)$ が命題関数であるとき、

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

であるならば、

$$P(a)$$

が真であるような a に対しては

$$Q(a)$$

も真であるということが出来る。何故ならば

$$P(x) \rightarrow Q(x)$$

は x が何であっても真であるので

$$P(a) \rightarrow Q(a)$$

は真でなければならないが、 $P(a)$ は真であったので上の命題が真であるためには $Q(a)$ が真でなければならない。これを 3 段論法といい、数学の証明においてよく用いられる重要な推論規則である。

問 9.

$$x \text{ は人間である} \Rightarrow x \text{ はいずれ死ぬ}$$

が言えるとき、

$$\text{ソクラテスは人間である}$$

が真であることから

$$\text{ソクラテスはいずれ死ぬ}$$

が真であることを導け。

等号の記号 $=$ は数学で頻繁に用いられる。等号記号が満たすべき重要な性質として、 $P(x)$ を命題関数とすると、

$$(x = y \wedge P(x)) \Rightarrow P(y)$$

は正しいというものがある。即ち、変数 x, y が何であっても

$$(x = y \wedge P(x)) \rightarrow P(y)$$

は真の命題であるものとする。従って、 a, b があるものとするとき

$$a = b$$

および

$$P(a)$$

がいずれも真であるならば

$$a = b \wedge P(a)$$

は真であるので、3 段論法の推論規則によって

$$P(b)$$

が真である。例えば

$$i^2 = -1$$

および

$$-1 < 0$$

は共に真の命題であるので

$$i^2 < 0$$

が真である。

等号のもう一つの重要な性質として

$$x = x$$

は x に何を代入しても真の命題であるというものがある。等号に関するこの 2 つの重要な性質を用いると、 a, b があるものとしたときに、

$$a = b$$

が真であることから

$$b = a$$

が真であることを導くことができる。いま、

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = a$$

という命題関数を考える。仮定により

$$a = b$$

は真である。また

$$a = a$$

であるので

$$P(a)$$

も真である。従って

$$P(b)$$

が真であることが導かれる。よって

$$b = a$$

は真である。このことから

$$x = y \Rightarrow y = x$$

が言える。

問 11. a, b, c があるものを表すとするとき、

$$a = b$$

および

$$b = c$$

が真であることが言えているときに

$$a = c$$

が真であることを導け。ヒント：命題関数

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = c$$

を考えよ。

問 11 の結果より、

$$x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$$

が言える。

問 12.

$$x \text{ は実数である} \Rightarrow x^2 + 2x + 2 > 0$$

を示せ。

問 13.

x は人間である $\Rightarrow x$ はいずれ死ぬ

が言えるとする。また

x は不死身である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg(x \text{ はいずれ死ぬ})$

と定義する。このとき

スーパーマンは不死身である

が真であることより

$\neg(\text{スーパーマンは人間である})$

が真であることを導け。

III. 集合.

以下、新しい記号と用語を導入する。 x, X を変数とするととき、

$$x \in X$$

は命題関数であるとする。この命題関数は

x は X に属する,

x は X の元である,

x は X の要素である

等と読む。変数 x, X にどのようなものを代入したときに真の命題が得られるかを以下で考えていくことにする。

いま、 $P(x)$ を命題関数であるとする。このとき

$$\{x|P(x)\}$$

は

$P(x)$ を真とする x の全体

と読み、これを 1 つのものと考える。ここで変数 x に他の文字が使われたとしても、即ち

$P(y)$ を真とする y の全体

として

$$\{y|P(y)\}$$

としても同じものを表すとする。これはちょうど

$$\int_a^b f(x)dx \text{ や } \sum_{m=1}^{\infty} x_m$$

をそれぞれ

$$\int_a^b f(y)dy \text{ や } \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

と書いても同じものを表すことと似ている。

問 1. 以下の式を読み下せ。

- (1) $\{n|n \text{ は自然数である}\}$.
- (2) $\{z|z \text{ は絶対値が } 1 \text{ 以下の複素数である}\}$.
- (3) $\{i|i \text{ は偶数である} \wedge i \text{ は素数である}\}$.
- (4) $\{x|x \text{ は日本の都市である} \wedge x \text{ の人口は } 100 \text{ 万人以上である}\}$.
- (5) $\{y|y \text{ は惑星である} \vee y \text{ は衛星である}\}$.

さて、 $\{x|P(x)\}$ に関して次の重要な性質が成立するものとする。

$$P(y) \Leftrightarrow y \in \{x|P(x)\}.$$

即ち、 y としてどんなものを代入しようと

$$P(y) \Leftrightarrow y \in \{x|P(x)\}.$$

が真であるということである。これは $P(y)$ と $y \in \{x|P(x)\}$ の真偽がいつも一致するということもできる。

例えば、 $P(x)$ が

x は 5 以下の素数である

であるならば、変数 y に何を代入しても

y は 5 以下の素数である

の真偽と

$$y \in \{x|x \text{ は 5 以下の素数である} \}$$

の真偽は常に一致する。

y	y は 5 以下の素数である	$y \in \{x x \text{ は 5 以下の素数である} \}$
-1.5	-1.5 は 5 以下の素数である	$-1.5 \in \{x x \text{ は 5 以下の素数である} \}$
0	0 は 5 以下の素数である	$0 \in \{x x \text{ は 5 以下の素数である} \}$
1	1 は 5 以下の素数である	$1 \in \{x x \text{ は 5 以下の素数である} \}$
2	2 は 5 以下の素数である	$2 \in \{x x \text{ は 5 以下の素数である} \}$
π	π は 5 以下の素数である	$\pi \in \{x x \text{ は 5 以下の素数である} \}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

問 2. $P(x)$ として

x は哺乳類である $\wedge x$ は水の中で生活している

および

x は音楽家である $\vee x$ は画家である

の場合に、上のような表を作れ。

補足 (ラッセルのパラドクス). 上に述べた規則

$$P(y) \Leftrightarrow y \in \{x|P(x)\}$$

は数学の専門用語で「内包性の公理図式」と呼ばれているものである。これは一見当たり前のようであるが、これを無制限に認めてしまうと矛盾が生じる。いま $P(x)$ として

$$\neg(x \in x)$$

を考えてみる。このとき

$$P(y) \Leftrightarrow y \in \{x|P(x)\}$$

は y に何を代入しても真であるので、 y として $\{x|\neg(x \in x)\}$ を代入してみると

$$P(\{x|\neg(x \in x)\}) \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in x)\} \in \{x|P(x)\}$$

が真である。これは

$$\neg(\{x|\neg(x \in x)\} \in \{x|\neg(x \in x)\}) \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in x)\} \in \{x|\neg(x \in x)\}$$

が真であるということになって矛盾である。

$P(x)$ が命題関数であるとき $\{x|P(x)\}$ を考えても矛盾が生じないときに限って、これを集合と呼ぶことにする。集合は1つのものと考えることができ、命題関数の変数に自由に代入して構わない。それに対して

$$\{x|\neg(x \in x)\}$$

のようなものは集合ではない。

$$\{x|x \text{ は集合である} \}$$

も集合ではないものの例ある。何が集合で何が集合でないかは簡単に判定できない。以下で集合と認められたものだけを集合とすることにする。

最も単純な集合は n 個のもの $a_1, a_2, \dots, a_n$ を集めた

$$\{x|x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n\}$$

である。この集合を簡単に

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

で表現することにする。ある命題関数を別の命題関数で表すとき $\stackrel{\text{def}}{=}$ を用いたように、あるものを別のもので表すときには $\stackrel{\text{def}}{=}$ を用いる。例えば

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x|x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n\}$$

と書き、

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ は } \{x|x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n\} \text{ によって定義される}$$

と読む。 $\stackrel{\text{def}}{=}$ で結ばれる両者は等しい。即ち

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{x|x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n\}$$

が真である。 a_i を $a_1, a_2, \dots, a_n$ のどれかとすれば

$$a_i = a_1 \vee a_i = a_2 \vee \dots \vee a_i = a_n$$

は真であるので内包性の公理図式より

$$a_i \in \{x|x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_n\}$$

は真である。したがって

$$a_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

である。

空集合と呼ばれる特別な集合は

$$\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{x|\text{偽}\}$$

で定義される。内包性の公理図式において $P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{偽}$ と考えれば

$$\text{偽} \Leftrightarrow y \in \{x|\text{偽}\}$$

であるので y に何を代入しても $y \in \{x|\text{偽}\}$ は偽、即ち

$$y \in \emptyset$$

は偽である。

A および B を集合とする。このとき

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

が成立するときそしてそのときに限り

$$A \subseteq B$$

と書くことにして、

A は B の部分集合である,
 A は B に含まれる,
 B は A を含む

等と読むことにする。即ち

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} x \in A \Rightarrow x \in B$$

と定義する。

$$x \in \emptyset$$

は x に何を代入しても偽であったから、どんな集合 A に対しても

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

である。従って

$$\emptyset \subseteq A$$

が言える。空集合はどんな集合の部分集合もある。また

$$x \in A \Rightarrow x \in A$$

であるので、

$$A \subseteq A$$

も言える。これは A が空集合の場合ですら真である。即ち

$$\emptyset \subseteq \emptyset$$

である。何故ならば

$$x \in \emptyset$$

の x に何を代入しても偽であるので

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset$$

だからである。なお

$$\emptyset \in \emptyset$$

は偽の命題である。

$P(x)$ および $Q(x)$ を命題関数とし

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

であるとする。

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x | P(x)\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | Q(x)\}$$

とするとき、

$$A \subseteq B$$

であることを証明しよう。

$$a \in A$$

が真である場合について考える。

$$A = \{x | P(x)\}$$

であるので内包性の公理図式により

$$P(a)$$

が真である。従って

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

であるので三段論法の推論規則によって

$$Q(a)$$

が真でなければならない。

$$B = \{x | Q(x)\}$$

であるから再び内包性の公理図式より

$$a \in B$$

が真であることが示される。 $a \in A$ が真であるとき

$$a \in A \rightarrow a \in B$$

が真であることが言える。また

$$a' \in A$$

が偽である場合について考えると

$$a' \in B$$

が真であろうと偽であろうと

$$a' \in A \rightarrow a' \in B$$

は真の命題である。

x	$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \rightarrow x \in B$
a	真	真	真
a'	偽	真	真
a'	偽	偽	真

従って

$$x \in A \rightarrow x \in B$$

の x に何を代入しても真であるので

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

である。即ち

$$A \subseteq B$$

が証明された。このように集合 A が集合 B に含まれることを証明する場合、 $a \in A$ が真であるとき $a \in B$ であることを示すところが本質的である。

問 3. 集合 A および B を以下のように定義する。

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \text{ は } 4 \text{ の倍数である} \},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \text{ は偶数である} \}.$$

このとき

$$A \subseteq B$$

を証明せよ。

問 4. 集合 A および B を以下のように定義する。

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{東京, 京都} \},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{東京, 京都, 大阪} \}.$$

このとき

$$A \subseteq B$$

を証明せよ。

集合どうしの等号関係は

$$A = B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

で定義する。従って、集合 A と集合 B が等しいことを証明するときは

$$A \subseteq B$$

と

$$B \subseteq A$$

をそれぞれ証明することが基本である。 $P(x)$ および $Q(x)$ を命題関数とし

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

であるとする。

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x | P(x)\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | Q(x)\}$$

とするとき、

$$A = B$$

であることを証明しよう。まず $A \subseteq B$ を示す。

$$a \in A$$

であるとする。

$$A = \{x | P(x)\}$$

であるので

$$P(a)$$

が真である。従って

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

であるので

$$Q(a)$$

が真でなければならない。

$$B = \{x | Q(x)\}$$

であるから

$$a \in B$$

が真であることが示される。 $a \in A$ が真であるとき $a \in B$ が真であることが示されたので

$$A \subseteq B$$

が証明された。次に、 $B \subseteq A$ を示す。

$$b \in B$$

であるとする。

$$B = \{x | Q(x)\}$$

であるので

$$Q(b)$$

が真である。従って

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

であるので

$$P(b)$$

が真でなければならない。

$$A = \{x | P(x)\}$$

であるから

$$b \in A$$

が真であることが示される。 $b \in B$ が真であるとき $b \in A$ が真であることが示されたので

$$B \subseteq A$$

が証明された。よって

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

であり、

$$A = B$$

が証明された。

問 5.

$$\{1, 2\} = \{2, 1, 2\}$$

を示せ。

上の問題のように要素が有限個の集合については、その要素を書き並べるとき順番が変わってもまた同じものが 2 回以上登場しても集合としては等しいと考える。

問 6. 空集合は唯一つしかないことを証明せよ。即ち

$$x \in A$$

の x に何を代入しても偽であるような集合 A は

$$A = \emptyset$$

であることを示せ。

2 つの集合 A および B に対して

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

される $A \cap B$ および $A \cup B$ は集合であるとする。

$$A \cap B \subseteq A$$

であることを証明しよう。 $a \in A \cap B$ が真であるとする。このとき

$$a \in A \wedge a \in B$$

が真である。従って

$$a \in A$$

が真であることが示される。よって

$$A \cap B \subseteq A$$

である。次に

$$A \subseteq A \cup B$$

であることを証明しよう。 $a \in A$ が真であるとする。このとき

$$a \in A \vee a \in B$$

が真である。よって $a \in A \cup B$ であり

$$A \subseteq A \cup B$$

が示された。

問 7. 以下を示せ。

- (1) $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.
- (2) $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

問 8. A, B, C をそれぞれ集合とする。次を証明せよ。

- (1) $A \cap A = A$.
- (2) $A \cup A = A$.
- (3) $A \cap B = B \cap A$.
- (4) $A \cup B = B \cup A$.
- (5) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- (6) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- (7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

問 9. 以下を示せ。

- (1) $x \in X \wedge X \subseteq Y \Rightarrow x \in Y$.
- (2) $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$.

$$x \notin X \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg(x \in X)$$

と定義する。集合 A, B に対して

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in A \wedge x \notin B\},$$

$$A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

と定義する。

問 10. 以下の集合をより簡単に表せ。

- (1) $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\}$.
- (2) $\{1, 2, 3\} \Delta \{2, 3, 4\}$.

時として考えている集合はすべてある集合の部分集合であることを暗黙的に仮定していることがある。考えている集合をすべて含む集合のことを全体集合とか議論の対象となる宇宙と言うことがある。全体集合は、すべての集合の集合のように大きすぎると前に述べたように矛盾を生じることになる。集合をわかっているものを全体集合にしなければならない。 U を全体集合とすると、 U に含まれる集合 A に対して

$$A^c \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} U \setminus A$$

と表し、これを A の補集合という。補集合を考えるときには何を全体集合と考えているかを明確にしておかなければならない。

問 11. U を全体集合とし、 A および B を U の部分集合とする。このとき次を証明せよ。

- (1) $\emptyset^c = U$.
- (2) $U^c = \emptyset$.
- (3) $(A^c)^c = A$.
- (4) $A \cap A^c = \emptyset$.
- (5) $A \cup A^c = U$.
- (6) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- (7) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

特に最後の 2 つの等式をド・モルガンの法則と呼ぶ。

問 12. U を全体集合とするとき以下の条件は互いに同値であることを示せ。

- (1) $A \subseteq B$.
- (2) $B^c \subseteq A^c$.
- (3) $A \cap B^c = \emptyset$.
- (4) $A^c \cup B = U$.
- (5) $A \cap B = A$.
- (6) $A \cup B = B$.

問 13. 以下を証明せよ。ただし、 U を全体集合とする。

- (1) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- (2) $A \cup \emptyset = A$.
- (3) $A \cap U = A$.
- (4) $A \cup U = U$.
- (5) $A \setminus \emptyset = A$.
- (6) $A \setminus U = \emptyset$.
- (7) $A \setminus A = \emptyset$.
- (8) $A \setminus A^c = A$.
- (9) $\emptyset \setminus A = \emptyset$.
- (10) $U \setminus A = A^c$.
- (11) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- (12) $(A \Delta B)^c = A^c \Delta B^c$.
- (13) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
- (14) $A \Delta \emptyset = A$.
- (15) $A \Delta U = A^c$.
- (16) $A \Delta A^c = U$.
- (17) $A \Delta A = \emptyset$.

U が集合であるとき、いかなる命題関数 $P(x)$ に対しても

$$\{x|x \in U \wedge P(x)\}$$

は集合である。

U を全体集合 (議論の対象となる宇宙) とし、

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x|x \in U \wedge P(x)\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x|x \in U \wedge Q(x)\}$$

とするとき以下の対応関係が成立する。

命題関数	集合
$\{x x \in U \wedge \text{真}\}$	U
$\{x x \in U \wedge \text{偽}\}$	$\emptyset$
$\{x x \in U \wedge \neg(P(x))\}$	A^c
$\{x x \in U \wedge (P(x) \wedge Q(x))\}$	$A \cap B$
$\{x x \in U \wedge (P(x) \vee Q(x))\}$	$A \cup B$
$\{x x \in U \wedge (P(x) \rightarrow Q(x))\}$	$(A \setminus B)^c$
$\{x x \in U \wedge (P(x) \leftrightarrow Q(x))\}$	$(A \Delta B)^c$
$P(x) \Rightarrow Q(x)$	$A \subseteq B$
$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$	$A = B$

問 14.

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{x|x \text{ は集合である} \}$$

が集合であるとするすると矛盾が生じることを示せ。ヒント:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x|x \in U \wedge x \in x\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x|x \in U \wedge x \notin x\}$$

とすると、 U が集合ならば A, B は集合である。特に

$$U \in A$$

である。ところで B は A, B のいずれに属するかを考えよ。

IV. ベキ集合と直積集合.

集合のいくつかの例およびそれ等を表す記号を挙げておく。いずれそれ等の集合についてより詳しく調べることになるであろう。

$$\{n|n \text{ は自然数} \},$$

は集合として認めることにして、 $\mathbb{N}$ で表すことにする。正確な書き方とは言えないが

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots \}$$

である。 $\mathbb{N}$ の要素は無限にある。

$$\{i|i \text{ は整数である} \}$$

も集合であると認めて $\mathbb{Z}$ で表す。これも正確な書き方ではないが

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

である。更に

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{q|q \text{ は有理数である} \},$$

$$\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{x|x \text{ は実数である} \},$$

$$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{z|z \text{ は複素数である} \}$$

で定義される $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はいずれも集合であると認めることにする。これ等の集合の間には

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

の関係がある。

問 1. 以下の命題で真のものはどれか。

- (1) $-1 \in \mathbb{N}$.
- (2) $10^{10^{10}} \in \mathbb{N}$.
- (3) $123 - 321 \in \mathbb{Z}$.
- (4) $0.5 \in \mathbb{Z}$.
- (5) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.
- (6) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
- (7) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$.
- (8) $\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$.
- (9) $x \in \mathbb{Z} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \in \mathbb{N}$.
- (10) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x - 1 \in \mathbb{N}$.

$a \in \mathbb{R}$ および $b \in \mathbb{R}$ に対して

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\},$$

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\},$$

$$[a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\}$$

と定義する。 $\mathbb{R}$ は集合であると認めたので、これ等のはすべて集合である。 (a, b) を开区間、 $[a, b]$ を閉区間といい、 $(a, b]$ および $[a, b)$ を半开区間という。特に、 $a \leq b$ であるならば

$$[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$$

であることに注意せよ。更に、 $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$(a, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a < x\},$$

$$[a, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x\},$$

$$(-\infty, a] \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \leq a\},$$

$$(-\infty, a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x < a\}$$

と定義する。なお、 $-\infty, \infty$ は $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のいずれにも属さないものである。

集合の表記法を拡張しておこう。例えば、 $\mathbb{Z}$ から要素 x を取り出して $2x$ をを作ると偶数ができる。そこで

$$\{2x | x \in \mathbb{Z}\}$$

は偶数の全体の集合を表すものとする。同様に、 $n \in \mathbb{N}$ とすると

$$\{nx | x \in \mathbb{Z}\}$$

は、 n の倍数の集合ということになる。

問 2. 以下を確かめよ。

- (1) $\{x - 1 | x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- (2) $\{x + 1 | x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
- (3) $\{2x | x \in [a, b]\} = [2a, 2b]$.
- (4) $\{x^2 | x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$.

$x \in \mathbb{N}$ かつ $y \in \mathbb{N}$ であるような x, y に対して $x - y$ をを作ると、 x と y をいろいろ変化させることによってすべての整数を作り出せる。また整数以外を作り出すことはできない。そこで

$$\{x - y | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$$

と書ける。また

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{N} \right\}$$

である。さらに

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

(ただし、 i は虚数単位を表す) である。

問 3.

$$\{x^2 | x \in \mathbb{Q}\} = \{x | x \in \mathbb{Q} \wedge x \geq 0\}$$

は正しいか？

$\mathbb{R}$ 上のすべての开区間の集合は

$$\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

と書かれ、すべての閉区間の集合は

$$\{[x, y] | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

と書かれる。このどちらの集合も、要素はすべて集合であり数ではない。「すべての集合」の集合を考えると矛盾を生じることが既に述べたが、「要素がすべて集合」であるような集合を考えることはいつでもいけなとは言っていない。それどころか、集合の集合を考えることは数学では極めて頻繁に起こることである。例えばある平面上の直線の集まりを考えたとき、この集まりの要素である直線 1 本 1 本はまた平面上の点の集りである。要素が集合である集合 (集合の集合) のことを集合族という。

$$\{\{\text{札幌, 函館}\}, \{\text{仙台, 千葉}\}\}$$

は集合族である。これは集合

$$\{\text{札幌, 函館, 仙台, 千葉}\}$$

と同じものではない。前者の要素は集合 $\{\text{札幌, 函館}\}$ および $\{\text{仙台, 千葉}\}$ の 2 つであり、後者の要素は札幌, 函館, 仙台, 千葉の 4 つある。

問 4.

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

とする。以下の命題の中で正しいものはどれか。

- (1) $0.5 \in (0, 1)$.
- (2) $0.5 \in \mathcal{A}$.
- (3) $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$.
- (4) $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$.
- (5) $(0, 1) \in \mathcal{A}$.
- (6) $\{0, 1\} \in \mathcal{A}$.
- (7) $[0, 1] \in \mathcal{A}$.
- (8) $(0, 1) \subseteq \mathcal{A}$.
- (9) $\{0, 1\} \subseteq \mathcal{A}$.
- (10) $[0, 1] \subseteq \mathcal{A}$.

ある集合 A が与えられたとき、この集合に含まれるすべての部分集合の集合のことを集合 A のべき集合と呼び 2^A で表す。即ち

$$2^A \stackrel{\text{def}}{=} \{X | X \subseteq A\}$$

と定義され、

$$B \in 2^A \Leftrightarrow B \subseteq A$$

を満たす。例えば

$$2^{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\},$$

$$2^{\{1, 2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$$

$$2^{\{1, 2, 3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

である。また、いつでも

$$\emptyset \in 2^A,$$

$$A \in 2^A$$

は真である。

問 5. 以下の集合のベキ集合を求めよ。

- (1) $\{\text{太陽}\}.$
- (2) $\{\{\text{地球}\}\}.$
- (3) $\{\{\text{太陽}\}, \{\text{地球, 月}\}\}.$
- (4) $\{\text{地球, 月}, \{\text{地球, 月}\}\}.$
- (5) $\{\text{太陽}, \{\text{太陽}\}, \{\text{太陽, 月}\}\}.$
- (6) $\{\text{地球, 月}, \text{地球, 月}\}.$

問 6. 集合 $\{1, 2, 3\}$ のベキ集合の要素は全部で幾つあるか。また集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ のベキ集合の要素は全部で幾つあるか。更に、 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \leq n\}$ のベキ集合の要素は全部で幾つあるか。

空集合には要素は存在しないが、空集合に含まれる部分集合は 1 つだけある。それは空集合自信である。従って

$$2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$$

である。ここで

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

であることに注意せよ。なぜならば、 $\emptyset \in \{\emptyset\}$ は真であるが $\emptyset \in \emptyset$ は偽だからである。即ち、 $\{\emptyset\}$ には要素が 1 つあり、 $\emptyset$ には要素は 1 つもない。更に

$$2^{2^{\emptyset}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$2^{2^{2^{\emptyset}}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

である。

問 7. 以下の命題の真偽を述べよ。

- (1) $\mathbb{N} \in 2^{\mathbb{R}}.$
- (2) $\mathbb{N} \subseteq 2^{\mathbb{R}}.$
- (3) $2^{\mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{R}}.$
- (4) $2^{\mathbb{N}} \subseteq 2^{\mathbb{R}}.$
- (5) $(x, y) \in 2^{\mathbb{R}}.$
- (6) $(x, y) \in [x, y].$
- (7) $(x, y) \subseteq [x, y].$
- (8) $(x, y) \subseteq 2^{\mathbb{R}}.$
- (9) $\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} \in 2^{\mathbb{R}}.$
- (10) $\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} \subseteq 2^{\mathbb{R}}.$
- (11) $\{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} \subseteq \{[x, y] | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}.$

問 8. A を集合とする。このとき以下を示せ。ただし、補集合をとるときは A を全体集合と考えるものとする。

- (1) $X \in 2^A \wedge Y \in 2^A \Rightarrow X \cap Y \in 2^A.$
- (2) $X \in 2^A \wedge Y \in 2^A \Rightarrow X \cup Y \in 2^A.$
- (3) $X \in 2^A \Rightarrow X^c \in 2^A.$

問 9. 以下に挙げる集合の要素を 5 つ挙げよ。

- (1) $2^{\mathbb{R}} \setminus 2^{\mathbb{Q}}.$
- (2) $2^{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}.$

もの a および b に対して、記号 $\langle a, b \rangle$ はものであるとする。これを順序対と呼び

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

を満たすと約束する。これに対して、集合 $\{a, b\}$ は非順序対と呼ばれることがある。非順序対は

$$\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

を満たさない。例えば

$$\{1, 2\} = \{2, 1\} \rightarrow 1 = 2 \wedge 2 = 1$$

は偽の命題であるからである。上に述べた約束から

$$a = b \Leftrightarrow \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$$

あるいは同じことであるが

$$a \neq b \Leftrightarrow \langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$$

である。

例えば、 a を集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ の要素から取り出して、 b を集合 $\{3, 4, 5\}$ の要素から取り出して作ることのできる順序対 $\langle a, b \rangle$ は、表からわかる通り $\{1, 2, 3, 4\}$ の要素数が 4 個、 $\{3, 4, 5\}$ の要素数が 3 であるので $4 \times 3 = 12$ 個ある。

	3	4	5
1	$\langle 1, 3 \rangle$	$\langle 1, 4 \rangle$	$\langle 1, 5 \rangle$
2	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 2, 4 \rangle$	$\langle 2, 5 \rangle$
3	$\langle 3, 3 \rangle$	$\langle 3, 4 \rangle$	$\langle 3, 5 \rangle$
4	$\langle 4, 3 \rangle$	$\langle 4, 4 \rangle$	$\langle 4, 5 \rangle$

一般に、集合 A および B が与えられたとき、 a を集合 A の要素から取り出して、 b を集合 B の要素から取り出して作ることのできる順序対 $\langle a, b \rangle$ の全体の集合を A と B の直積集合といい、 $A \times B$ で表す。即ち

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle a, b \rangle | a \in A \wedge b \in B\}.$$

と定義され

$$\langle a, b \rangle \in A \times B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \in A \wedge b \in B$$

を満たす。上の例の場合、

$$\{1, 2, 3, 4\} \times \{3, 4, 5\} = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 5 \rangle\}$$

である。どんな集合 A に対しても

$$\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$$

である。

問 10. 以下の集合を、要素をすべて書き並べる形で表せ。

- (1) $\{\text{桃太郎}, \text{雉}, \text{猿}, \text{犬}\} \times \{\text{三蔵法師}, \text{孫悟空}, \text{猪八戒}, \text{沙悟浄}\}.$
- (2) $\{\text{英雄}, \text{運命}, \text{田園}, \text{第九}\} \times \{\text{ベーム}, \text{カラヤン}, \text{バーンスタイン}\}.$
- (3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$

問 11. m および n を自然数とする。このとき直積集合

$$\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$$

の要素の数は全部で幾つあるか。

問 12. 集合 A, B, C を

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{2, 3, 4\},$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{5, 6, 7\}$$

と定義する。このとき以下の集合を、要素をすべて書き並べる形で表せ。

- (1) $(A \cap B) \times C.$
- (2) $(A \times C) \cap (B \times C).$
- (3) $C \times (A \cap B).$
- (4) $(C \times A) \cap (C \times B).$
- (5) $(A \cup B) \times C.$
- (6) $(A \times C) \cup (B \times C).$
- (7) $C \times (A \cup B).$
- (8) $(C \times A) \cup (C \times B).$

問 13. A, B, C を集合とするとき、以下を示せ。

- (1) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
- (2) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$.
- (3) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
- (4) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

問 14. 直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の要素 $\langle a, b \rangle$ を、 $x - y$ 座標平面の $x = a$ かつ $y = b$ である点に対応させたとき、以下の集合を図示せよ。

- (1) $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$.
- (2) $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$.
- (3) $(1, 2) \times (1, 2)$.
- (4) $[1, 2] \times [1, 2]$.
- (5) $\{1, 2\} \times (1, 2)$.
- (6) $(1, 2) \times \{1, 2\}$.
- (7) $\{1, 2\} \times [1, 2]$.
- (8) $[1, 2] \times \{1, 2\}$.
- (9) $(1, 2) \times [1, 2]$.
- (10) $[1, 2] \times (1, 2)$.
- (11) $\{\langle 1, x \rangle \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
- (12) $\{\langle x, 1 \rangle \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
- (13) $\{\langle x, x^2 \rangle \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- (14) $\{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge |x - y| \leq 1\}$.

V. 関係.

集合 A および B にながえられたとき、 $A \times B$ の部分集合のことを A と B の間の関係という。即ち

$$R : A \text{ と } B \text{ の間の関係} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R \subseteq A \times B$$

と定義する (“ $R : A$ と B の間の関係” は、“ R は A と B の間の関係である” と読む)。特に、 A と A の間の関係のことを、 A 上の関係という。即ち

$$R : A \text{ 上の間の関係} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R \subseteq A \times A$$

である。 R が A と B の間の関係であるとき、もの a および b に対して $\langle a, b \rangle \in R$ と書く代わりに aRb と書くことにする。即ち

$$aRb \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \langle a, b \rangle \in R$$

と定義する。 aRb は命題である。例えば、 $\{0, 1\}$ と $\{2, 3\}$ の間の関係 R を

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

で定義すれば

$$\begin{array}{l} 0R2, \\ 1R3 \end{array}$$

はいずれも真の命題であり

$$\begin{array}{l} 0R3, \\ 1R2 \end{array}$$

はいずれも偽の命題である。

問 1. $\mathbb{R}$ 上の関係 R を

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x \text{ は } y \text{ よりも小さい} \}$$

と定義する。以下の命題の真偽を判定せよ。

- (1) $1R2$.
- (2) $\pi R3$.
- (3) $\neg(1R(0.5))$.
- (4) $3R5 \wedge 5R3$.
- (5) $xRy \Rightarrow (x+1)R(y+1)$.

この関係 R はしばしば使われるので特別な記号 $<$ が用いられる。即ち、 $<$ は

$$< \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x \text{ は } y \text{ よりも小さい} \}$$

によって定義される集合であると考えられる。

問 2. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を $x-y$ 座標平面と 1 対 1 に対応させたとき、 $\mathbb{R}$ 上の関係 $<$ を図示せよ。また、 $\mathbb{R}$ 関係 $\leq, >, \geq$ および $=$ を図示せよ。さらに、

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge |x - y| < 1 \},$$

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge |x| = |y| \},$$

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge [x] = [y] \}$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上の関係 R, S および T を図示せよ。ただし、 $[\cdot]$ はガウス記号とする。即ち、 $x \in \mathbb{R}$ に対して $[x]$ は x を越えない最大整数である。

2 の変数 x, y を持つ命題関数 $P(x, y)$ があるとき、集合 A, B に対して

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \wedge P(x, y) \}$$

で定義される A と B の間の関係 R を考えると、 $x \in A$ と $y \in B$ に対しては

$$xRy \Leftrightarrow P(x, y)$$

が成立する。この関係 R を $P(x, y)$ により定義される A と B の間の関係という。このような関係 R を定義する際、 A と B の間の関係を

$$xRy \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P(x, y)$$

で定義すると書くことが多い。

問 3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の関係 Q を

$$xQy \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} y \text{ は } x \text{ で割り切れる}$$

で定義する。関係 Q を集合の要素を書き並べる形で表せ。

問 4.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{島崎藤村, 夏目漱石, 森鷗外, 志賀直哉} \},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{夜明け前, 破戒, 坊ちゃん, こころ, 舞姫, 雪国} \}$$

とし、 A と B の間の関係 W を

$$xWy \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \text{ は } y \text{ を書いた}$$

で定義する。関係 W を集合の要素を書き並べる形で表せ。

問 5.

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3\}$$

とし、 A と 2^A の間の関係 $\mathcal{E}$ を

$$x \mathcal{E} X \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in X$$

により定義し、また 2^A 上の関係 $\mathcal{S}$ を

$$X \mathcal{S} Y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X \subseteq Y$$

により定義する。これ等 2 つの関係をそれぞれ要素を書き並べる形で表せ。

問 6. 集合 $\{0, 1\}$ 上の関係をすべて挙げよ。

集合 A および B に対して $\emptyset \subseteq A \times B$ であるので、 $\emptyset$ は A と B の間の関係の 1 つである。ただしこの関係は、いかなる $a \in A$ および $b \in B$ に対しても $a \emptyset b$ が真となることはない。一方、 $A \times B \subseteq A \times B$ であるので、 $A \times B$ も A と B の間の関係である。この関係は、すべての $a \in A$ および $b \in B$ に対して $a(A \times B)b$ が真である。集合 A 上の

$$\Delta_A \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, x \rangle | x \in A\}$$

により定義される関係 Δ_A を対角線集合と呼ぶことがある。このとき

$$x \Delta_A y \Leftrightarrow x = y$$

である。即ち対角線集合の関係は等号関係であると言える。 A 上の関係 R に対して、

$$R : \text{反射的} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A \Rightarrow xRx)$$

と定義する。

問 7.

$$R : \text{反射的} \Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R$$

であることを証明せよ。

集合 A と集合 B の間の関係 R に対して、

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y \rangle | yRx\}$$

と定義する。 R^{-1} は B と A の間の関係となる。このとき

$$xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$$

である。従って

$$(R^{-1})^{-1} = R$$

および

$$\Delta_A^{-1} = \Delta_A$$

であることに注意せよ。例えば、 $\mathbb{R}$ 上の関係において

$$<^{-1} = >,$$

$$>^{-1} = < ,$$

$$\leq^{-1} = \geq ,$$

$$\geq^{-1} = \leq$$

である。

問 8. また、 M を男性の集合、 F を女性の集合とし

$$\begin{aligned} R_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in M \wedge y \in F \wedge x \text{ は } y \text{ の夫である} \}, \\ R_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in F \wedge y \in M \wedge x \text{ は } y \text{ の妻である} \}, \\ R_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in M \wedge y \in F \wedge y \text{ は } x \text{ の妻である} \}, \\ R_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in F \wedge y \in M \wedge y \text{ は } x \text{ の夫である} \}, \\ R_5 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in M \wedge y \in F \wedge y \text{ は } x \text{ の妻である} \}, \\ R_6 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in F \wedge y \in M \wedge y \text{ は } x \text{ の夫である} \} \end{aligned}$$

とすると互いに逆関係になっているものはどれか。

関係 R と S に対して、

$$\begin{aligned} \text{関係 } R \text{ は関係 } S \text{ より強い} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (xRy \Rightarrow xSy), \\ \text{関係 } R \text{ は関係 } S \text{ より弱い} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (xSy \Rightarrow xRy) \end{aligned}$$

と定義する。

問 9.

$$\begin{aligned} \text{関係 } R \text{ は関係 } S \text{ より強い} &\Leftrightarrow R \subseteq S, \\ \text{関係 } R \text{ は関係 } S \text{ より弱い} &\Leftrightarrow S \subseteq R \end{aligned}$$

であることを証明せよ。

問 10. $\mathbb{R}$ 上の関係 $<, >, =, \leq, \geq$ の強弱を述べよ。更にこれ等と

$$\begin{aligned} xR_1y &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^2 < y^2, \\ xR_2y &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^2 > y^2, \\ xR_3y &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^2 = y^2, \\ xR_4y &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^2 \leq y^2, \\ xR_5y &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^2 \geq y^2 \end{aligned}$$

により定義される関係達との強弱を調べよ。

集合 A 上の関係 R に対して

$$R : \text{対称的} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (xRy \Rightarrow yRx)$$

と定義する。

問 11.

$$R : \text{対称的} \Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$$

であることを証明せよ。さらに

$$R : \text{対称的} \Leftrightarrow R = R^{-1}$$

を証明せよ。

一方

$$R : \text{反対称的} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$$

と定義する。即ち

問 12.

$$R : \text{反対称的} \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$$

であることを証明せよ。

更に、

$$R : \text{推移的} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

とする。そして

$$R : \text{順序関係} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R : \text{反射的かつ反対称的かつ推移的關係},$$

$$R : \text{同値関係} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R : \text{反射的かつ対称的かつ推移的關係}$$

と定義する。

問 13. $\mathbb{N}$ 上の関係

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge y \text{ は } x \text{ で割り切れる} \}$$

および $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の関係

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \rangle \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge u \in \mathbb{N} \wedge v \in \mathbb{N} \wedge xv = yu \}$$

に対して、反射的か対称的か反対称的か推移的か調べよ。

集合 A と B の間の関係 f に対して、

$$f : A \rightarrow B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A \Rightarrow \{y \mid y \in B \wedge xfy\} \neq \emptyset) \wedge (xfy \wedge x fz \Rightarrow y = z)$$

と定義する。 $f : A \rightarrow B$ を、 f は A で定義され B に値をとる写像 (または関数) であると読む (記号 $\rightarrow$ は 2 つの命題を結ぶ “ならば” の意味での $\rightarrow$ を同じものを用いるが、文脈からこれ等を混同することはないであろう。ならばの意味で用いるときは $\rightarrow$ の両側に命題がくるが、写像の意味で用いる場合は両側に集合であるものがくる)。 $x \in A \Rightarrow \{y \mid y \in B \wedge xfy\} \neq \emptyset$ は、どの $x \in A$ に対しても xfy である $y \in B$ が 1 以上は存在することを述べている。また、 $xfy \wedge x fz \Rightarrow y = z$ は、 xfy である y はただ 1 つでなければならぬと述べている。

問 14.

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, x^{-1} \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0 \},$$

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x^2, x \rangle \mid x \in \mathbb{R} \},$$

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, 0 \rangle \mid x \in \mathbb{Q} \} \cup \{ \langle x, 1 \rangle \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \}$$

と定義する。 $\mathbb{R}$ で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる写像はどれか。

f が $A \rightarrow B$ であるとは、どの $x \in A$ に対しても xfy を満たすもの $y \in B$ は必ず存在してしかもただ 1 つであるので、この y を $f(x)$ で表し、 x の f による像という。このとき

$$x \in A \Rightarrow \langle x, f(x) \rangle \in f$$

である。

問 15.

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle \text{北海道, 札幌} \rangle, \langle \text{神奈川, 横浜} \rangle, \langle \text{愛知, 名古屋} \rangle \}$$

とするとき、 f はどこからどこへの写像と考えられるか。また $f(\text{北海道})$, $f(\text{神奈川})$ および $f(\text{愛知})$ を求めよ。

集合 A の対角線集合は $\Delta_A : A \rightarrow A$ であり、すべての $x \in A$ に対して

$$\Delta_A(x) = x$$

である。 Δ_A を恒等写像と呼ぶことがある。一方、集合 A と 1 点集合 b に対して

$$f \stackrel{\text{def}}{=} A \times \{b\}$$

とすると $f : A \rightarrow \{b\}$ であり、すべての $x \in A$ に対して

$$f(x) = b$$

である。この f を定値写像ということがある。

一般に $f : A \rightarrow B$ のとき、集合 A を f の定義域といい、集合 B の部分集合である $\{f(x) | x \in A\}$ を f の値域という。例えば

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, x^2 - 1 \rangle | x \in \mathbb{R}\}$$

と定義すると、 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であり、 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = x^2 - 1$$

である。 f の定義域は $\mathbb{R}$ であり、値域は $[-1, \infty)$ である。なお、このような写像を定義する場合

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

と表現する場合が多い。または、

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 - 1$$

と表現する場合もある。また、

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, x \rangle | x \geq 0\} \cup \{\langle x, -x \rangle | x < 0\}$$

で定義される写像の場合は、普通は

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{if } x \geq 0; \\ -x, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

で定義すると書く。この g の定義域は $\mathbb{R}$ であり、値域は $[0, \infty)$ である。

問 16.

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$g : \mathbb{N} \ni x \mapsto x \bmod 10,$$

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

とする。 $f(-0.5), g(123), h(\pi)$ を求めよ。またそれぞれの定義域、値域を求めよ。ただし、 $x \bmod 10$ は x を 10 で割った余りを表す。

2 つの写像 $f : A \rightarrow B$ および $g : C \rightarrow D$ に対して

$$f \text{ は } g \text{ の制限である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in A \Rightarrow (x \in C \wedge f(x) = g(x)),$$

$$f \text{ は } g \text{ の拡張である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in C \Rightarrow (x \in A \wedge g(x) = f(x))$$

問 17.

f は g の制限である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f \subseteq g$,

f は g の拡張である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} g \subseteq f$

を示せ。

特に、 $f : A \rightarrow B$ かつ $C \subseteq A$ であるとき

$$f \upharpoonright_C (x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \quad (x \in C)$$

と定義すると $f \upharpoonright_C : C \rightarrow B$ であり $f \upharpoonright_C$ は f の C への制限であるという。

定義域が等しい写像 $f : A \rightarrow B$ および $g : A \rightarrow C$ に対して

$$x \in A \Rightarrow f(x) = g(x)$$

であるとする、或いは同じことであるが

$$\{x | x \in A \wedge f(x) = g(x)\} = A$$

とすると

$$f = g$$

が言える。何故ならば $\langle x, y \rangle \in f$ とすると、 $x \in A$ かつ $y = f(x)$ であり、仮定より $f(x) = g(x)$ だから $y = g(x)$ 、即ち $\langle x, y \rangle \in g$ が言える。よって $f \subseteq g$ が示される。 $g \subseteq f$ も同様に示される。従って $f = g$ である。

例えば

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x-1)(x+1) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

とすると $f = g$ であり $f \neq h$ である。この例において、すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = g(x)$ であり、このことを

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$$

と表す。一方、 $1 \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(1) = h(1)$$

であるので、 $f(x) = h(x)$ である $x \in \mathbb{R}$ が存在すると言える。このことを

$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = h(x)$$

と表す。しかし

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = h(x)$$

とは言えない。

一般に、命題関数 $P(x)$ が与えられたとき、集合 A に属するすべての要素 a に対して $P(a)$ が真であるということを

$$\forall x \in A, P(x)$$

と書き

すべての $x \in A$ に対して $P(x)$,

任意の $x \in A$ に対して $P(x)$,

勝手な $x \in A$ に対して $P(x)$,

どんなの $x \in A$ に対しても $P(x)$

等と読む。これは

$$x \in A \Rightarrow P(x)$$

と同じ意味であり、また

$$\{x | x \in A \wedge P(x)\} = A$$

とも同じ意味である。特別な場合として

$$\forall x \in \emptyset, P(x)$$

はいつでも真の命題である。

一方、集合 A の中に少なくとも 1 つは $P(a)$ が真となるような a が存在するとき

$$\exists x \in A, P(x)$$

と書き、

ある $x \in A$ に対して $P(x)$,
 適当な $x \in A$ に対して $P(x)$,
 $x \in A$ が存在して $P(x)$,
 $P(x)$ である $x \in A$ が存在する

等と読む。これは

$$\{x | x \in A \wedge P(x)\} \neq \emptyset$$

であることと同じ意味である。特別な場合として

$$\exists x \in \emptyset, P(x)$$

はいつでも偽の命題である。 A が空集合でなければ

$$(\forall x \in A, P(x)) \Rightarrow (\exists x \in A, P(x))$$

は正しい。逆は、 A が 1 点集合のときのみ正しい。

$P(x)$ は一般に x に具体的ものを代入しない限り真偽が定まらないので命題ではないが、 $\forall x \in A, P(x)$ や $\exists x \in A, P(x)$ はこれだけで真偽が定まる命題である。例えば

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

は真の命題であるが

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = x - 1$$

は偽の命題である。しかし

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = x - 1$$

は真の命題である。

問 18. 以下の命題を読み、真偽を述べよ。

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 \in \mathbb{N}$.
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}, n - 1 \in \mathbb{N}$.
- (3) $\forall q \in \mathbb{Q}, \sqrt{q} \in \mathbb{Q}$.
- (4) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.
- (5) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
- (6) $\exists n \in \mathbb{N}, n + 1 \notin \mathbb{N}$.
- (7) $\exists n \in \mathbb{N}, n - 1 \notin \mathbb{N}$.
- (8) $\exists q \in \mathbb{Q}, q^2 = 2$.
- (9) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.
- (10) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$.

問 19. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で以下の条件を満たす例をそれぞれ 2 つずつ作れ。

- (1) $\forall x \in [0, 1], 0 < f(x) < 1.$
- (2) $\forall x \in [0, 1], \neg(0 < f(x) < 1).$
- (3) $\neg(\forall x \in [0, 1], 0 < f(x) < 1) \wedge (\exists x \in [0, 1], 0 < f(x) < 1).$
- (4) $\neg(\exists x \in [0, 1], 0 < f(x) < 1).$
- (5) $\exists x \in [0, 1], \neg(0 < f(x) < 1).$

定理. $P(x)$ を命題関数、 A を集合とする。このとき

$$\neg(\forall x \in A, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in A, \neg(P(x)))$$

が成立する。

証明.

$$\{x|x \in A \wedge P(x)\} \neq A \Leftrightarrow \{x|x \in A \wedge P(x)\}^c \neq \emptyset$$

および

$$\{x|x \in A \wedge P(x)\}^c = \{x|x \in A \wedge \neg(P(x))\}$$

より証明される。□

系. $P(x)$ を命題関数、 A を集合とする。このとき

$$\neg(\exists x \in A, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in A, \neg(P(x)))$$

が成立する。

上の定理および系をド・モルガンの法則と呼ぶ。

命題関数 $P(x)$ および集合 A に対して

$$(\exists! x \in A, P(x)) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((\exists x \in A, P(x)) \wedge ((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow x = y))$$

と定義する。 $\exists! x \in A, P(x)$ は

$$\begin{aligned} & x \in A \text{ が一意に存在して } P(x), \\ & x \in A \text{ が唯一存在して } P(x), \\ & P(x) \text{ を満たす } x \in A \text{ が } 1 \text{ つだけ存在する} \end{aligned}$$

等と読む。

VI. 像と逆像.

しばらくの間、写像 $f: A \rightarrow B$ を任意に固定して話をすすめる。 $X \subseteq A$ に対して

$$f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x)|x \in X\}$$

と定義して、これを X の f による像という。またこれによって 2^A から 2^B への写像 f が定義される。これは本来の A から B への写像とは別ものであるが、文脈から区別がつくので同じ記号 f を用いる。なお

$$f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{y|\exists x \in X, y = f(x)\}$$

とも書ける。一方、 $Y \subseteq B$ に対して

$$f^{-1}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x|f(x) \in Y\}$$

と定義して、これを Y の f による逆像という。 $f^{-1}: 2^B \rightarrow 2^A$ と考えることができる。

問 1.

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^3 - x \quad (x \in \mathbb{R})$$

に対して、 $f([-1, 1])$ および $f^{-1}([-1, 1])$ を求めよ。

$$\begin{aligned} f : 1 \text{ 対 } 1 \text{ 写像} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y) \\ &\Leftrightarrow (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \text{上への写像} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(A) = B \\ &\Leftrightarrow \forall y \in B, (\exists x \in A, y = f(x)) \end{aligned}$$

とする。

問 2. 以下の写像が 1 対 1 写像であるか上へのであるかを判定せよ。

$$(1) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$(2) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^3 - x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$(3) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$(4) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \arctan(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

f が 1 対 1 上への写像であれば、 A と B の間の関係としての f の逆関係 f^{-1} は B から A への写像となる。 $f^{-1} : B \rightarrow A$ を f の逆写像と呼ぶ。これは上で定義した逆像としての $f^{-1} : 2^B \rightarrow 2^A$ とは別物であるが、これも文脈からどちらの意味で用いられるかが区別される。逆写像に対して

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

が成立する。 f^{-1} は

$$f^{-1} : B \ni f(x) \mapsto x$$

であり

$$\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x,$$

$$\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$$

を満たす。 f^{-1} は B から A への 1 対 1 上への写像であり

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

である。

問 3. 以下の写像 f に対して f^{-1} を求めよ。

$$(1) f : [0, \infty) \ni x \mapsto x^2.$$

$$(2) f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x.$$

$$(3) f : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x.$$

$$(4) f : (-\pi/2, \pi/2) \ni x \mapsto \tan(x).$$

$$(5) f : [-\pi/2, \pi/2] \ni x \mapsto \sin(x).$$

写像 $f : A \rightarrow B$ および $g : B \rightarrow C$ に対して写像 $g \circ f : A \rightarrow C$ を

$$g \circ f : A \ni x \mapsto g(f(x))$$

により定義してこれを f と g の合成写像と呼ぶ。即ち

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とする。

問 4.

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \arctan(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ g(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sin(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

とすると、 $(g \circ f)(x)$ を簡単に表せ。

問 5. $f: A \rightarrow B$ および $g: B \rightarrow C$ に対して以下を示せ。

- (1) $(f: 1 \text{ 対 } 1 \text{ 写像} \wedge g: 1 \text{ 対 } 1 \text{ 写像}) \Rightarrow g \circ f: 1 \text{ 対 } 1 \text{ 写像}.$
- (2) $(f: \text{上への写像} \wedge g: \text{上への写像}) \Rightarrow g \circ f: \text{上への写像}.$
- (3) $(f: 1 \text{ 対 } 1 \text{ 上への写像} \wedge g: 1 \text{ 対 } 1 \text{ 上への写像}) \Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$

集合 A および B に対して、 A から B への写像のすべての集合を B^A で表すことにする。即ち

$$B^A \stackrel{\text{def}}{=} \{f | f: A \rightarrow B\}$$

である。

問 6. $\{1, 2\}^{\{1, 2, 3\}}$ および $\{1, 2, 3\}^{\{1, 2\}}$ を求めよ。また $\{1, 2, \dots, m\}^{\{1, 2, \dots, n\}}$ の要素の数を求めよ。

集合 I および U に対して、 $A: I \rightarrow 2^U$ を考える。各 $i \in I$ に対して $A(i)$ は U の部分集合となっている。 $A(i)$ を A_i と書くこともある。 A_i を i で添字付けられた集合と呼ぶ。 $A: I \rightarrow 2^U$ であることを、

$$\{A_i\}_{i \in I} \subseteq 2^U$$

あるいは

$$A_i \subseteq U \quad (i \in I)$$

とすると表現することがある。 $\{A_i\}_{i \in I}$ を I を添字集合とする集合族と呼ぶ。このとき、

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} A_i &\stackrel{\text{def}}{=} \{x | \forall i \in I, x \in A_i\}, \\ \bigcup_{i \in I} A_i &\stackrel{\text{def}}{=} \{x | \exists i \in I, x \in A_i\} \end{aligned}$$

と定義する。なおこれ等はそれぞれ $\bigcap_{i \in I} A_i$ や $\bigcup_{i \in I} A_i$ とも書かれることがある。 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ の場合

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, \\ \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \end{aligned}$$

であることに注意せよ。なお

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n A_i &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i, \\ \bigcup_{i=1}^n A_i &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i, \\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i, \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \end{aligned}$$

とする。それぞれ $\bigcap_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ と表記することもある。

問 7. 以下で表される集合をより簡単に表せ。

- (1) $\bigcap_{i=3}^8 (0, i)$.
- (2) $\bigcup_{i=3}^8 (0, i)$.
- (3) $\bigcap_{i=2}^5 [i-1, i]$.
- (4) $\bigcup_{i=2}^5 [i-1, i]$.
- (5) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1/n]$.
- (6) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1/n)$.
- (7) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n]$.
- (8) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n)$.
- (9) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1-1/n)$.
- (10) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1-1/n]$.
- (11) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 < 1/n\}$.
- (12) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 < n\}$.
- (13) $\bigcap_{n=1}^{\infty} ([-1/n, 1/n] \times [-1/n, 1/n])$.
- (14) $\bigcup_{n=1}^{\infty} ([-n, n] \times [-n, n])$.

定理 (ド・モルガン). $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq 2^U$ とする。このとき

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\mathbf{c}} &= \bigcup_{i \in I} A_i^{\mathbf{c}}, \\ \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\mathbf{c}} &= \bigcap_{i \in I} A_i^{\mathbf{c}} \end{aligned}$$

が成立する。

証明. 前者は、 $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\mathbf{c}} &\Leftrightarrow \neg(x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)) \\ &\Leftrightarrow \neg(\forall i \in I, x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I, \neg(x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i^{\mathbf{c}} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i^{\mathbf{c}} \end{aligned}$$

より示される。後者はこれを利用して

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\mathbf{c}} &= \left(\bigcup_{i \in I} A_i^{\mathbf{cc}}\right)^{\mathbf{c}} \\ &= \left(\bigcap_{i \in I} A_i^{\mathbf{c}}\right)^{\mathbf{cc}} \\ &= \bigcap_{i \in I} A_i^{\mathbf{c}} \end{aligned}$$

により示される。□

定理 1. $f: A \rightarrow B$ とする。 $X_1, X_2 \subseteq A$ および $\{X_i\}_{i \in I} \subseteq 2^A$ に対して以下が成立する。

- (1) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2)$.
- (2) $f(\bigcap_{i \in I} X_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$.
- (3) $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$.

証明. (1): $X_1 \subseteq X_2$ と仮定する。任意の $y \in f(X_1)$ を固定する。

$$f(X_1) = \{y \mid \exists x \in X_1, y = f(x)\}$$

であるので、

$$\exists x \in X_1, y = f(x)$$

である。 $y = f(x)$ を満たす $x \in X_1$ が存在するのでその 1 つを x_0 で表すことにする。 $X_1 \subseteq X_2$ であるので、 $x_0 \in X_2$ である。 $y = f(x_0)$ であるので

$$\exists x \in X_2, y = f(x)$$

が言える。よって

$$y \in \{y | \exists x \in X_2, y = f(x)\} = f(X_2)$$

が示される。 $y \in f(X_1)$ は任意であったので、 $f(X_1) \subseteq f(X_2)$ が示された。

(2): 任意の $y \in f(\bigcap_{i \in I} X_i)$ を固定する。

$$f(\bigcap_{i \in I} X_i) = \{y | \exists x \in \bigcap_{i \in I} X_i, y = f(x)\}$$

であるので、

$$\exists x \in \bigcap_{i \in I} X_i, y = f(x)$$

である。 $y = f(x)$ である $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$ の 1 つを x_0 で表すことにする。このとき

$$\forall i \in I, x_0 \in X_i$$

である。任意の $i \in I$ を固定する。 $x_0 \in X_i$ であり $y = f(x_0)$ であるので

$$\exists x \in X_i, y = f(x)$$

であり、したがって

$$y \in \{y | \exists x \in X_i, y = f(x)\} = f(X_i)$$

である。 $i \in I$ は任意であったので

$$\forall i \in I, y \in f(X_i)$$

であり、よって

$$y \in \bigcap_{i \in I} f(X_i)$$

が示された。 $y \in f(\bigcap_{i \in I} X_i)$ は任意であったので $f(\bigcap_{i \in I} X_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$ が証明された。

(3): 任意の $y \in f(\bigcup_{i \in I} X_i)$ を固定する。

$$\exists x \in \bigcup_{i \in I} X_i, y = f(x)$$

であるので、 $y = f(x)$ である $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$ の 1 つを x_0 で表すことにする。 $x_0 \in \bigcup_{i \in I} X_i$ であるので

$$\exists i \in I, x_0 \in X_i$$

である。 $x_0 \in X_i$ である $i \in I$ の 1 つを i_0 で表すことにする。 $x_0 \in X_{i_0}$ であり $y = f(x_0)$ であるので

$$\exists x \in X_{i_0}, y = f(x)$$

即ち

$$y \in f(X_{i_0})$$

である。 $i_0 \in I$ であるから

$$\exists i \in I, y \in f(X_i)$$

即ち

$$y \in \bigcup_{i \in I} X_i$$

であり、 $y \in f(\bigcup_{i \in I} X_i)$ は任意であったので

$$f(\bigcup_{i \in I} X_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} f(X_i)$$

が証明された。逆に任意の $y \in \bigcup_{i \in I} f(X_i)$ を固定する。このとき

$$\exists i \in I, y \in f(X_i)$$

である。 $y \in f(X_i)$ である $i \in I$ の 1 つを i_0 で表す。 $y \in f(X_{i_0})$ であるので

$$\exists x \in X_{i_0}, y = f(x)$$

である。 $y = f(x)$ である $x \in X_{i_0}$ の 1 つを x_0 で表す。 $x_0 \in X_{i_0}$ で $i_0 \in I$ であるから

$$\exists i \in I, x_0 \in X_i$$

が言える。即ち

$$x_0 \in \bigcup_{i \in I} X_i$$

である。 $y = f(x_0)$ であるので

$$\exists x \in \bigcup_{i \in I} X_i, y = f(x)$$

即ち

$$y \in f(\bigcup_{i \in I} X_i)$$

であり、 $y \in \bigcup_{i \in I} f(X_i)$ は任意であったから

$$\bigcup_{i \in I} f(X_i) \subseteq f(\bigcup_{i \in I} X_i)$$

が証明された。□

問 8. $f : A \rightarrow B, \{X_i\}_{i \in I} \subseteq 2^A$ に対して

$$\bigcap_{i \in I} f(X_i) \subseteq f(\bigcap_{i \in I} X_i)$$

は一般に成立するとは限らない。この式の以下の証明の誤りを発見せよ。

任意の $y \in \bigcap_{i \in I} f(X_i)$ を固定する。このとき

$$\forall i \in I, y \in f(X_i)$$

である。任意の $i \in I$ を固定する。

$$y \in f(X_i) = \{y | \exists x \in X_i, y = f(x)\}$$

であるので

$$\exists x \in X_i, y = f(x)$$

である。 $y = f(x)$ である $x \in X_i$ の 1 つを x_0 で表すことにする。 $x_0 \in X_i$ で、 $i \in I$ は任意であるから

$$\forall i \in I, x_0 \in X_i$$

即ち

$$x_0 \in \bigcap_{i \in I} X_i$$

である。 $y = f(x_0)$ であったから

$$\exists x \in \bigcap_{i \in I} X_i, y = f(x)$$

即ち

$$y \in \{y | \exists x \in \bigcap_{i \in I} X_i, y = f(x)\} = f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)$$

が示される。 $y \in \bigcap_{i \in I} f(X_i)$ は任意であったから

$$\bigcap_{i \in I} f(X_i) \subseteq f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)$$

が証明された。

注意. $P(x, y)$ を命題関数とし、 A, B をそれぞれ集合とする。 $a \in A$ に対して $P(a, y)$ は y を変数とする命題関数となるから

$$\begin{aligned} \forall y \in B, P(a, y), \\ \exists y \in B, P(a, y) \end{aligned}$$

はいずれも命題となる。 $\forall y \in B, P(a, y)$ がどんな $a \in A$ に対しても真であるとき

$$\forall x \in A, \forall y \in B, P(x, y)$$

と表され、また $\forall y \in B, P(a, y)$ が真となる $a \in A$ が少なくとも 1 つ存在する場合

$$\exists x \in A, \forall y \in B, P(x, y)$$

と表されることになる。これ等はいずれも命題である。同様に命題

$$\begin{aligned} \exists x \in A, \exists y \in B, P(x, y), \\ \forall x \in A, \exists y \in B, P(x, y) \end{aligned}$$

も考えられる。注意すべきことは

$$\begin{aligned} (\forall x \in A, \forall y \in B, P(x, y)) &\Rightarrow (\forall y \in B, \forall x \in A, P(x, y)), \\ (\exists x \in A, \exists y \in B, P(x, y)) &\Rightarrow (\exists y \in B, \exists x \in A, P(x, y)) \end{aligned}$$

および

$$(\exists x \in A, \forall y \in B, P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in B, \exists x \in A, P(x, y))$$

は正しいが

$$(\forall x \in A, \exists y \in B, P(x, y)) \Rightarrow (\exists y \in B, \forall x \in A, P(x, y))$$

は正しくない。問 8 はこれが原因であることを認識せよ。

問 9.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y, \\ \exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y \end{aligned}$$

の違いを考えよ。

定理 2. $f : A \rightarrow B$ とする。 $Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$ および $\{Y_i\}_{i \in I} \subseteq 2^B$ に対して以下が成立する。

- (1) $f^{-1}(Y^{\mathbf{c}}) = f^{-1}(Y)^{\mathbf{c}}$.
- (2) $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.
- (3) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} Y_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$.
- (4) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} Y_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$.

証明. (1): $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f(Y^{\mathbf{c}}) &\Leftrightarrow f(x) \in Y^{\mathbf{c}} \\ &\Leftrightarrow \neg(f(x) \in Y) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in f^{-1}(Y)) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y)^{\mathbf{c}} \end{aligned}$$

より証明される。

(2): $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y_1) &\Rightarrow f(x) \in Y_1 \\ &\Rightarrow f(x) \in Y_2 \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(Y_2) \end{aligned}$$

より証明される。

(3): $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} Y_i) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} Y_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, f(x) \in Y_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, x \in f^{-1}(Y_i) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i) \end{aligned}$$

より証明される。

(4): $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} Y_i) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} Y_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I, f(x) \in Y_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I, x \in f^{-1}(Y_i) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i) \end{aligned}$$

より証明される。 $\square$

問 10. $f : A \rightarrow B$ とし $X_1, X_2 \subseteq A$ および $Y_1, Y_2 \subseteq B$ に対して

$$\begin{aligned} f(X_1 \cap X_2) &\subseteq f(X_1) \cap f(X_2), \\ f(X_1 \cup X_2) &= f(X_1) \cup f(X_2), \\ f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &= f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2), \\ f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) &= f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \end{aligned}$$

が成立するを、上の定理を用いずに直接証明せよ。また、最初の式の “ $\subseteq$ ” が “ $=$ ” にできない例を作れ。また、 $X \subseteq A$ に対して

$$f(X^{\mathbf{c}}) = f(X)^{\mathbf{c}}$$

が成立しない例を作れ。

VII. 同値関係.

R が集合 X 上の関係であるとする。即ち

$$R \subseteq X \times X$$

であるとする。 R が以下の 3 つの条件を満足するとき、 R は X 上の同値関係であるという：

- (1) $\forall x \in X, xRx,$
- (2) $xRy \Rightarrow yRx,$
- (3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$

問 1.

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

以下の関係が同値関係であるかどうかを調べよ。

- (1) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}.$
- (2) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}.$
- (3) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}.$
- (4) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}.$
- (5) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}.$

また、上で同値関係であったもの以外の同値関係を見つけよ。

x および y を変数とする命題関数 $P(x, y)$ が

- (1) $\forall x \in X, P(x, x),$
- (2) $P(x, y) \Rightarrow P(y, x),$
- (3) $P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z).$

を満たすならば

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y \rangle | x \in X \wedge y \in X \wedge P(x, y)\}$$

により定義される R は X 上の同値関係である。この定義式は

$$xRy \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P(x, y) \quad (x, y \in X)$$

のように書かれることが多い。

問 2. n をある自然数とする。このとき $\mathbb{Z}$ 上の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \text{ は } n \text{ の倍数} \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

により定義すると、 $\sim$ は同値関係であることを証明せよ。

問 3. $\mathbb{R}$ 上の関係 $\approx$ を

$$x \approx y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [x] = [y] \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

により定義すると、 $\approx$ は $\mathbb{R}$ 上の同値関係となることを示せ。ただし、 $[\cdot]$ はガウス記号とする。

問 4.

$$\mathbb{R}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y \rangle | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

に対して

$$\langle x, y \rangle \simeq_1 \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = u \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R}),$$

$$\langle x, y \rangle \simeq_2 \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} y = v \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R}),$$

$$\langle x, y \rangle \simeq_3 \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x + y = u + v \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R}),$$

$$\langle x, y \rangle \simeq_4 \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} xy = uv \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R})$$

によりそれぞれが同値関係となることを示せ。

R を集合 X 上の同値関係とする。このとき

$$[x]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{y | y \in X \wedge xRy\} \quad (x \in X)$$

と定義して、これを x の R による同値類と呼ぶ。同値類に関して次のことが成り立つ。

定理.

$$\begin{aligned}\forall x \in X, x \in [x]_R, \\ x \in [y]_R \Rightarrow y \in [x]_R, \\ [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Rightarrow [x]_R = [y]_R\end{aligned}$$

問 5. 上の定理を証明せよ。

集合 X とその上の同値関係 R が与えられたとき

$$X/R \stackrel{\text{def}}{=} \{[x]_R | x \in X\}$$

と定義して、これを X の R による商集合と呼ぶ。例えば

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

として

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

とすると

$$X/\sim = \{\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}\}$$

である。

問 6.

$$X \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\{1, 2, 3\}}$$

として、

$$A \approx B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \text{ と } B \text{ の要素の数は同じ} \quad (A, B \in X)$$

とする。 $X/\approx$ を求めよ。

問 7. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係を

$$\langle x, y \rangle \sim \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x + v = u + y \quad (x, y, u, v \in \mathbb{N})$$

により定義する。このとき、

$$\langle x, y \rangle \mapsto x - y$$

は、 $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ 上で定義され $\mathbb{Z}$ に値をとる 1 対 1 上への写像であることを証明せよ。また

$$\langle x, y \rangle \approx \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} xv = uy \quad (x, y, u, v \in \mathbb{N})$$

により定義すると

$$\langle x, y \rangle \mapsto x/y$$

は、 $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\approx$ 上で定義され $\mathbb{Q}$ に値をとる 1 対 1 上への写像であることを証明せよ。

添え字付けられた集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が

$$\begin{aligned}\forall i \in I, A_i \neq \emptyset, \\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \\ \bigcup_{i \in I} A_i = X\end{aligned}$$

を満たすとき、集合 X の直和分割であるという。このとき

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists i \in I, x \in A_i \wedge y \in A_i \quad (x, y \in X)$$

と定義することによって同値関係が得られる。このとき

$$x \in A_i \Rightarrow [x]_{\sim} = A_i$$

であることに注意せよ。さらに

$$X / \sim = \{A_i | i \in I\}$$

である。

例として、 X を日本の都道府県の全体として、

$$I = \{ \text{北海道, 本州, 四国, 九州, 沖縄} \}$$

を考える。このとき

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in X \wedge x \text{ は } i \text{ にある} \} \quad (i \in I)$$

とすると、 $\{A_i\}_{i \in I}$ は添え字付けられた集合族であり、 X の直和分割になっている。この直和分割により定義される同値関係は、同じ島にある（陸続きである）という関係に他ならない。

問 8. X および Y を集合とし、 $f : X \rightarrow Y$ とする。このとき

$$x_1 \sim x_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in X)$$

と定義する。このとき、 $\sim$ は X 上の同値関係であることを証明せよ。また

$$A_y \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(y) \quad (y \in f(X))$$

と定義すると、 $\{A_y\}_{y \in f(X)}$ は X の直和分割であることを示せ。さらにこの直和分割により定義される同値関係が $\sim$ と同じものになることを確かめよ

VIII. 順序関係.

R が集合 X 上の関係であるとする。即ち

$$R \subseteq X \times X$$

であるとする。 R が以下の 3 つの条件を満足するとき、 R は X 上の同値関係であるという：

- (1) $\forall x \in X, xRx,$
- (2) $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y,$
- (3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$

問 1.

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

以下の関係が順序関係であるかどうかを調べよ。

- (1) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}.$
- (2) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}.$
- (3) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}.$
- (4) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}.$
- (5) $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}.$

また、上で順序関係であったもの以外の順序関係を見つけよ。

x および y を変数とする命題関数 $P(x, y)$ が

- (1) $\forall x \in X, P(x, x),$
- (2) $P(x, y) \wedge P(y, x) \Rightarrow x = y,$
- (3) $P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z).$

を満たすならば

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y \rangle | x \in X \wedge y \in X \wedge P(x, y)\}$$

により定義される R は X 上の順序関係である。この定義式は

$$xRy \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} P(x, y) \quad (x, y \in X)$$

のように書かれることが多い。

問 2. $\mathbb{R}$ 上の関係 R を

$$xRy \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

により定義すると、 R は $\mathbb{R}$ 上の順序関係となることを示せ。また、 X を任意の集合とすると、

$$ASB \stackrel{\text{def}}{=} A \subseteq B \quad (A, B \in 2^X)$$

と定義すると、 S は 2^X 上の順序関係となることを示せ。

問 3. $\mathbb{N}$ 上の関係 $\preccurlyeq$ を

$$x \preccurlyeq y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} y \text{ は } x \text{ で割り切れる} \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

により定義すると、 $\preccurlyeq$ は同値関係であることを証明せよ。

問 4.

$$\mathbb{R}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

に対して

$$\langle x, y \rangle \lesssim_1 \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq u \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R}),$$

$$\langle x, y \rangle \lesssim_2 \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq u \wedge y \leq v \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R}),$$

$$\langle x, y \rangle \lesssim_3 \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \leq u) \vee (x = u \wedge y \leq u) \quad (x, y, u, v \in \mathbb{R})$$

によりそれぞれが順序関係となることを示せ。

R を集合 X 上の順序関係とする。このとき

$$\forall x \in X, \forall y \in X, xRy \vee yRx$$

が成立するとき、 R は全順序関係であるといい、そうでないときは半順序関係であるという。

問 5. 今までに登場した順序関係が全順序関係であるか半順序関係であるか述べよ。

問 6.

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$$

として、

$$f \lesssim g \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in [0, 1], f(x) \leq g(x) \quad (f, g \in X)$$

とする。 $\lesssim$ は X 上の半順序関係であることを示せ。

X が集合で、 R が X 上の順序関係であるということを (X, R) は順序集合であるという場合がある。順序集合 (X, R) と (Y, S) に対して、1 対 1 上への写像 $f : X \rightarrow Y$ が存在して

$$x_1 R x_2 \Rightarrow f(x_1) S f(x_2)$$

が成立するとき、 (X, R) と (Y, S) は同形であるといい、 f は同形写像と呼ぶ。特に、 (X, R) と (X, S) が同形であるときは、 R と S が同形であるという。

問 7. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 上の順序関係は全部で 13 種類ある。それ等をすべて挙げて、その中で互いに同形の関係にあるものを分類せよ。

問 8. $(X, R), (Y, S), (Z, T)$ をいずれも順序集合を表すものとする。以下を示せ。

- (1) (X, R) と (X, R) は同形である。
- (2) (X, R) と (Y, S) が同形ならば (Y, S) と (X, R) も同形である。
- (3) (X, R) と (Y, S) が同形かつ (Y, S) と (Z, T) が同形であるならば (X, R) と (Z, T) も同形である。

問 9. X を集合とし、 X 上の関係 R が以下を満たすとする。

- (1) $\forall x \in X, xRx$.
- (2) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

このとき

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} xRy \wedge yRx \quad (x, y \in X)$$

と定義する。 $\sim$ は X 上の同値関係となることを示せ。さらに

$$[x]_{\sim} R' [y]_{\sim} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} xRy \quad (x, y \in X)$$

により $X/\sim$ 上に順序関係 R' がうまく定義されることを示せ。

IX. 濃度.

X, Y をそれぞれ有限集合とする。このとき要素の数が同じであるための必要十分条件は X から Y の上への 1 対 1 写像が存在することである。この事実を無限集合の場合にも拡張する。即ち、無限集合の場合要素の数を実際に数え上げることはできないが、2 つの集合の間に 1 対 1 上への写像が存在することをもって互いの要素数が等しいと考える。この拡張された要素数という概念を濃度と呼ぶことにする。例えば、自然数の全体の集合から偶数である自然数の全体の集合へは

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n$$

という 1 対 1 上への写像が存在するので互いの濃度は等しい。

問 1. 自然数の全体の集合と奇数である自然数の全体の集合の濃度が等しいことを示せ。

自然数の全体の集合と整数の全体の集合の濃度も等しい。実際

$$f(1) \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$

$$f(2n) \stackrel{\text{def}}{=} n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$f(2n+1) \stackrel{\text{def}}{=} -n \quad (n \in \mathbb{N})$$

なる写像を考えればよい。集合 X と集合 Y の濃度が等しいことを

$$X \approx Y$$

で表すことにする。

定理 1. X, Y, Z はそれぞれ集合を表すものとする。このとき以下が成立する。

- (1) $X \approx X$.
- (2) $X \approx Y \Rightarrow Y \approx X$.
- (3) $X \approx Y \wedge Y \approx Z \Rightarrow X \approx Z$.

証明. (1) 恒等写像を考えればよい。(2) 逆写像を考えればよい。(3) 合成写像を考えればよい。□

与えられた集合が $\mathbb{N}$ と等しい濃度を持つ場合、その集合の濃度は $\aleph_0$ であるという。有限集合の濃度はその集合の要素の数とする。濃度の大小関係は

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < \aleph_0$$

と約束する。

定理 2. 集合 X の濃度を n (ただし、 $n \in \mathbb{N}$) とし、集合 Y の濃度を $\aleph_0$ であるとする。このとき $X \cup Y$ の濃度は $\aleph_0$ である。この事実を

$$n + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0$$

と表す。

証明.

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

とする。また Y の濃度は $\aleph_0$ であるので

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$$

と書ける。このとき、

$$x_1, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots$$

と並べて左から 1, 2, 3 ... と番号付ければよい。ただしそのとき、もし重複するものがあればそれには番号を付けない。□

定理 3. 集合 X の濃度を n (ただし、 $n \in \mathbb{N}$) とし、集合 Y の濃度を $\aleph_0$ であるとする。このとき $X \times Y$ および $Y \times X$ の濃度も $\aleph_0$ である。この事実を

$$n \times \aleph_0 = \aleph_0 \times n = \aleph_0$$

と表す。

証明.

$$X = \{x_1, \dots, x_n\},$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$$

として

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \langle x_1, y_1 \rangle, & \langle x_1, y_2 \rangle, & \langle x_1, y_3 \rangle, & \dots & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \langle x_2, y_1 \rangle, & \langle x_2, y_2 \rangle, & \langle x_2, y_3 \rangle, & \dots & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \langle x_n, y_1 \rangle, & \langle x_n, y_2 \rangle, & \langle x_n, y_3 \rangle, & \dots & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \end{array}$$

と並べて上から下へ向かって左から右へ矢印の順に番号附ければよい。 □

問 2. 集合 X, Y に対して、 $X \times Y$ の濃度と $Y \times X$ の濃度がいつでも等しいことを示せ。

定理 4. 集合 X および Y の濃度を $\aleph_0$ であるとする。このとき $X \cup Y$ の濃度は $\aleph_0$ である。この事実を

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

と表す。

証明.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\},$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$$

とする。ここで

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$$

と並べて左から順に番号附ければよい。ただし、重複したものが現れれば飛ばす。 □

定理 5. 集合 X および Y の濃度を $\aleph_0$ であるとする。このとき $X \times Y$ および $Y \times X$ の濃度も $\aleph_0$ である。この事実を

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

と表す。

証明.

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\},$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$$

とする。ここで

$$\begin{array}{ccccccc} & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ \langle x_1, y_1 \rangle, & \langle x_1, y_2 \rangle, & \langle x_1, y_3 \rangle, & \dots & & & \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ \langle x_2, y_1 \rangle, & \langle x_2, y_2 \rangle, & \langle x_2, y_3 \rangle, & \dots & & & \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ \langle x_3, y_1 \rangle, & \langle x_3, y_2 \rangle, & \langle x_3, y_3 \rangle, & \dots & & & \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \end{array}$$

と斜め左下に向かって左から右へ矢印のように順番に番号附ければ良い。 □

定理 6. 濃度が $\aleph_0$ である I で添字付けられた集合族 $\{X_i\}_{i \in I}$ に対して、各々の集合 X_i の濃度が $\aleph_0$ であるならば $\bigcup_{i \in I} X_i$ の濃度も $\aleph_0$ である。この事実を

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0$$

と表す。

証明.

$$I = \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$$

として

$$\begin{aligned} X_{i_1} &= \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots\}, \\ X_{i_2} &= \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots\}, \\ X_{i_3} &= \{x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

とする。定理 5 と同様に番号付けられる。ただし重複するものが現れたら飛ばす。 $\square$

問 3. X および Y を集合とする。さらに、 Y によって添字付けられた集合族 $\{X_y\}_{y \in Y}$ が互いに素であり、任意の $y \in Y$ に対して X_y の濃度は X の濃度に等しいものとする。このとき $X \times Y$ の濃度と $\bigcup_{y \in Y} X_y$ の濃度が等しくなることを示せ。

定理 7. 有理数の全体の集合 $\mathbb{Q}$ の濃度は $\aleph_0$ である。

証明. $\mathbb{Z}$ の濃度が $\aleph_0$ であるので

$$X_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge i < x \leq i+1\}$$

としたとき、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して X_i の濃度が $\aleph_0$ であることさえ示せば定理 6 より $\mathbb{Q}$ の濃度が $\aleph_0$ であることが示される。 X_0 の濃度が $\aleph_0$ であることを示す。 $i \neq 0$ 以外の X_i に対しても同様。

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1/2 & & & & & & \\ 1/3, & 2/3 & & & & & \\ 1/4, & 2/4, & 3/4 & & & & \\ 1/5, & 2/5, & 3/5, & 4/5 & & & \\ \vdots, & \vdots, & \vdots, & \vdots, & \vdots, & \vdots, & \end{array}$$

と並べて重複するものを除いて上から順番に番号付けられる。 $\square$

X. 連続体の濃度.

X, Y をそれぞれ集合とするとき

$$X \lesssim Y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists f : X \rightarrow Y, \text{one-to-one}$$

と定義する。

$$X \lesssim Y \Leftrightarrow \exists A \subseteq Y, X \approx A$$

である。いつでも

$$X \lesssim X$$

は成立し、また

$$X \lesssim Y \wedge Y \lesssim Z \Rightarrow X \lesssim Z$$

も明かである。

Schröder-Bernstein の定理. X, Y をそれぞれ集合とする。このとき

$$X \lesssim Y \wedge Y \lesssim X \Rightarrow X \approx Y$$

が成立する。

証明.

$$X \lesssim Y \wedge Y \lesssim X$$

であると仮定する。定義により

$$\exists f : X \rightarrow Y, \text{one-to-one}$$

かつ

$$\exists g : Y \rightarrow X, \text{one-to-one}$$

である。ここで、

$$X_0 \stackrel{\text{def}}{=} X,$$

$$Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} Y,$$

$$X_n \stackrel{\text{def}}{=} g[Y_{n-1}],$$

$$Y_n \stackrel{\text{def}}{=} f[X_{n-1}]$$

とおくと、

$$\begin{aligned} X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots, \\ Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \end{aligned}$$

であり

$$X_{2n-1} \setminus X_{2n} \approx Y_{2n} \setminus Y_{2n+1},$$

$$Y_{2n-1} \setminus Y_{2n} \approx X_{2n} \setminus X_{2n+1}$$

であることに注意せよ。また

$$X_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n,$$

$$Y_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n$$

とおくと

$$X_\infty \approx Y_\infty$$

であることもすぐわかる。これ等のことから

$$X \approx Y$$

であることが証明される。□

$\mathbb{R}$ が $\aleph_0$ の濃度を持たないことを示す。まず $(0, 1)$ が $\aleph_0$ の濃度を持たないことを示す。いま $(0, 1)$ が $\aleph_0$ の濃度を持つとして矛盾を導く。もし $(0, 1)$ が $\aleph_0$ の濃度を持つとすると、

$$(0, 1) = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$$

と表現できる。 r_n を小数点で

$$0.d_{n1}d_{n2}d_{n3}\dots$$

で表現するとする。このとき

$$0.e_{11}e_{22}e_{33}\dots$$

を e_{ii} が d_{ii} でも 0 でも 9 でもないように勝手に定める。これはどの r_n にも等しくない。しかしこの小数が表す数は $(0, 1)$ に属する数である。これは矛盾である。よって $(0, 1)$ の濃度は $\aleph_0$ ではない。 $(0, 1)$ と $\mathbb{R}$ の間には $x \mapsto \tan(\pi x)$ により 1 対 1 上への写像があるので、 $\mathbb{R}$ が $\aleph_0$ の濃度を持つことはない。 $\mathbb{R}$ の濃度を連続体の濃度と呼び、濃度は $\mathfrak{c}$ であるという。

濃度が $\aleph_0$ 以下の集合のことを可算集合と呼ぶ。即ち可算集合とは有限集合であるかまたは $\aleph_0$ の濃度を持つ集合のことである。可算集合でない集合のことを非可算集合と呼ぶ。

問. $(0, 1)$ から $[0, 1]$ の上への 1 対 1 写像を作れ。

証明なしで幾つかの事実を挙げておく。

定理. X を濃度が $\mathfrak{c}$ の集合、 Y を可算集合とする。このとき $X \cup Y$ の濃度は $\mathfrak{c}$ である。この事実を

$$\begin{aligned}\mathfrak{c} + n &= n + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{c} + \aleph_0 &= \aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}\end{aligned}$$

で表す。また、 $X \times Y$ および $Y \times X$ の濃度はいずれも $\mathfrak{c}$ である。この事実を

$$\begin{aligned}\mathfrak{c} \times n &= n \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{c} \times \aleph_0 &= \aleph_0 \times \mathfrak{c} = \mathfrak{c}\end{aligned}$$

で表す。

定理. X および Y の濃度をいずれも $\mathfrak{c}$ とする。このとき $X \cup Y, X \times Y$ の濃度はいずれも $\mathfrak{c}$ である。この事実を

$$\begin{aligned}\mathfrak{c} + \mathfrak{c} &= \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} &= \mathfrak{c}\end{aligned}$$

で表す。

定理.

$$2^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$$

である。この事実を

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

と表す。

証明. $[0, 1]$ の要素に r に対して、 r を 2 進小数展開して

$$0.b_1b_2b_3\dots$$

と表現する。ただし 2 通りに展開可能なものは、例えば、 $1/2$ は

$$0.1$$

と

$$0.0111\dots$$

の展開が可能であるが、この場合無限に 1 が続く方をとることにする。さてこのとき

$$f(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \mid b_i = 1\}$$

と定義すれば、 f は $[0, 1]$ から $2^{\mathbb{N}}$ の中への 1 対 1 写像である。よって

$$[0, 1] \lesssim 2^{\mathbb{N}}$$

が証明された。逆に、 $2^{\mathbb{N}}$ の要素 A に対して

$$\begin{aligned}b_{2i} &\stackrel{\text{def}}{=} 1 && \text{if } i \in A, \\ b_{2i} &\stackrel{\text{def}}{=} 0 && \text{if } i \notin A, \\ b_{2i-1} &\stackrel{\text{def}}{=} 0\end{aligned}$$

と定義すれば g は $2^{\mathbb{N}}$ から $[0, 1]$ の中への 1 対 1 写像となる。よって

$$2^{\mathbb{N}} \gtrsim [0, 1]$$

が証明された。従って Schröder-Bernstein の定理により

$$[0, 1] \approx 2^{\mathbb{N}}$$

である。

$$[0, 1] \approx \mathbb{R}$$

であったので定理が証明される。

Cantor の定理. 任意の集合 X に対して

$$X \not\approx 2^X$$

である。

証明. まず

$$X \approx 2^X$$

であることは

$$X \ni x \mapsto \{x\} \in 2^X$$

が 1 対 1 であることから明か。いま $X \approx 2^X$ であると仮定しよう。このとき

$$f : X \rightarrow 2^X, \text{one-to-one, onto}$$

が存在する。ここで

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in X \wedge x \notin f(x)\}$$

とおく。このとき

$$A = f(a)$$

である $a \in X$ が存在する。 $a \in A$ であると仮定すると $a \notin f(a)$ であるにもかかわらず

$$a \in A = f(a)$$

となり矛盾、また $a \notin A$ であると仮定すると

$$a \in f(x) = A$$

となり矛盾、いずれにしても矛盾を生ずる。従って $X \approx 2^X$ の仮定が間違っていたことになる。 $\square$

$\aleph_0$ の濃度より大きな濃度の中で最小の濃度があることが知られている。その濃度を $\aleph_1$ と表す。 $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$ であるが、これが等しいのかどうかわかっていない。この問題は連続体仮説という名前と呼ばれている。実は等しいとしても等しくないとしても矛盾が生じないことだけはわかっている。

XI. 上限・下限.

この節では特に断らない限り X をある集合とし、 $\preccurlyeq$ をその上のある順序関係とする。

X の部分集合 A に対して

$$a_0 \in A \wedge \forall a \in A, a \preccurlyeq a_0$$

を満たす a_0 がもし存在するならば、 a_0 は A の最大元であるという。同様に

$$a_0 \in A \wedge \forall a \in A, a_0 \preccurlyeq a$$

を満たす a_0 がもし存在するならば、 a_0 は A の最小元であるという。最大元、最小元は必ずしも存在するとは限らない。例えば X として $\mathbb{R}$ を考え、 $\preccurlyeq$ として $\leq$ を考えたとき、 $(0, 1)$ には最大元も最小元も存在しない。また、 $X \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$ とし、 $\preccurlyeq \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$ としたとき、 X には最大元も最小元も存在しない。

問 1. 最大元は存在するが最小元は存在しないような例を作れ。

しかし一般にもし最大元あるいは最小元が存在するとすればそれぞれ唯一である。なぜならば、 a_0, a_1 をいずれも A の最大元であるとする、 $a_0 \in A$ であり

$$\forall a \in A, a \preccurlyeq a_1$$

であることから $a_0 \preccurlyeq a_1$ が示され、また $a_1 \in A$ であり

$$\forall a \in A, a \preccurlyeq a_0$$

であることから $a_1 \preccurlyeq a_0$ が示されるので、順序関係の公理の 1 つである反対称律によって $a_0 = a_1$ でなければならない。最小元の場合も同様である。

問 2. 最小元が存在すれば唯一であることを示せ。

X の部分集合 A に対して、

$$\forall a \in A, a \preceq a_0$$

を満たす a_0 のことを A の上界 (ジョウカイと読む) という。最大元は上界の 1 つである。また

$$\forall a \in A, a_0 \preceq a$$

を満たす a_0 のことを A の下界 (カカイと読む) という。最大元は下界の 1 つである。上界や下界は存在しない場合もあるし、また存在したとしても唯一とは限らない。 A の上界が存在するとき A は上に有界であるといい、下界が存在するとき下に有界であるといい、上にも下にも有界であるとき単に有界であるという。例えば、 $\mathbb{R}$ 上で通常の大小関係を考えた場合、 $\mathbb{R}$ 自身には上界も下界も存在しない。即ち有界ではない。また $(0, 1)$ には最大元も最小元も存在しなかったが、上界や下界ならば無限にある。これは有界な集合である。これも有界な集合である。

問 3. $X \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c, d\}$ にうまく順序関係を定義して、 $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$ 上界が 2 つ以上存在するような例を考えよ。

X の部分集合 A に対して、 A の上界であるものの集合に最小元が存在するときに、その元のことを A の上限という。また、 A の下界であるものの集合に最大元が存在するときに、その元のことを A の下限という。 A に最大元が存在するならばそれは上限でもあり、また最小元が存在すればそれは下限でもある。なぜならば、 a_0 を最大元、 a_1 を上限とすると $a_0 \in A$ であること a_1 が上界であることから $a_0 \preceq a_1$ であり、また a_0 が上界であり a_1 が上界の中で最小であることから $a_1 \preceq a_0$ が言えるので、 $a_0 = a_1$ が示されます。最小元についても同様である。

問 4. 最小元が下限であることを示せ。

上限 (下限) は最大元 (最小元) であるとは限らない。例えば、 $\mathbb{R}$ 上において $(0, 1)$ の上限は 1 であり下限は 0 であるが、これ等は最大元あるいは最小元ではない。また、 $X \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c, d\}$ として

$$\preceq = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle d, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

としたとき $\{a, b\}$ に対して c は上限であるが最大元ではない。また、下限は存在しない。一般に、最大元および最小元が存在すれば唯一であったように上限および下限も存在すれば唯一である。

問 5. これを証明せよ。

問 6.

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{f | f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

として

$$f \preceq g \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$$

により順序関係を定義する。このとき、 $\{\mathbb{R} \ni x \mapsto x, \mathbb{R} \ni x \mapsto -x\}$ の上限および下限となる関数を求めよ。

問 7. Ω をある集合とし

$$X \stackrel{\text{def}}{=} 2^\Omega$$

とする。このとき X 上に集合の包含関係によって順序関係を定義する。このとき、任意の $A \in X$ および $B \in B$ に対して $\{A, B\}$ の上限および下限はそれぞれ $A \cup B$ および $A \cap B$ になることを証明せよ。

XII. 実数の連続性および数列.

$A \subseteq \mathbb{R}$ に対して、 (A_1, A_2) が A の切断であるとは

- (1) $\emptyset \neq A_1 \wedge \emptyset \neq A_2$.
- (2) $A_1 \cup A_2 = A$.
- (3) $\forall x \in A_1, \forall y \in A_2, x < y$

を満たすことである。切断に対して 4 つのいずれかが成立する。

- (1) A_1 に最大元が存在して、 A_2 に最小元が存在する。
- (2) A_1 に最大元が存在して、 A_2 に最小元が存在しない。
- (3) A_1 に最大元が存在せず、 A_2 に最小元が存在する。
- (4) A_1 に最大元が存在せず、 A_2 にも最小元が存在しない。

$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$ の切断は (1) に限られる。 $\mathbb{Q}$ の切断には (1) の場合はない。なぜならば、任意の異なる 2 つの有理数の間には必ず別の有理数が存在するからである。この事実を、自然数の全体や整数の全体は粗であり、有理数の全体は稠密であるという。 $\mathbb{R}$ の場合にも (1) は起こり得ない。即ち実数の全体も稠密である。しかし、 $\mathbb{Q}$ に対しては (4) の場合がある。

デデキントの切断、 $\mathbb{R}$ の切断は (2) または (3) のいずれかである。

これは証明無しに認めることにする。この事実を実数の全体は連続であるという。

ワイエルシュトラウスの定理. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ とする。このとき、 A が上に有界であれば A に上限が存在して、また A が下に有界であるならば A に下限が存在する。

証明. A が上に有界であるにもかかわらず、上限が存在しないとする。

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \text{ は } A \text{ の上界}\},$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus B$$

とすると、 (C, B) は $\mathbb{R}$ の切断である。仮定より B には最小元が存在しない。よってデデキントの切断により C に最大元がなければならない。それを c とすると c は A の上界ではない。よって c より大きな A の元 a が存在しなければならない。このとき、 $c < c' < a$ なる c' が存在し、これは A の上界ではないので $c' \in C$ であり、これは c が C の最大元であることに矛盾することになる。□

問 1. 上の定理の後半を証明せよ。

アルキメデスの公理. どんな正の実数でも何倍かすればかならず 1 より大きくなる。即ち

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n\epsilon > 1.$$

証明. 背理法による。

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n\epsilon \leq 1$$

即ち、何倍しても 1 以下の正の実数 ϵ が存在するとする。このとき

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \frac{1}{\epsilon}$$

であるので、これは $\mathbb{N}$ が上に有界であることになる。ワイエルシュトラウスの定理に従えば $\mathbb{N}$ に上限 n_0 が存在することになる。このとき $n_0 - 1$ は $\mathbb{N}$ の上界ではないので

$$n_0 - 1 < n_1$$

を満たす $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在する。このとき

$$n_0 < n_1 + 1 \in \mathbb{N}$$

となり、 n_0 が $\mathbb{N}$ の上界であること矛盾する。□

絶対値に関して以下の事実が成立することは重要である。 $c \geq 0$ ならば

$$|a - b| < c \Leftrightarrow a - c < b < a + c,$$

$$|a - b| \leq c \Leftrightarrow a - c \leq b \leq a + c$$

問 2. 上の事実を証明せよ。

このことから、3 角不等式という名前で知られている

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |a + b| \leq |a| + |b|$$

が導かれる。

問 3. 3角不等式を証明せよ。

3角不等式から

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

が言えることを示そう。 $a, b \in \mathbb{R}$ を任意とする。

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

であるので

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

である。また

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$$

から

$$-(|a| - |b|) \leq |a - b|$$

が示される。よって

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

が証明された。

無限個の数の並び

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots$$

を数列と呼び

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

で表す。数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられたとき

$$f(n) \stackrel{\text{def}}{=} x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定義すると $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f が定義される。逆に、 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数 f が与えられたとき

$$\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

は数列である。

もし、 $x \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon$$

を満たすならば、 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に収束するといひ

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$$

あるいは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

と表す。

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を定義に従って証明しよう。いま任意の正の実数 ϵ を固定する。アルキメデスの公理に従えば

$$m\epsilon > 1$$

となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する。その 1 つを n_0 として選ぶ。このとき $n \geq n_0$ に対して

$$n\epsilon \geq n_0\epsilon > 1$$

従って

$$\epsilon > \frac{1}{n} = |0 - \frac{1}{n}|$$

となる。以上をまとめると

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |0 - \frac{1}{n}| < \epsilon$$

となる。

問 4. 任意の $a \in \mathbb{R}$ を固定する。このとき

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} a \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定義される数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 、即ち

$$a, a, a, \dots$$

という並びは a に収束することを示せ。

問 5.

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 、即ち

$$0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$$

という並びは 1 にも -1 にも収束していないことを示せ。

$a \neq b$ なる実数 a, b に対して、

$$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

かつ

$$x_n \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ は存在しない。もし存在したとすると矛盾が生じることを示そう。 $\epsilon = |a - b|/2$ とおくと $\epsilon > 0$ であるので

$$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

より n_1 が存在して

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a - x_n| < \epsilon$$

であるので、 $n \geq n_1$ ならば

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

が示される。同様に

$$x_n \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty)$$

から n_2 が存在して、 $n \geq n_2$ ならば

$$b - \epsilon < x_n < b + \epsilon$$

が示される。従って $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ なる n に対して、 $a < b$ ならば

$$a + \epsilon = b - \epsilon = \frac{a + b}{2}$$

であり、 $a > b$ ならば

$$a - \epsilon = b + \epsilon = \frac{a + b}{2}$$

であるから、いずれにしても

$$x_n < \frac{a + b}{2} < x_n$$

ということになり矛盾である。

定理 1. 収束する数列は有界である。

証明. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ が x に収束するとする。

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon$$

であり、 $1 > 0$ であるので

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < 1$$

が言える。したがって

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < 1$$

を満たす n_0 を 1 つ選べば、 $n \geq n_0$ なる n に対して

$$x - 1 < x_n < x + 1$$

である。ここで

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, x - 1\},$$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, x + 1\}$$

とおけば、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$m \leq x_n \leq M$$

が証明される。□

定理 2.

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow |x_n| \rightarrow |x| \quad (n \rightarrow \infty)$$

証明.

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$$

と仮定する。任意の $\epsilon > 0$ を固定する。

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon$$

なので

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon$$

である。

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon$$

を満たす n_0 を 1 つ選ぶ。 $n \geq n_0$ ならば

$$||x| - |x_n|| \leq |x - x_n| < \epsilon$$

であるので、

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, ||x| - |x_n|| < \epsilon$$

が言える。 $\epsilon > 0$ は任意であったので

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow ||x| - |x_n|| < \epsilon$$

が証明された。□

問 6. 上の定理の逆は必ずしも成立しないことを示せ。

問 7.

$$|x_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow x_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を示せ。

定理 3. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$$

かつ

$$y_n \rightarrow y \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすとする。このとき以下が言える。

- (1) $x_n + y_n \rightarrow x + y \quad (n \rightarrow \infty)$.
- (2) $x_n y_n \rightarrow xy \quad (n \rightarrow \infty)$.
- (3) $x_n - y_n \rightarrow x - y \quad (n \rightarrow \infty)$.
- (4) $(\forall n \in \mathbb{N}, y_n \neq 0 \wedge y \neq 0) \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y} \quad (n \rightarrow \infty)$.

証明. (1) 任意の $\epsilon > 0$ を固定する。

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon$$

なので、 $\frac{\epsilon}{2} > 0$ に対して

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

が言える。従って

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす n_1 を 1 つ選ぶ。同様にして

$$n \geq n_2 \Rightarrow |y - y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす n_2 を 1 つ選ぶ。ここで

$$n_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$$

とおけば

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

かつ

$$n \geq n_0 \Rightarrow |y - y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす。 $n \geq n_0$ ならば

$$|(x + y) - (x_n + y_n)| = |x - x_n + y - y_n| \leq |x - x_n| + |y - y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

であるので

$$n \geq n_0 \Rightarrow |(x + y) - (x_n + y_n)| < \epsilon$$

が示される。したがって

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |(x + y) - (x_n + y_n)| < \epsilon$$

であり、さらに $\epsilon > 0$ は任意であったので

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |(x + y) - (x_n + y_n)| < \epsilon$$

が証明された。

(2) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するので

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq K$$

を満たす $K > 0$ が存在することに注意せよ。任意の $\epsilon > 0$ を固定する。 $\epsilon/(2(|y| + 1)) > 0$ であるので

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x - x_n| < \frac{\epsilon}{2(|y| + 1)}$$

を満たす n_1 が存在する。また、 $\epsilon/(2K) > 0$ だから

$$n \geq n_2 \Rightarrow |y - y_n| < \frac{\epsilon}{2K}$$

を満たす n_2 が存在する。ここで

$$n_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$$

とおけば、 $n \geq n_0$ なる n に対して

$$\begin{aligned} |xy - x_n y_n| &= |xy - x_n y + x_n y - x_n y_n| \\ &\leq |xy - x_n y| + |x_n y - x_n y_n| \\ &= |x - x_n||y| + |x_n||y - y_n| \\ &< |x - x_n|(|y| + 1) + K|y - y_n| \\ &< (|y| + 1)\frac{\epsilon}{2(|y| + 1)} + K\frac{\epsilon}{2K} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

であることより証明される。(3) 省略。

(4) まず

$$\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y} \quad (n \rightarrow \infty)$$

を示す。

$$|y_n| \rightarrow |y| \quad (n \rightarrow \infty)$$

であることから、 $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n \geq n_1$ ならば

$$|y|/2 < |y_n|$$

であることが言えるので、

$$k \stackrel{\text{def}}{=} \min\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_{n_1-1}|, \frac{|y|}{2}\}$$

とおけば、 $k > 0$ であり

$$\forall n \in \mathbb{N}, k < |y_n|$$

が言えることを注意しておく。あとは再び

$$|y_n| \rightarrow |y| \quad (n \rightarrow \infty)$$

を用い

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_n} \right| < \frac{||y_n| - |y||}{|y|k}$$

であることを考慮すればよい。□

問 8. 上の定理の (2) および (3) の証明を完成させよ。

問 9. 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$$

かつ

$$y_n \rightarrow y \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすとする。このとき

$$(\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n) \Rightarrow x \leq y$$

を証明せよ。ヒント: 背理法による。 $y < x$ としたら

$$y_n < \frac{x + y}{2} < x_n$$

となる n が存在するを言え。

問 10. 上の問 10 を

$$(\forall n \in \mathbb{N}, x_n < y_n) \Rightarrow x < y$$

とすることはできないことを示せ。

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\forall K > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow K < x_n$$

を満たすとき、 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ∞ に発散するといひ

$$x_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

で表す。同様に、数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\forall K < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow K > x_n$$

を満たすとき、 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $-\infty$ に発散するといひ

$$x_n \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

で表す。

発散する数列は明らかに有界ではない。したがって収束することはありえない (収束する数列は有界であった)。

数列 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ が ∞ に発散することを示す。任意の $K > 0$ を固定する。このとき $1/K > 0$ であるのでアルキメデスの公理に従って

$$\frac{m}{K} > 1$$

を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在する。その 1 つを選んで n_0 で表す。このとき $n > n_0$ ならば

$$\frac{n}{K} > \frac{n_0}{K} > 1$$

であるので

$$n > K$$

が示される。以上をまとめると

$$\forall K > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow K < n$$

となる。

問 11.

$$x_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

ならば

$$\frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を証明せよ。