情報数理 II

塚田　真

平成 13 年度

1　実数空間の性質

定義 1 自然数の全体の集合、整数の全体の集合、有理数の全体の集合、実数の全体の集合、複素数の全体の集合をそれぞれ $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ で表わすことにする。また、$a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\
(a, b] &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\} \\
[a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\} \\
[a, b] &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\} \\
(a, \infty) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
[a, \infty) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x\} \\
(-\infty, b) &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\
(-\infty, b] &\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq b\}
\end{aligned}
$$

と定義する。

定義 2 $X \subseteqq \mathbb{R}$ である X と、$r \in \mathbb{R}$ に対して、

$$
\begin{aligned}
r \text{ は } X \text{ の上界である} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X, x \leqq r \\
r \text{ は } X \text{ の下界である} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X, r \leqq x \\
r \text{ は } X \text{ の最大値である} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} r \text{ は } X \text{ の上界である } \wedge\ r \in X \\
r \text{ は } X \text{ の最小値である} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} r \text{ は } X \text{ の下界である } \wedge\ r \in X
\end{aligned}
$$

と定義する。

最大値（最小値）は必ずしも存在するとは限らないが、存在すれば一意である。何故ならば、X に最大値が 2 つあったとする。それぞれを r_1、r_2 とする。r_1 は X の上界であることから

$$\forall x \in X, x \leqq r_1$$

を満たし、$r_2 \in X$ であることから

$$r_2 \leqq r_1$$

が言え、r_2 は X の上界であることから

$$\forall x \in X, x \leqq r_2$$

を満たし、$r_1 \in X$ であることから

$$r_1 \leqq r_2$$

が言えるので、$r_1 = r_2$ でなければならない。最小値に関しても同様である。

定義 3 $X \subseteqq \mathbb{R}$ に対して、X に最大値が存在する場合それを $\max A$ で表わし、X に最小値が存在する場合それを $\min A$ で表わす。

任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して、$\max(-\infty, r] = r$ であるが、$\max(-\infty, r)$ は存在しない。同様に、$\min[r, \infty) = r$ であるが、$\min(r, \infty)$ は存在しない。また、$\max \mathbb{R}$ も $\min \mathbb{R}$ も存在しない。

定義 4 $X \subseteq \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
X \text{ は上に有界である} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists y \in \mathbb{R},\ y \text{ は } X \text{ の上界である} \\
X \text{ は下に有界である} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists y \in \mathbb{R},\ y \text{ は } X \text{ の下界である} \\
X \text{ は有界である} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (X \text{ は上に有界である}) \wedge (X \text{ は下に有界である})
\end{aligned}$$

と定義する。

定義 5 $X \subseteq \mathbb{R}$ および $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\sup X &\overset{\text{def}}{=} \min \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \text{ は } X \text{ の上界である} \right\}, \\
\inf X &\overset{\text{def}}{=} \max \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \text{ は } X \text{ の下界である} \right\}
\end{aligned}$$

と定義して、$\sup X$ を X の上限であるといい、$\inf X$ を X の下限であるという。

定義の意味から、上限のことを最小上界、下限のことを最大下界ということもある。従って、

$$\begin{aligned}
r \text{ は } X \text{ の上限である} &\Leftrightarrow (r \text{ は } X \text{ の上界である}) \wedge (y \text{ は } X \text{ の上界である} \Rightarrow r \leqq y), \\
r \text{ は } X \text{ の下限である} &\Leftrightarrow (r \text{ は } X \text{ の下界である}) \wedge (y \text{ は } X \text{ の下界である} \Rightarrow y \leqq r)
\end{aligned}$$

と言い換えることもできる。上限（下限）は必ずしも存在するとは限らないが、存在すれば一意である。これは最大値（最小値）の一意性から明らかである。

r が X の最大値（最小値）であれば、r は X の上限（下限）である。しかしながら、逆は言えない。r が X の上限（下限）であることが、$r \in X$ まで保障しないからである。例えば、0 と 1 はそれぞれ $[0, 1]$ の最小値、最大値であり、従って、$[0, 1]$ の上限、下限でもある。一方、0 と 1 はそれぞれ $(0, 1)$ の下限、上限であるが、$[0, 1]$ の最小値、最大値ではない。この例からも予想がつくように、r が X の上限（下限）であるならば、r に幾らでも近い数を X の中に見い出すことが可能である。正確に述べると次のようになる。

命題 1 $X \subseteq \mathbb{R}$ および $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
r = \sup X &\Leftrightarrow (r \text{ は } X \text{ の上界である}) \wedge (\forall \epsilon > 0, \exists x \in X, r - \epsilon < x), \\
r = \inf X &\Leftrightarrow (r \text{ は } X \text{ の下界である}) \wedge (\forall \epsilon > 0, \exists x \in X, x < r + \epsilon).
\end{aligned}$$

証明　$r = \sup X$ であるとする。r は X の上界であるので、

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X, r - \epsilon < x$$

であることを示せばよい。そうでないと仮定しよう。このとき、

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in X, r - \epsilon \geqq x$$

である。このような ϵ を一つ選んで、ϵ_0 とする。即ち、

$$\forall x \in X, r - \epsilon_0 \geqq x$$

である。このことから、$r - \epsilon_0$ は X の上界でなければならない。ところが、$r - \epsilon_0 < r$ であるので、r が X の上界の中で最小のものであることに矛盾する。

逆に、r は X の上界であり、かつ、

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X, r - \epsilon < x$$

が成立するとしよう。r が X の上界の中で最小のものであることを示す。もし最小ではないと仮定すると、$p < r$ である X の上界 p が存在する。

$$r - p > 0$$

であるので、$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X, r - \epsilon < x$ において $\epsilon = r - p$ として

$$\exists x \in X, r - (r - p) < x$$

が言える。このような x を一つ選んで、x_0 とする。即ち、$x_0 \in X$ であり

$$r - (r - p) < x_0$$

を満たす。よって $p < x_0$ であるが、これは p が X の上界であることに矛盾する。

下限に関しても同様に証明される。

定義 6 A および B がいずれも $\mathbb{R}$ の部分集合であるとき

$$\begin{aligned} & \langle A, B \rangle \text{ が } \mathbb{R} \text{ の切断である} \\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ & (A \neq \emptyset) \ \wedge \ (B \neq \emptyset) \ \wedge \ (A \cup B = \mathbb{R}) \ \wedge \ (\forall a \in A, \forall b \in B, a < b) \end{aligned}$$

と定義する。

任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して、$\langle (-\infty, r), [r, \infty) \rangle$ および $\langle (-\infty, r], (r, \infty) \rangle$ はいずれも $\mathbb{R}$ の切断である。$\mathbb{R}$ の切断はこの 2 種類ももの に限ることを公理として採用することにする。

公理 1 $\langle A, B \rangle$ が $\mathbb{R}$ の切断であるとすると、次の (I) または (II) のいずれかに限る：

(I) $\max A$ が存在する $\wedge$ $\min B$ が存在しない；

(II) $\max A$ が存在しない $\wedge$ $\min B$ が存在する.

この公理を「Dedekind の切断」と呼ぶ。論理的には $\mathbb{R}$ の切断には上の公理の (I) と (II) 以外に

(III) $\max A$ が存在する $\wedge$ $\min B$ が存在する；

(IV) $\max A$ が存在しない $\wedge$ $\min B$ が存在しない.

も含めて４通りが考えられるが、このような切断が存在しないことを上の公理は述べている。

定理 1 (Weierstrass の定理) $\emptyset \neq X \subseteqq \mathbb{R}$ とする。このとき、

$$X \text{ が上に（下に）有界である } \Rightarrow \sup X \text{（}\inf X\text{）が存在する}$$

が言える。

証明 X は上に有界であるとする。B を X の上界の全体とすると、仮定より B は空集合ではない。A を B の補集合とすると、$A \cup B = \mathbb{R}$ である。X は空集合ではないので、$x_0 \in X$ が存在する。このとき、

$$x_0 - 1 < x_0$$

であるので、$x_0 - 1$ は X の上界ではあり得ない。従って、$x_0 - 1 \in A$ であり、A も空集合ではない。任意の $a \in A$ および $b \in B$ を固定する。a は X の上界ではないので、$a < x_1$ を満たす $x_1 \in X$ が存在する。また、b は X の上界なので、$x_1 \leqq b$ である。従って、

$$a < x_1 \leqq b$$

であり、任意の $a \in A$ および $b \in B$ に対して $a < b$ が示される。即ち、$\langle A, B \rangle$ は $\mathbb{R}$ の切断である。

証明すべきことは、B に最小値が存在することである。そのためには、Dedekind の切断より、A に最大値が存在しないことを言えば十分である。これを背理法によって証明する。A に最大値が存在したと仮定する。$a_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max A$ とする。$a_0 \in A$ であるので、$a_0 \notin B$、即ち a_0 は X の上界ではない。従って

$$a_0 < x_2$$

を満たす $x_2 \in X$ が存在する。このとき

$$a_0 < \frac{x_2 + a_0}{2}$$

であることに注意する。a_0 が A の最大値であったので、$\dfrac{x_2 + a_0}{2}$ は A の要素ではない。従って、B の要素でなければならない。即ち、$\dfrac{x_2 + a_0}{2}$ は X の上界である。これは、$x_2 \in X$ なので

$$\frac{x_2 + a_0}{2} < x_2$$

に矛盾する。以上により、A に最大値が存在しないことが証明された。X が下に有界の場合についても同様に証明される。

Weierstrass の定理を用いると、例えば $\mathbb{N}$ が上に有界ではないことを証明することができる。実際、$\mathbb{N}$ が上に有界であると仮定してみる。このとき、Weierstrass の定理によって $\mathbb{N}$ の上限 $r \in \mathbb{R}$ が存在することになる。このとき、命題 1 より r は $\mathbb{N}$ の上界であり、かつ $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, r - \epsilon < n$ を満たす。ここで $\epsilon = 1$ として

$$\exists n \in \mathbb{N}, r - 1 < n$$

が言えるので、このような n を一つ選んで n_0 とする。即ち、

$$r - 1 < n_0$$

である。従って

$$r < n_0 + 1$$

であり、$n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ なければならないから、r が $\mathbb{N}$ の上界であるということに矛盾することになる。

定理 2 (Archimedes の公理)

$$\forall r > 0, \exists n \in \mathbb{N}, nr > 1.$$

証明　背理法による。これが成立しないとすると

$$\exists r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, nr \leqq 1$$

であるので、このような r の 1 つを選んで r_0 とする。即ち

$$\forall n \in \mathbb{N}, nr_0 \leqq 1$$

である。この命題は

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leqq \frac{1}{r_0}$$

と書き換えられるが、これは定理の直前で述べた N が上に有界ではないことに矛盾することになる。よって、定理が証明された。

$X \subseteqq \mathbb{R}$ が上に有界ではないとき、

$$\sup X = \infty$$

と表わし、

$$\sup X < \infty$$

は、X が上に有界であるという意味に用いる。同様に、下に有界でないときは

$$\inf X = -\infty$$

と表わし、

$$\inf X > -\infty$$

は、X が下に有界であるという意味に用いる。また、$\sup X$（$\inf X$）が存在するということも、X が上（下）に有界であるという意味に用いることがある。ここで「存在する」とは、実数として存在するという意味である。$\pm\infty$ は実数として存在しないものである。

2 数列

数列

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

を、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ により表すことにする。

定義 7 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} & x_n \to x \quad (n \to \infty) \\ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad & \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \Rightarrow |x - x_n| < \epsilon) \end{aligned}$$

と定義して、数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に収束すると言う。また、このとき

$$\lim_{n \to \infty} x_n \overset{\text{def}}{=} x$$

と表す。

数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が言えることを証明してみよう。任意の $\epsilon > 0$ を固定する。Archimedes の公理から、$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n_0 \epsilon > 1$$

が言える。$n \geqq n_0$ と仮定する。このとき

$$n\epsilon > 1$$

が言えるので

$$\left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

が示される。従って

$$n \geqq n_0 \;\Rightarrow\; \left| 0 - \frac{1}{n} \right| < \epsilon$$

が言えるので、

$$\exists N \in \mathbb{N}, \left(n \geqq N \;\Rightarrow\; \left| 0 - \frac{1}{n} \right| < \epsilon \right)$$

が示される。$\epsilon > 0$ は任意だったので

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \left(n \geqq N \;\Rightarrow\; \left| 0 - \frac{1}{n} \right| < \epsilon \right)$$

が証明された。

命題 2 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$x_n \to x\ (n \to \infty)\ \wedge\ x_n \to x'\ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

が言える。即ち、数列が異なる 2 つの数に収束することはありえない。

証明 $x_n \to x\ (n \to \infty)$ かつ $x_n \to x'\ (n \to \infty)$ とする。$x \neq x'$ と仮定する。$x < x'$ として一般性を失わない。$r \stackrel{\text{def}}{=} (x' - x)/2$ とおくと、$r > 0$ である。$x_n \to x\ (n \to \infty)$ から

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow\ |x - x_n| < \epsilon)$$

なので、

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow\ |x - x_n| < r)$$

が言える。このような N の 1 つを選んで、N_1 とする。即ち、

$$n \geqq N_1 \ \Rightarrow\ |x - x_n| < r$$

である。同様に、$x_n \to x'\ (n \to \infty)$ から

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow\ |x' - x_n| < \epsilon)$$

なので、

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow\ |x' - x_n| < r)$$

が言える。このような N の 1 つを選んで、N_2 とする。即ち、

$$n \geqq N_2 \ \Rightarrow\ |x' - x_n| < r$$

である。

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \max\{N_1, N_2\}$$

とおく。$N_1 \leqq m$ なので、

$$|x - x_m| < r$$

即ち

$$x - r < x_m < x + r$$

である。同様に、$N_2 \leqq m$ なので、

$$|x' - x_m| < r$$

即ち

$$x' - r < x_m < x' + r$$

である。従って

$$x_m < x + r = x' - r < x_m$$

となり、矛盾である。よって、$x = x'$ でなければならない。

命題 3 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\exists x \in \mathbb{R}, x_n \to x \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \exists K \geqq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqq K$$

が言える。即ち、収束する数列は有界である。

証明 $\exists x \in \mathbb{R}, x_n \to x \ (n \to \infty)$ と仮定する。このような x を x_∞ とする。

$$x_n \to x_\infty \quad (n \to \infty)$$

である。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ |x_\infty - x_n| < \epsilon)$$

なので、$\epsilon = 1$ として

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ |x_\infty - x_n| < 1)$$

である。このような N を 1 つ選んで、m とする。即ち

$$n \geqq m \ \Rightarrow \ |x_\infty - x_n| < 1$$

である。$n \geqq m$ である $n \in \mathbb{N}$ に対しては

$$|x_\infty - x_n| < 1$$

即ち

$$x_\infty - 1 < x_n < x_\infty + 1$$

であるので、

$$|x_n| < \max\{|x_\infty - 1|, |x_\infty + 1|\}$$

が言える。一方、$1 \leqq n < m$ である $n \in \mathbb{N}$ に対しては

$$|x_n| \leqq \max\{|x_1|, \ldots, |x_{m-1}|\}$$

である。従って、

$$K_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \max\{|x_1|, \ldots, |x_{m-1}|, |x_\infty - 1|, |x_\infty + 1|\}$$

とおけば、

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqq K_0$$

が言える。$K_0 \geqq 0$ であるので、

$$\exists K \geqq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqq K$$

が証明された。

命題 4 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \quad \Leftrightarrow \quad -x_n \to -x \ (n \to \infty) \quad \Leftrightarrow \quad |x - x_n| \to 0 \ (n \to \infty)$$

が言える。

証明

$$|x - x_n| = |(-x) - (-x_n)| = |0 - |x - x_n||$$

であることより示される。

命題 5 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = x$$

であれば、

$$x_n \to x \quad (n \to \infty)$$

である。即ち、定数列はその定数に収束する。

証明 任意の $\epsilon > 0$ を固定する。$n \geqq 1$ ならば

$$|x - x_n| = 0 < \epsilon$$

であるから、

$$n \geqq 1 \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \epsilon$$

が言える。$1 \in \mathbb{N}$ なので

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \epsilon)$$

が言え、$\epsilon > 0$ は任意だったので

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \epsilon)$$

が示される。

命題 6 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列、$x \in \mathbb{R}$ とする。$K > 0$ に対して

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqq |x - x_n| \leqq K y_n$$

が成立するとする。このとき、

$$y_n \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \qquad x_n \to x \ (n \to \infty)$$

が言える。

証明　$y_n \to 0\ (n \to \infty)$ であるとする。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow\ |0 - y_n| < \epsilon)$$

である。任意の $\epsilon > 0$ を固定する。$\dfrac{\epsilon}{K} > 0$ なので、このとき

$$\exists N \in \mathbb{N}, \left(n \geqq N \ \Rightarrow\ |0 - y_n| < \frac{\epsilon}{K}\right)$$

であるので、このような N の１つを N_0 とする。即ち、

$$n \geqq N_0 \ \Rightarrow\ |0 - y_n| < \frac{\epsilon}{K}$$

である。$n \geqq N_0$ とすると

$$|x - x_n| \leqq K y_n = K\,|0 - y_n| < K \cdot \frac{\epsilon}{K} = \epsilon$$

であるので、

$$n \geqq N_0 \ \Rightarrow\ |x - x_n| < \epsilon$$

が言える。$N_0 \in \mathbb{N}$ なので

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow\ |x - x_n| < \epsilon)$$

が言え、$\epsilon > 0$ は任意だったので

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow\ |x - x_n| < \epsilon)$$

が言える。よって、$x_n \to x\ (n \to \infty)$ が示された。

定理 3 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列として、

$$\begin{aligned} x_n &\to x \quad (n \to \infty) \\ y_n &\to y \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

であるとする。このとき

$$x_n \pm y_n \to x \pm y \quad (n \to \infty)$$

が言える。即ち、

$$\lim_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \pm \lim_{n \to \infty} y_n$$

が成立する。

証明

$$\begin{aligned} x_n &\to x \quad (n \to \infty) \\ y_n &\to y \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

であることより、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \epsilon) \qquad \cdots \qquad (1)$$
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ |y - y_n| < \epsilon) \qquad \cdots \qquad (2)$$

である。
　まず

$$x_n + y_n \to x + y \quad (n \to \infty)$$

であることを証明する。任意の $\epsilon > 0$ を固定する。$\dfrac{\epsilon}{2} > 0$ であるので (1) より

$$\exists N \in \mathbb{N}, \left(n \geqq N \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \frac{\epsilon}{2}\right)$$

が言える。このような N の１つを選び N_1 とする。即ち、

$$n \geqq N_1 \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

である。一方、$\dfrac{\epsilon}{2} > 0$ であるので (2) より

$$\exists N \in \mathbb{N}, \left(n \geqq N \ \Rightarrow \ |y - y_n| < \frac{\epsilon}{2}\right)$$

が言える。このような N の１つを選び N_2 とする。即ち、

$$n \geqq N_2 \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

である。ここで

$$N_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{N_1, N_2\}$$

とおく。$n \geqq N_0$ とすると、$n \geqq N_1$ であることから

$$|x - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

であり、また $n \geqq N_2$ であることから

$$|y - y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

が言えるので、

$$\begin{aligned} |(x+y) - (x_n + y_n)| &= |(x - x_n) + (y - y_n)| \\ &\leqq |x - x_n| + |y - y_n| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

となり、

$$n \geqq N_0 \ \Rightarrow \ |(x+y) - (x_n + y_n)| < \epsilon$$

が成立する。ここで、$N_0 \in \mathbb{N}$ なので

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ |(x+y) - (x_n + y_n)| < \epsilon)$$

が言える。$\epsilon > 0$ は任意であったので、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \Rightarrow |(x+y)-(x_n+y_n)| < \epsilon)$$

が示される。即ち、

$$x_n + y_n \to x + y \quad (n \to \infty)$$

が証明された。

$$x_n - y_n \to x - y \quad (n \to \infty)$$

であることは、$y_n \to y$ $(n \to \infty)$ と $-y_n \to -y$ $(n \to \infty)$ が同値であることと

$$x_n - y_n = x_n + (-y_n)$$

より、前半の結果に帰着される。

定理 4 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列として、

$$\begin{aligned} x_n &\to x \quad (n \to \infty) \\ y_n &\to y \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

であるとする。このとき

$$x_n y_n \to xy \quad (n \to \infty)$$

が言える。即ち、

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

が成立する。

証明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する数列なので、命題 3 より

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leqq K_0$$

を満たす $K_0 \geqq 0$ があることに注意する。

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \max\{K, |y|\}$$

とおく。このとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} |xy - x_n y_n| &= |xy - x_n y + x_n y - x_n y_n| \\ &\leqq |xy - x_n y| + |x_n y - x_n y_n| \\ &= |x - x_n|\,|y| + |x_n|\,|y - y_n| \\ &\leqq |x_n - x|\,|y| + K_0\,|y - y_n| \\ &\leqq K\,(|x_n - x| + |y_n - y|) \end{aligned}$$

が成立する。従って、命題 4、定理 3、命題 6 を用いて

$$x_n y_n \to xy \quad (n \to \infty)$$

が証明される。

命題 7 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$x_n \to x \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \qquad |x_n| \to |x| \quad (n \to \infty)$$

が言える。ただし、逆は一般的に言えない。

証明 まず、一般的に成立する不等式

$$||a| - |b|| \leqq |a - b|$$

を証明する。これは

$$|a| = |a - b + b| \leqq |a - b| + |b|$$

より

$$|a| - |b| \leqq |a - b|$$

が、また

$$|b| = |b - a + a| \leqq |b - a| + |a|$$

より

$$-(|a| - |b|) \leqq |a - b|$$

が成立することから示される。

いま示した不等式から、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$||x| - |x_n|| \leqq |x - x_n|$$

であるので、命題４、命題６を用いて、証明が完成する。

命題 8 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$$

かつ、

$$x_n \to x \quad (n \to \infty)$$

を満たす $x > 0$ が存在するとする。このとき、

$$\exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}, K \leqq x_n$$

を満たす。従って、$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は有界な数列である。

証明 収束する数列は有界であるという命題の証明と本質的に同じであるので、証明は読者が完成させよ。ヒント：

$$n \geqq m \quad \Rightarrow \quad |x - x_n| < \frac{x}{2}$$

である $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$K_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min\left\{|x_1|, \ldots, |x_{m-1}|, \frac{x}{2}\right\}$$

とおけ。

定理 5 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列として、

$$\begin{aligned} x_n &\to x \quad (n \to \infty) \\ y_n &\to y \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

であるとする。このとき

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y} \quad (n \to \infty)$$

が言える。即ち、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n}$$

が成立する。

証明　この定理の前提条件として、分数 $\dfrac{x_n}{y_n}$ や $\dfrac{x}{y}$ はすべて定義されるということが暗黙の内に仮定されている。即ち、y_n や y はどれも 0 ではない。$|y_n|$ や $|y|$ はいずれも正で、$|y_n| \to |y|$ $(n \to \infty)$ なので、命題８から $\left\{\dfrac{1}{|y_n|}\right\}_{n=-1}^{\infty}$ は有界な数列である。a を $\left\{\dfrac{1}{|y_n|}\right\}_{n=-1}^{\infty}$ の上界の１つとすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して不等式

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_n}\right| &= \left|\frac{y_n - y}{y y_n}\right| \\ &= |y - y_n| \cdot \frac{1}{|y|} \cdot \frac{1}{|y_n|} \\ &\leqq |y - y_n| \cdot \frac{1}{|y|} \cdot a \end{aligned}$$

が成立するから

$$\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y} \quad (n \to \infty)$$

が示される。後は、定理４を用いればよい。

定理 6 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ をいずれも収束する数列とする。このとき

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqq y_n \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \leqq \lim_{n\to\infty} y_n$$

が成立する。

証明　練習問題とする。ヒント：まず

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \geqq 0$$

を証明せよ。

3 Cauchy 列

定義 8 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は単調増加である} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqq x_{n+1},\\
&\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は単調減少である} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqq x_{n+1},\\
&\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は単調である} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は単調増加である}) \wedge (\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は単調減少である})
\end{aligned}$$

と定義する。

定理 7 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ が単調かつ有界である} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n \text{ が存在する。}$$

が言える。即ち、有界な単調数列は必ず収束する。

証明 この定理は定理１（Weierstrass の定理）の直接の帰結である。単調増加の場合は $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上限に、単調減少の場合は $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の下限に収束することを言えばよい。その際、命題１と単調性を用いる。詳しい証明は、練習問題とする。

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が、

$$\forall K > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \;\Rightarrow\; x_n > K)$$

を満たすとき、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は ∞ に発散するといい、

$$x_n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

あるいは

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

と表現する。また、

$$\forall K < 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \;\Rightarrow\; x_n < K)$$

を満たすとき、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $-\infty$ に発散するといい、

$$x_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$$

あるいは

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

と表現する。

$\lim_{n\to\infty} x_n$ が存在すると言った場合、これは実数として存在するという意味で、数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することと同じ意味に用いる。$\lim_{n\to\infty} x_n$ が定義されると言った場合は、$\pm\infty$ まで含めて存在する場合を言う。単調数列に対しては $\lim_{n\to\infty} x_n$ は存在しないことはある（有界でない場合）が、必ず定義される（有界でないときは ∞ または $-\infty$ になる）。$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ などは定義されない。

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$$

が定義される（存在する）場合、

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

は定義される（存在する）といい、

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$$

とする。例えば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は存在する（実際、1 になる)。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は存在しないが定義される（実際、∞ になる)。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ は定義されない。

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \overline{x}_k &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{k \leqq n < \infty} x_n = \sup\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} \\ \underline{x}_k &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{k \leqq n < \infty} x_n = \inf\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} \end{aligned}$$

と定義する。$\overline{x}_k$ および $\underline{x}_k$ は必ずしも存在するとは限らないが、∞ あるいは $-\infty$ をとる場合も含めて必ず定義され、

$$\underline{x}_1 \leqq \underline{x}_2 \leqq \cdots \leqq \underline{x}_k \leqq x_k \leqq \overline{x}_k \leqq \cdots \leqq \overline{x}_2 \leqq \overline{x}_1$$

が成立する。

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} x_n &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k \\ \liminf_{n\to\infty} x_n &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \underline{x}_k \end{aligned}$$

と定義して、$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} x_n$ および $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} x_n$ をそれぞれ、数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限および下極限という。またこれは

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} x_n &= \inf_{1 \leqq k < \infty} \left(\sup_{k \leqq n < \infty} x_n \right) \\ \liminf_{n\to\infty} x_n &= \sup_{1 \leqq k < \infty} \left(\inf_{k \leqq n < \infty} x_n \right) \end{aligned}$$

とも表現可能である。上極限、下極限は ∞ あるいは $-\infty$ をとる場合も含めて必ず定義され、

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

を満たす。特に、数列が上に有界ならば上極限が必ず存在し、数列が下に有界ならば下極限が必ず存在する。上極限および下極限が存在して、値が異なる例を１つだけ挙げておく。

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = -1$$

である。

定理 8 (区間縮小列) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を単調増加数列、$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を単調減少数列とし、

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqq y_n$$

かつ

$$y_n - x_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たすとする。このとき、

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqq r \leqq y_n$$

を満たす $r \in \mathbb{R}$ が唯一存在する。

証明　任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してこのとき

$$x_1 \leqq x_n \leqq y_n \leqq y_1$$

であるから、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ はいずれも有界な数列であることがわかる。従って、$\lim_{n\to\infty} x_n$ および $\lim_{n\to\infty} y_n$ が存在する。$x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n$、$y \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} y_n$ とする。定理6より、$x \leqq y$ である。$x < y$ であるとして矛盾を導く。もしそうであるとすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_n \leqq x < y \leqq y_n$$

であるから

$$0 < y - x \leqq y_n - x_n$$

であり、$y_n - x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ に矛盾する。従って、$r \stackrel{\text{def}}{=} x$ として証明が完成する（一意性は $x \leqq r \leqq y = x$ より示される）。

この定理の前提を満たす区間の列 $\{[x_n, y_n]\}_{n=1}^{\infty}$ のことを、区間縮小列という。区間縮小法の定理は、区間縮小列に対して

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n]$$

が唯一点からなる集合であることを述べている。ここで、区間縮小列は閉区間であることが重要である。

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n)$$

は空集合になることがある。例えば、$\left\{\left[0, \frac{1}{n}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ は区間縮小列であり、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$$

であるが、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

である。

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを証明する場合、まず収束先 x を見つけてから、命題

$$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow\ |x-x_n|<\epsilon)$$

を検証しなければならない。収束先 x がわからなくても、収束することを検証することが可能であることを述べたのが次ぎの定義と定理である。

定義 9 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ が Cauchy 列である } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, (m,n \geqq N \ \Rightarrow\ |x_m-x_n|<\epsilon)$$

定理 9 (Cauchy の判定法) 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ が存在する } \Leftrightarrow\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ が Cauchy 列である}$$

証明 ($\Rightarrow$) $x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n$ とおく。

$$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow\ |x-x_n|<\epsilon)$$

が成立する。任意の $\epsilon>0$ を固定する。$\dfrac{\epsilon}{2}>0$ であるので、

$$\exists N\in\mathbb{N}, \left(n \geqq N \ \Rightarrow\ |x-x_n|<\frac{\epsilon}{2}\right)$$

である。このような N を1つ選んで、N_0 とする。即ち

$$n \geqq N_0 \ \Rightarrow\ |x-x_n|<\frac{\epsilon}{2}$$

が成立する。$m,n \geqq N_0$ とすると、

$$|x-x_m|<\frac{\epsilon}{2} \quad \text{かつ} \quad |x-x_n|<\frac{\epsilon}{2}$$

であるので、

$$|x_m-x_n| = |x_m-x+x-x_n| = |x_m-x|+|x-x_n| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が言える。よって

$$m,n \geqq N_0 \ \Rightarrow\ |x_m-x_n|<\epsilon$$

が成立する。$N_0\in\mathbb{N}$ であったので

$$\exists N\in\mathbb{N}, (m,n \geqq N \ \Rightarrow\ |x_m-x_n|<\epsilon)$$

$\epsilon>0$ は任意であったので

$$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, (m,n \geqq N \ \Rightarrow\ |x_m-x_n|<\epsilon)$$

が示される。即ち、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列である

(⇐)　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるとする。

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (m, n \geqq N \ \Rightarrow\ |x_m - x_n| < \epsilon)$$

である。まず最初に、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であることを示す。$1 > 0$ であるので、

$$\exists N \in \mathbb{N}, (m, n \geqq N \ \Rightarrow\ |x_m - x_n| < 1)$$

が言える。このような N の 1 つを選んで N_0 とする。

$$m, n \geqq N_0 \ \Rightarrow\ |x_m - x_n| < 1$$

である。$n \geqq N_0$ とする。このとき、$N_0 \geqq N_0$ であるので、

$$|x_{N_0} - x_n| < 1$$

即ち

$$x_{N_0} - 1 < x_n < x_{N_0} + 1$$

が言える。よって、

$$n \geqq N_0 \ \Rightarrow\ x_{N_0} - 1 < x_n < x_{N_0} + 1$$

従って、$\{x_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ は有界であり、これに有限個の要素を付け加えた $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ も有界であることが示される。

次に、数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、上極限、下極限を定義したときに用いた

$$\underline{x}_1 \leqq \underline{x}_2 \leqq \cdots \leqq \underline{x}_k \leqq x_k \leqq \overline{x}_k \leqq \cdots \leqq \overline{x}_2 \leqq \overline{x}_1$$

を考える。$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であるので、上極限および下極限は存在する。$\overline{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \limsup_{n\to\infty} x_n$ および $\underline{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \liminf_{n\to\infty} x_n$ とする。$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であるということから、$\{[\underline{x}_k, \overline{x}_k]\}_{k=1}^{\infty}$ が区間縮小列であることを示そう。そのためには、$\overline{x}_k - \underline{x}_k \to 0\ (k \to \infty)$ であることを示せばよい。任意の $\epsilon > 0$ を固定する。$\dfrac{\epsilon}{3} > 0$ であるので、

$$\exists N \in \mathbb{N}, \left(m, n \geqq N \ \Rightarrow\ |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{3}\right)$$

であるので、このような N の 1 つを選んで N_0 とする。

$$m, n \geqq N_0 \ \Rightarrow\ |x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

である。特に、$n \geq N_0$ に対して

$$x_{N_0} - \frac{\epsilon}{3} < x_n < x_{N_0} + \frac{\epsilon}{3}$$

であるので、

$$x_{N_0} - \frac{\epsilon}{3} < \overline{x}_{N_0} \leqq x_{N_0} + \frac{\epsilon}{3}$$

および

$$x_{N_0} - \frac{\epsilon}{3} \leqq \underline{x}_{N_0} < x_{N_0} + \frac{\epsilon}{3}$$

が言える。従って、

$$\overline{x}_{N_0} - \underline{x}_{N_0} \leqq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$$

が得られる。従って、$k \geqq N_0$ ならば

$$\overline{x}_k - \underline{x}_k \leqq \overline{x}_{N_0} - \underline{x}_{N_0} < \epsilon$$

であるから

$$k \geqq N_0 \;\Rightarrow\; \overline{x}_k - \underline{x}_k < \epsilon$$

が示される。ここで、$N_0 \in \mathbb{N}$ なので

$$\exists N \in \mathbb{N}, (k \geqq N_0 \;\Rightarrow\; \overline{x}_k - \underline{x}_k < \epsilon)$$

であり、さらに $\epsilon > 0$ が任意であることから

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (k \geqq N_0 \;\Rightarrow\; \overline{x}_k - \underline{x}_k < \epsilon)$$

を得る。よって、$\overline{x}_k - \underline{x}_k \to 0$ $(k \to \infty)$ が示された。従って、区間縮小法の定理およびその証明から、$r \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\overline{x}_k \to r \quad (k \to \infty) \quad \text{かつ} \quad \underline{x}_k \to r \quad (k \to \infty)$$

が言える。ここで、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\underline{x}_k \leqq r \leqq \overline{x}_k$$

であり、また

$$\underline{x}_k \leqq x_k \leqq \overline{x}_k$$

でもあったので、

$$0 \leqq |r - x_k| \leqq \overline{x}_k - \underline{x}_k$$

であり、従って

$$x_k \to r \quad (k \to \infty)$$

が示される。即ち、$\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k$ が存在することが証明された。

命題 9 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} x_n \text{ が存在する} \\ \Leftrightarrow \; & \limsup_{n\to\infty} x_n \text{ が存在する } \wedge \liminf_{n\to\infty} x_n \text{ が存在する } \wedge \; \limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n \end{aligned}$$

が成立する。

証明　Cauchy の判定法の定理およびその証明において、殆ど証明済みである。詳しい証明は練習問題とする。

4 Heine-Borelの被覆定理

数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$$

を満たす自然数列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ を考えると、新たな数列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ を作ることができる。この数列を $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列という。

命題 10 数列が収束するならば、その任意の部分列も同じ極限に収束する。

証明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとして、$x_n \to x \quad (n \to \infty)$ であるとする。即ち

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \epsilon)$$

である。$x_{n_i} \to x \quad (i \to \infty)$ であること、即ち

$$\forall \epsilon > 0, \exists I \in \mathbb{N}, (i \geqq I \ \Rightarrow \ |x - x_{n_i}| < \epsilon)$$

を証明する。任意の $\epsilon > 0$ を固定する。このとき

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \epsilon)$$

であるので、このような N の１つを選んで N_0 とする。

$$n \geqq N_0 \ \Rightarrow \ |x - x_n| < \epsilon$$

である。$N_0 \in \mathbb{N}$ であり

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$$

であるので、$N_0 < n_{i_0}$ となる $i_0 \in \mathbb{N}$ が存在しなければならない。そして、$i \geqq i_0$ ならば $N_0 < n_{i_0} < n_i$ であるので

$$|x - x_{n_i}| < \epsilon$$

である。よって

$$i \geqq i_0 \ \Rightarrow \ |x - x_{n_i}| < \epsilon$$

であり、$i_0 \in \mathbb{N}$ なので

$$\exists I \in \mathbb{N}, (i \geqq I \ \Rightarrow \ |x - x_{n_i}| < \epsilon)$$

が言える。$\epsilon > 0$ は任意だったので

$$\forall \epsilon > 0, \exists I \in \mathbb{N}, (i \geqq I \ \Rightarrow \ |x - x_{n_i}| < \epsilon)$$

が証明された。

定理 10 (Boltzano-Weierstrassの定理) 数列が有界ならば、その部分列で収束するものが存在する。

証明　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な数列とする。このとき、

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_1 \leqq x_n \leqq b_1$$

を満たす a_1 および b_1 が存在する。このとき

$$\begin{aligned} A_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, a_1 \leqq x_n \leqq \frac{a_1 + b_1}{2} \right\}, \\ B_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{a_1 + b_1}{2} \leqq x_n \leqq b_1 \right\} \end{aligned}$$

とおくと、$A_1 \cup B_1 = \mathbb{N}$ であり、$\mathbb{N}$ が無限個の要素を持つから、A_1 と B_1 の少なくとも一方の集合は無限の要素を持たなければならない。A_1 が無限個の要素を持つ場合は

$$a_2 \stackrel{\text{def}}{=} a_1, \quad b_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_1 + b_1}{2}$$

とおき、そうでない場合は

$$a_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 \stackrel{\text{def}}{=} b_1$$

とおく。次に、

$$\begin{aligned} A_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, a_2 \leqq x_n \leqq \frac{a_2 + b_2}{2} \right\}, \\ B_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{a_2 + b_2}{2} \leqq x_n \leqq b_2 \right\} \end{aligned}$$

とおく。$A_2 \cup B_2$ は A_1 が無限個の要素を持つ場合は A_1 であり、そうでなければ B_1 であるので、いずれの場合でも $A_2 \cup B_2$ は無限個の要素を持つ。従って、A_2 と B_2 の少なくとも一方の集合は無限の要素を持たなければならない。A_2 が無限個の要素を持つ場合は

$$a_3 \stackrel{\text{def}}{=} a_2, \quad b_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_2 + b_2}{2}$$

とおき、そうでない場合は

$$a_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad b_3 \stackrel{\text{def}}{=} b_2$$

とおく。これらの操作を繰り返すと、区間縮小列 $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ が得られる。作り方から、各 $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_i \leqq x_{n_i} \leqq b_i$$

を満たすように部分列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ がとれる。区間縮小法の定理から

$$\forall i \in \mathbb{N}, a_i \leqq r \leqq b_i$$

を満たす $r \in \mathbb{R}$ が存在して、しかも

$$x_{n_i} \to r \quad (i \to \infty)$$

が言える。

定理 11 (Heine-Borel の被覆定理) $\{(a_\lambda, b_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ を開区間の集合とする。閉区間 $[a,b]$ に対して

$$[a,b] \subseteqq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)$$

であるならば、$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$[a,b] \subseteqq \bigcup_{i=1}^{n} (a_{\lambda_i}, b_{\lambda_i})$$

が成立する。

注意　$[a,b]$ を (a,b) にしてしまうと、もはやこの定理は一般には成立しなくなる。例えば、

$$\left\{ \left(\frac{1}{n}, 2\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

は $(0,2)$ を覆い尽くすが、ここから有限個取りだして $(0,2)$ を覆い尽くすことは不可能である。覆われる方が閉区間であることが本質的である。

また、$[a,b]$ を $(-\infty, b]$ あるいは $[a, \infty)$ とした場合も定理は成立しない。例えば、

$$\{(-n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

は $(-\infty, 0]$ を覆い尽くすが、ここから有限個取りだして $(-\infty, 0]$ を覆い尽くすことは不可能である。覆われる方が有界集合であることが本質的である。

覆う方に関しては、(a_λ, b_λ) を $[a_\lambda, b_\lambda]$ にした場合、この定理は一般には成立しなくなる。例えば、

$$\{[-1,0]\} \cup \left\{ \left[\frac{1}{n}, 2\right] \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

は、$[-1,1]$ を覆い尽くすが、ここから有限個取りだして $[-1,1]$ を覆い尽くすことは不可能である。覆う方は開区間の集合であることが本質的である。

証明　背理法による。

$$[a,b] \subseteqq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)$$

であるにも関わらず、$\mathcal{I} \overset{\text{def}}{=} \{(a_\lambda, b_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ から有限個の開区間を取りだして $[a,b]$ を覆い尽くせないととす。

$$x_1 \overset{\text{def}}{=} a, \quad y_1 \overset{\text{def}}{=} b$$

とする。即ち、$\mathcal{I}$ から有限個のの要素を取りだして閉区間 $[x_1, y_1]$ を覆い尽くすことはできない。従って、閉区間 $\left[x_1, \dfrac{x_1+y_1}{2}\right]$ 若しくは $\left[\dfrac{x_1+y_1}{2}, y_1\right]$ の少なくとも一方は、$\mathcal{I}$ から有限個のの要素を取りだして覆い尽くすことはできない。そこで、$\left[x_1, \dfrac{x_1+y_1}{2}\right]$ が、$\mathcal{I}$ から有限個のの要素を取りだして覆い尽くすことはできないときには、

$$x_2 \overset{\text{def}}{=} x_1, \quad y_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{x_1+y_1}{2}$$

とし、そうでない場合は

$$x_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{x_1 + y_1}{2}, \quad y_2 \overset{\mathrm{def}}{=} y_1$$

とする。即ち、$\mathcal{I}$ から有限個のの要素を取りだして閉区間 $[x_2, y_2]$ を覆い尽くすことはできない。従って、閉区間 $\left[x_2, \dfrac{x_2 + y_2}{2}\right]$ 若しくは $\left[\dfrac{x_2 + y_2}{2}, y_2\right]$ の少なくとも一方は、$\mathcal{I}$ から有限個のの要素を取りだして覆い尽くすことはできない。そこで、$\left[x_2, \dfrac{x_2 + y_2}{2}\right]$ が、$\mathcal{I}$ から有限個のの要素を取りだして覆い尽くすことはできないときには、

$$x_3 \overset{\mathrm{def}}{=} x_2, \quad y_3 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{x_2 + y_2}{2}$$

とし、そうでない場合は

$$x_3 \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{x_2 + y_2}{2}, \quad y_3 \overset{\mathrm{def}}{=} y_2$$

とする。これらの操作を繰り返すと、区間縮小列 $\{[x_n, x_n]\}_{n=1}^{\infty}$ が得られる。従って、区間縮小法の定理からある $r \in \mathbb{R}$ が定まり

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqq r \leqq y_n$$

となる。ここで、$r \in [a, b]$ であることから

$$r \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)$$

であり、従って

$$\exists \lambda \in \Lambda, r \in (a_\lambda, b_\lambda)$$

が言える。このような λ の 1 つを選んで λ_0 とする。

$$r \in (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0})$$

即ち

$$a_{\lambda_0} < r < b_{\lambda_0}$$

である。$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増大に r に収束し、$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少に r に収束することから

$$a_{\lambda_0} < x_{n_0} \leqq r \leqq y_{n_0} < b_{\lambda_0}$$

となる $n_0 \in \mathbb{N}$ を見つけることができる（ここの部分の正確な論証は練習問題とする）。このことは

$$[x_{n_0}, y_{n_0}] \subseteqq (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0})$$

ということである。ところが、作り方から閉区間 $[x_n, x_n]$ はどれも、$\mathcal{I}$ から有限個のの要素を取りだして覆い尽くすことはできない。これは矛盾である（たった 1 個で覆い尽くせるものが見つかる）。以上により、定理は証明された。

5　距離空間の定義と例

定義 10　X を集合とする。$d : X \times X \to \mathbb{R}$ とする。

$$d \text{ が } X \text{ 上の距離である} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} \text{(D0) } d : X \times X \to [0, \infty), \\ \text{(D1) } d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow x = y, \\ \text{(D2) } \forall x, \forall y \in X,\ d(x, y) = d(y, x), \\ \text{(D3) } \forall x, \forall y, \forall z \in X,\ d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z). \end{array}$$

このとき、$\langle X, d\rangle$ は距離空間であるという。特に、(D2) の性質を距離の対称性と呼び、(D3) の不等式のことを三角不等式と呼ぶ。

例 1

$$d(x, y) \overset{\text{def}}{=} |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

と定義すると、d は $\mathbb{R}$ 上の距離である。三角不等式は、

$$d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leqq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$$

により得られる。

例 2

$$d\left(\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle\right) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2} \qquad \left(\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle \in \mathbb{R}^2\right)$$

と定義すると、d は $\mathbb{R}^2$ 上の距離である。この距離を、ユークリッド距離と呼ぶ。この場合、三角不等式は、三角形の２辺の長さの和は他の１辺の長さより大きいという性質に対応する。

例 3

$$d(x, y) \overset{\text{def}}{=} |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{C})$$

と定義すると、d は $\mathbb{C}$ 上の距離である。$x = x_1 + ix_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$、$y = y_1 + iy_2$ $(y_1, y_2 \in \mathbb{R})$ と表現したとき、

$$d\left(x, y\right) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2}$$

である。

　$\langle X_1, d_1\rangle$ および $\langle X_2, d_2\rangle$ をいずれも距離空間であるとする。$f : X_1 \to X_2$ が存在して、f は１対１上への写像で、かつ

$$\forall x, \forall y \in X_1,\ d_1\left(x, y\right) = d_2\left(f(x), f(y)\right)$$

を満たすとき、距離空間 $\langle X_1, d_1\rangle$ と $\langle X_2, d_2\rangle$ は等距離であるという。例２で挙げた距離空間と例３で挙げた距離空間は等距離である。実際、$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ を

$$f : \langle x_1, x_2\rangle \mapsto x_1 + ix_2$$

と考えれば良い。

　以下に挙げる距離空間の例はいずれも、距離の値が整数となる。このような距離のことを離散距離と呼ぶ。

例 4 X を任意の集合として、

$$d(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} 0, & x = y \text{ のとき}, \\ 1, & x \neq y \text{ のとき}; \end{cases} \qquad (x, y \in X)$$

と定義すると、d は X 上の距離である。

例 5 B_n を n ビット 2 進数の全体の集合とする。

$$d\left(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n\right) \overset{\mathrm{def}}{=} |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \qquad \left(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n \in B_n\right)$$

と定義すると、d は B_n 上の距離である。この距離を Hamming 距離と呼ぶ。

例 6

$$d\left(\langle i_1, i_2 \rangle, \langle j_1, j_2 \rangle\right) \overset{\mathrm{def}}{=} |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| \qquad \left(\langle i_1, i_2 \rangle, \langle j_1, j_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2\right)$$

と定義すると、d は $\mathbb{Z}^2$ 上の距離となる。このような距離を格子距離あるいはマンハッタン距離という。

例 7 $\langle V, E \rangle$ を連結無向グラフとする。即ち、V は節点の集合、E は辺（V の非順序対と考える）の集合である。$v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ に対して

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\} \in E$$

であるとき、$\langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle$ を経路と呼び、v_0 を始点、v_n を終点、n を長さと呼ぶ。ただし、任意の $v \in V$ に対して $\langle v \rangle$ は経路とする（始点と終点が同じ v で同じで長さが 0）。$u, v \in V$ に対して、$d(u, v)$ を、u を始点として v を終点とする経路の長さの最小値と定義する。このとき、d は V 上の距離となる。d はグラフ上の距離という。

例 4 において、X 上のグラフ構造として、任意の 2 点間に辺があると考えると、d はグラフ上の距離となる。例 5 において B_n 上のグラフ構造を、Hamming 距離がちょうど 1 であるビット列の間に辺があるようにすると、Hamming 距離はグラフ上の距離となる。同様に、例 6 において $\mathbb{Z}^2$ 上のグラフ構造を、格子距離がちょうど 1 である点の間に辺があるようにすると、格子距離はグラフ上の距離となる。

線形空間 (ベクトル空間)V 上にノルム $\|\cdot\|$ が定義されていると、

$$d(x, y) \overset{\mathrm{def}}{=} \|x - y\| \qquad (x, y \in V)$$

により、$\langle V, d \rangle$ は距離空間となる。このような d をノルムによって定義される距離と呼ぶ。$\|\cdot\|$ が V 上のノルムとは、

(N0) $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$,

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

(N2) $\forall a \in \mathbb{K}, \forall x \in V, \|ax\| = |a| \|x\|$,

(N3) $\forall x, \forall y \in V, \|x + y\| \leqq \|x\| + \|x\|$

を満たすことを言う ($\mathbb{K}$ は係数体、即ち、V が実線形空間ならば $\mathbb{R}$、V が複素線形空間ならば $\mathbb{C}$ とする)。(N3) の条件はやはり三角不等式と呼ぶ。実際、$x, y \in V$ に対して $x - y \in V$ であり、(N0) の条件より

$$d(x, y) = \|x - y\| \geqq 0$$

が言えて、(D0) を満たす。また、(N1) の条件から

$$d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|x - y\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x - y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$$

であり、(D1) が言える。更に、(N2) から

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-1(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = d(y, x)$$

なので、(D2) が言える。最後に、(N3) から (D3)

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leqq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$$

が示される。例 1 から例 3 までは、どれもノルムによって定義される距離である。例 1 では $\mathbb{R}$ 上のノルムを

$$\|x\| \overset{\text{def}}{=} |x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義している。例 2 では $\mathbb{R}^2$ 上のノルムを

$$\|\langle x_1, x_2\rangle\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} \qquad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

で定義している。例 3 では $\mathbb{C}$ 上のノルムを

$$\|x + iy\| \overset{\text{def}}{=} |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

で定義している。これらのノルムがいずれも (D0) から (D3) を満たしていることを確かめることは練習問題とする (特に、三角不等式)。

命題 11 $\langle X, d\rangle$ は距離空間とする。このとき、次の不等式が成立する。

$$\forall x, \forall y, \forall z \in X, |d(x, y) - d(x, z)| \leqq d(y, z).$$

証明 $x, y, z \in X$ とする。三角不等式から

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$$

が言えるので、

$$d(x, z) - d(x, y) \leqq d(y, z)$$

を得る。また、三角不等式と距離の対称性から

$$d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y) = d(x, y) + d(y, z)$$

なので

$$d(x, y) - d(x, z) \leqq d(y, z)$$

を得る。これら 2 つの不等式から

$$-d(y, z) \leqq d(x, y) - d(x, z) \leqq d(y, z).$$

が得られ、望みの不等式が示される。

6　球、有界集合、点列

以下、特に断りの無い限り、$\langle X, d\rangle$ は距離空間とする。

定義 11 $x \in X$ および $K \geqq 0$ に対して、集合 $\{y \mid y \in X,\, d(x,y) \leqq K\}$ を、閉球と呼ぶ。また、集合 $\{y \mid y \in X,\, d(x,y) < K\}$ を開球と呼ぶ。更に、集合 $\{y \mid y \in X,\, d(x,y) = K\}$ を球面と呼ぶ。このとき、x を球の中心、K を球の半径と呼ぶ。或いは、中心が x の K 閉球、K 開球、K 球面などと呼ぶ。さらに、$K=1$ ならば単位閉球、単位開球、単位球面などと呼ぶ。

任意の $x \in X$ を中心とする 0 閉球および 0 球面は 1 点集合 $\{x\}$ であり、0 開球は空集合 $\emptyset$ である。

例 8 $X = \mathbb{R}^2$ としたとき、距離として何通りかが考えられる。一つは、

$$\|\langle x,y\rangle\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} |x| + |y| \qquad (\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2)$$

で定義されるノルムによって導入される距離 d_1 がある。また、

$$\|\langle x,y\rangle\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2+y^2} \qquad (\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2)$$

で定義されるノルムによって導入される距離 d_2 がある (ユークリッド距離)。更に、

$$\|\langle x,y\rangle\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|x|,|y|\} \qquad (\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2)$$

で定義されるノルムによって導入される距離 d_∞ がある。それぞれの距離に関して、中心が原点 $\langle 0,0\rangle$ である単位閉球、単位開球、単位球面を考えよ。また、$X = [0,\infty)^2$ として、同様のことを考えよ。

定義 12 $A \subseteqq X$ を空でない集合とする。このとき、

$$\delta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{K \mid \forall x, \forall y \in A, d(x,y) \leqq K\}$$

を、A の直径と呼ぶ。$\delta(A) < \infty$ であるとき、A は有界であるという。なお、特別の場合として、空集合の直径は 0 とする。

命題 12 $A \subseteqq X$ を空でない集合とする。このとき、次は互いに同値である。

(1) A は有界である.

(2) $\forall x \in X, \exists K \geqq 0, \forall y \in A, d(x,y) \leqq K.$

(3) $\exists x \in X, \exists K \geqq 0, \forall y \in A, d(x,y) \leqq K.$

証明　(1)⇒(2):　A は有界であるとする。任意の $x \in X$ を固定する。A は空ではないので、A のある要素 z を考える。また、任意の $y \in A$ を固定する。A が有界であることから

$$d(z,y) \leqq \delta(A)$$

である。従って、三角不等式から

$$d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y) \leqq d(x,z) + \delta(A)$$

である。$y \in A$ は任意であったので

$$\forall y \in A, d(x, y) \leqq d(x, z) + \delta(A)$$

が言える。ここで、$d(x, z) + \delta(A)$ は y によらない非負の定数であるから

$$\exists K \leqq 0, \forall y \in A, d(x, y) \leqq K$$

が言える。$x \in X$ は任意であったから

$$\forall x \in X, \exists K \leqq 0 \forall y \in A, d(x, y) \leqq K$$

が証明された。

(2)⇒(3): 明らか。

(3)⇒(1): $\exists x \in X, \exists K \geqq 0, \forall y \in A, d(x, y) \leqq K$ をする。このような $x \in X$ と $K \geqq 0$ をそれぞれ1つずつ選んで x_0、K_0 とする。即ち

$$\forall y \in A, d(x_0, y) \leqq K_0$$

を満たす。任意の $x \in A$ および $y \in A$ を固定する。このとき、

$$d(x, y) \leqq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leqq K_0 + K_0$$

が言える。$x, y \in A$ は任意だったので

$$\forall x, \forall y \in A, d(x, y) \leqq 2K_0$$

を得る。このことから、

$$\delta(A) \leqq 2K_0$$

が言え、A が有界であることが証明された。

上の命題から、X の部分集合が有界であるための必要十分条件は、それがある閉球に含まれることであることがわかる。閉球に対して、中心が同じで半径が 2 倍 (或いは $\frac{1}{2}$) の開球を考えることによって、閉球を開球に置き換えることも可能である。

命題 13 $A_1.A_2, \ldots, A_n$ をそれぞれ X の有界な部分集合とする。このとき、$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ も有界である。この特別な場合として、X の任意の有限部分集合 $\{x_1.x_2, \ldots, x_n\}$ は有界である。

証明 $x_1 \in A_1,\ \ldots,\ x_n \in A_n$ として、

$$K \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{1 \leqq i \leqq n} \delta(A_i) + d(x_1, x_i)$$

とおいて、x_1 を中心とする K 閉球を考えよ。

如何なる球も有界であるが、その直径が半径の 2 倍であるとは必ずしも言えない。例えば、離散距離空間では半径が 1 未満の閉球 (開球) は 1 点集合であり、その直径は 0 である。

X の要素の並び

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

を、X 上の点列と呼び、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で表す。$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X 上の点列であることを

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq X$$

と表現することもある。これは、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が集合として X の部分集合になるということである。

定義 13 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq X$ および $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} & x_n \to x \quad (n \to \infty) \\ \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad & \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \Rightarrow d(x, x_n) < \epsilon) \end{aligned}$$

と定義して、点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x に収束すると言う。また、このとき

$$\lim_{n \to \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} x$$

と表す。

点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が x に収束することと、数列 $\{d(x, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束することは同値な命題であることに注意せよ。

$X = \mathbb{R}$ として、距離を

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

で定義すると、距離空間 $\langle X, d \rangle$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は数列であり、それが点列として収束することは、数列として収束することと同値である。

$X = \mathbb{Q}$ として、距離を

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{Q})$$

で定義すると、距離空間 $\langle X, d \rangle$ の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は数列であるが、これが数列として収束しても、$\langle X, d \rangle$ の点列として収束するとは限らない。有理数の数列が、無理数に収束すことがあるからである。収束するとは、考えている距離空間内の点に収束するということに注意しなければならない。

命題 14 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq X$ に対して

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \ \wedge \ x_n \to x' \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

が言える。即ち、点列が異なる 2 つの点に収束することはありえない。

証明 $x_n \to x \ (n \to \infty)$ かつ $x_n \to x' \ (n \to \infty)$ とする。$x \neq x'$ と仮定する。このとき、$d(x, x') > 0$ である。$r \stackrel{\text{def}}{=} d(x, x') > /2$ とおくと、$r > 0$ である。$x_n \to x \ (n \to \infty)$ から

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ d(x, x_n) < \epsilon)$$

なので、

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ d(x, x_n) < r)$$

が言える。このような N の１つを選んで、N_1 とする。即ち、

$$n \geqq N_1 \;\Rightarrow\; d(x, x_n) < r$$

である。同様に、$x_n \to x' \ (n \to \infty)$ から

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \;\Rightarrow\; d(x', x_n) < \epsilon)$$

なので、

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \;\Rightarrow\; d(x', x_n) < r)$$

が言える。このような N の１つを選んで、N_2 とする。即ち、

$$n \geqq N_2 \;\Rightarrow\; d(x', x_n) < r$$

である。

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \max\{N_1, N_2\}$$

とおく。$N_1 \leqq m$ なので、

$$d(x, x_m) < r$$

同様に、$N_2 \leqq m$ なので、

$$d(x', x_m) < r$$

従って

$$d(x, x') \leqq d(x, x_n) + d(x', x_n) < r + r = d(x, x')$$

となり、矛盾である。よって、$x = x'$ でなければならない。

命題 15 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq X$ に対して

$$\exists x \in \mathbb{R}, x_n \to x \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ は有界である}$$

が言える。即ち、収束する点列は有界である。

証明 $\exists x \in \mathbb{X}, x_n \to x \ (n \to \infty)$ と仮定する。このような x を x_∞ とする。

$$x_n \to x_\infty \quad (n \to \infty)$$

である。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \;\Rightarrow\; d(x_\infty, x_n) < \epsilon)$$

なので、$\epsilon = 1$ として

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \;\Rightarrow\; d(x_\infty, x_n) < 1)$$

である。このような N を１つ選んで、m とする。即ち

$$n \geqq m \ \Rightarrow \ d\left(x_{\infty}, x_n\right) < 1$$

である。$n \geqq m$ である $n \in \mathbb{N}$ に対しては

$$d\left(x_{\infty}, x_n\right) < 1$$

が言える。即ち、$\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots\}$ は有界である。一方、$\{x_1, x_2, , \ldots, x_{m-1}\}$ は有限集合なので有界、よってこの２つの集合の和集合である $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界である。

命題 16 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq X$ に対して

$$(\exists N \in \mathbb{N}, n \geqq N \ \Rightarrow \ x_n = x) \quad \Rightarrow \quad (x_n \to x \quad (n \to \infty))$$

が言える。特に、定点列はその定点に収束する。

証明 $\exists N \in \mathbb{N}, n \geqq N \ \Rightarrow \ x_n = x$ とする。任意の $\epsilon > 0$ を固定する。$n \geqq N \ \Rightarrow \ x_n = x$ であるような、$N \in \mathbb{N}$ を選び N_0 とする。即ち、$n \geqq N_0$ ならば $x_n = x$ である。

$$d\left(x, x_n\right) = 0 < \epsilon$$

であるから、

$$n \geqq N_0 \ \Rightarrow \ d\left(x, x_n\right) < \epsilon$$

が言える。$N_0 \in \mathbb{N}$ なので

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ d\left(x, x_n\right) < \epsilon)$$

が言え、$\epsilon > 0$ は任意だったので

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geqq N \ \Rightarrow \ d\left(x, x_n\right) < \epsilon)$$

が示される。

離散距離空間においては、収束する点列としては上の命題の条件を満たす点列しかありえないことに注意せよ。

命題 17 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq X$ とする。このとき、

$$x_n \to x \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \forall y \in X, \left(d\left(y, x_n\right) \to d(y, x) \ (n \to \infty)\right)$$

が成立する。

また、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq X$ に対して、

$$(x_n \to x \ (n \to \infty)) \wedge (y_n \to x \ (n \to \infty)) \quad \Rightarrow \quad \forall y \in X, \left(d\left(x_n, y_n\right) \to 0 \ (n \to \infty)\right)$$

が成立する。

証明 $x_n \to x \ (n \to \infty)$ とする。このとき、$d\left(x, x_n\right) \to 0 \ (n \to \infty)$ であり、一方、前節の最後で示した不等式より

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|d(y, x) - d\left(y, x_n\right)\right| \leqq d\left(x, x_n\right)$$

であることから証明される。後半は練習問題とする。

7　閉集合と開集合

定義 14 $A \subseteq X$ に対して、

$$A\text{ が閉集合である} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \wedge x_n \to x\ (n \to \infty)) \Rightarrow x \in A,$$
$$A\text{ が開集合である} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A, \exists \epsilon > 0, O(x, \epsilon) \subseteq A$$

と定義する。ここで、$O(x, \epsilon)$ は、x を中心とする ϵ 開球を表す。

A が閉集合であるとは、A 上のどんな収束する点列もその収束先は A 内の点であるという意味である。

定理 12 $A \subseteq X$ に対して次が成立する。

$$A\text{ が閉集合である} \Leftrightarrow A^{\mathrm{C}}\text{ が開集合である}$$
$$A\text{ が開集合である} \Leftrightarrow A^{\mathrm{C}}\text{ が閉集合である}$$

証明

$$A\text{ が閉集合である} \Rightarrow A^{\mathrm{C}}\text{ が開集合である}$$
$$A\text{ が開集合である} \Rightarrow A^{\mathrm{C}}\text{ が閉集合である}$$

を証明すれば十分である。

A が閉集合である $\Rightarrow$ A^{C} が開集合である：　A が閉集合であるとする。任意の $x \in A^{\mathrm{C}}$ を固定する。

$$\exists \epsilon > 0, O(x, \epsilon) \subseteq A^{\mathrm{C}}$$

を証明すればよい。背理法によりこれを示す。

$$\neg \left(\exists \epsilon > 0, O(x, \epsilon) \subseteq A^{\mathrm{C}}\right)$$

であると仮定する。このとき、

$$\forall \epsilon > 0, \neg \left(O(x, \epsilon) \subseteq A^{\mathrm{C}}\right)$$

である。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\dfrac{1}{n} > 0$ なので、$\epsilon = \dfrac{1}{n}$ として

$$\neg \left(O\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq A^{\mathrm{C}}\right)$$

であり、従って

$$x_n \in O\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$$

である x_n が存在する。このようにして得られた点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は A 上の点列であり、また各 $n \in \mathbb{N}$ について

$$x_n \in O\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

であるので、

$$d\left(x,x_n\right)<\frac{1}{n}$$

であり

$$x_n\to x\ (n\to 0)$$

が言える。従って、A は閉集合であることから $x\in A$ でなければならない。これは $x\in A^{\mathrm{C}}$ に矛盾する。

A が開集合である $\Rightarrow$ A^{C} が閉集合である： A が開集合であるとする。$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteqq A^{\mathrm{C}}$ かつ

$$x_n\to x\ (n\to\infty)$$

であるとする。$x\in A^{\mathrm{C}}$ であることを示せばよい。背理法でこれを示す。$x\in A$ であると仮定する。このとき、A が開集合であることから

$$\exists\epsilon>0,\ O(x,\epsilon)\subseteqq A$$

でなければならない。このような $\epsilon>0$ を 1 つ選んで ϵ_0 とする。即ち

$$O(x,\epsilon_0)\subseteqq A$$

を満たす。更に、$x_n\to x\ (n\to\infty)$ であることから

$$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},(n\geqq N\ \Rightarrow\ d\left(x,x_n\right)<\epsilon)$$

であるので、

$$\exists N\in\mathbb{N},(n\geqq N\ \Rightarrow\ d\left(x,x_n\right)<\epsilon_0)$$

である。このような $N\in\mathbb{N}$ を 1 つ選んで m とする。即ち

$$n\geqq m\ \Rightarrow\ d\left(x,x_n\right)<\epsilon_0$$

である。特に

$$d\left(x,x_m\right)<\epsilon_0$$

であるので、

$$x_m\in O\left(x,\epsilon_0\right)$$

である。$O\left(x,\epsilon_0\right)\subseteqq A$ であったから $x_m\in A$ となる。これは、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が A^{C} 上の点列であることから $x_m\in A^{\mathrm{C}}$ でなければならず、矛盾である。

定理 13 距離空間において次が成立する。

(1) 全体集合 X は、閉集合かつ開集合である。

(2) 空集合 $\emptyset$ は、閉集合かつ開集合である。

(3) 任意の閉球は、閉集合である。

(4) 任意の開球は、開集合である。

証明 (1) と (2) は閉集合および開集合の定義から明らかである。
(3) を示す。A を閉球、即ち、ある $x \in X$ と $K \geqq 0$ に対して、

$$A = \{y \mid y \in X\ d(x, y) \leqq K\}$$

とする。点列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq A$ が

$$y_n \to y\ (n \to \infty)$$

であるとする。$y \in A$ を示せばよい。各 $n \in \mathbb{N}$ について、$y_n \in A$ であることから、

$$d(x, y_n) \leqq K$$

であるので、$n \to \infty$ として

$$d(x, y) \leqq K$$

を得る。よって、$y \in A$ が示された。
(4) を示す。A を開球、即ち、ある $x \in X$ と $K \geqq 0$ に対して、

$$A = \{y \mid y \in X\ d(x, y) < K\}$$

とする。$K = 0$ ならば A は空集合となり、(2) より明らか。$K > 0$ とする。任意の $y \in A$ を固定する。

$$\exists \epsilon > 0, O(y, \epsilon) \subseteqq A$$

を示せばよい。$d(x, y) < K$ なので

$$\epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} K - d(x, y)$$

とおくと、$\epsilon_0 > 0$ である。$z \in O(y, \epsilon_0)$ とすると

$$d(y, z) < \epsilon_0 = K - d(x, y)$$

なので、

$$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z) < K$$

即ち

$$z \in O(x, K) = A$$

を得る。よって、

$$O(y, \epsilon_0) \subseteqq A$$

で、$\epsilon_0 > 0$ だったから

$$\exists \epsilon > 0, O(y, \epsilon) \subseteqq A$$

が示される。

この定理から、$\mathbb{R}$ 上では、閉区間は閉集合であり、また開区間は開集合であることがわかる。なお、閉集合および開集合という概念は、X によって決まることに注意しなければならない。例えば、X を開区間 (a,b) として

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |x-y| \qquad (x,y \in (a,b))$$

とするならば、(a,b) は全体集合だから閉集合でもある。また、X を開区間 $[a,b]$ として

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |x-y| \qquad (x,y \in [a,b])$$

とするならば、(a,b) は全体集合だから開集合でもある。しかし、$X=\mathbb{R}$ として

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |x-y| \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

とするならば、(a,b) は開集合であるが閉集合ではありえないし、$[a,b]$ は閉集合ではあるが開集合ではあり得ない (このことを証明せよ)。

要素がどれも X の部分集合であるような集合を、X の部分集合族という。即ち、$\mathcal{A}$ が X の部分集合族であるということは、$\mathcal{A} \subseteqq 2^X$ ということである。

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \mid A \text{ は } X \text{ の閉部分集合}\}$$

と定義すると、$\mathcal{C}$ は X の部分集合族である。

$$\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \mid A \text{ は } X \text{ の開部分集合}\}$$

と定義すると、$\mathcal{O}$ も X の部分集合族である。特に、部分集合族 $\mathcal{O}$ のことを、X 上の距離 d によって誘導される位相 (topology) であるという言い方をすることがある。

定理 14 (1)　X 上の部分集合族 $\mathcal{C}$ に対して、次が成立する。

(1-a) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteqq \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C},$

(1-b) $\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{C}.$

(2)　X 上の部分集合族 $\mathcal{O}$ に対して、次が成立する。

(2-a) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteqq \mathcal{O} \;\Rightarrow\; \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{O},$

(2-b) $\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{O} \;\Rightarrow\; \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{O}.$

即ち、$\mathcal{C}$ は有限個の和集合をとる演算に関して閉じていて、任意個の積集合をとる演算に関して閉じている。また、$\mathcal{O}$ は有限個の積集合をとる演算に関して閉じていて、任意個の和集合をとる演算に関して閉じている。

証明　まず、(2) を先に証明することにする。

(2-a)：　$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteqq \mathcal{O}$ とする。即ち、$A_1, A_2, \ldots, A_n$ はいずれも開集合である。任意の $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ を固定する。各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して、$x \in A_i$ であるので、A_i が開集合であることから

$$O(x, \epsilon_i) \subseteqq A_i$$

を満たす $\epsilon_i > 0$ が存在する。ここで、

$$\epsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$$

とおくと、$\epsilon_0 > 0$ であり、$\epsilon_0 \leqq \epsilon_i$ より

$$O(x, \epsilon_0) \subseteqq O(x, \epsilon_i)$$

が言える。従って、

$$O(x, \epsilon_0) \subseteqq A_i$$

が各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について言える。よって

$$O(x, \epsilon_0) \subseteqq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

であり、$\epsilon_0 > 0$ であったので

$$\exists \epsilon > 0,\ O(x, \epsilon) \subseteqq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

が、更に、$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ が任意であったから

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i,\ \exists \epsilon > 0,\ O(x, \epsilon) \subseteqq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

が示される。即ち、$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ は開集合である。

(2-b)：　$\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{O}$ とする。任意の $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ を固定する。

$$\exists A \in \mathcal{A},\ x \in A$$

であるので、このような A を一つ選んで A_0 とする。即ち、$x \in A_0$ である。A_0 は開集合なので、

$$\exists \epsilon > 0,\ O(x, \epsilon) \subseteqq A_0$$

を満たす。このような $\epsilon > 0$ を一つ選んで ϵ_0 とする。即ち、$O(x, \epsilon_0) \subseteqq A_0$ である。$A_0 \subseteqq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ なので、

$$O(x, \epsilon_0) \subseteqq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

が言える。$\epsilon > 0$ だったので、

$$\exists \epsilon > 0,\ O(x, \epsilon) \subseteqq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

が言え、更に $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ は任意だったので

$$\forall x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,\ \exists \epsilon > 0,\ O(x, \epsilon) \subseteqq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

が言える。以上によって、$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ が開集合であることが示された。

(1-a)： $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subseteqq \mathcal{C}$ とする。$\left\{{A_1}^{\mathrm{C}}, {A_2}^{\mathrm{C}}, \ldots, {A_n}^{\mathrm{C}}\right\} \subseteqq \mathcal{O}$ であるので、(2-a) の結果より

$$\bigcup_{i=1}^{n} {A_i}^{\mathrm{C}} \in \mathcal{O}$$

である。従って、ド・モルガンの法則から

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{O}$$

を得る。よって、定理 12 を用いて

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}$$

が示される。

(1-b)： $\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{C}$ とする。このとき、$\left\{A^{\mathrm{C}} \mid A \in \mathcal{A}\right\} \subseteqq \mathcal{O}$ であるので、(2-b) の結果より

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{O}$$

である。

従って、ド・モルガンの法則から

$$\left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A\right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{O}$$

を得る。よって、定理 12 を用いて

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{C}$$

が示される。

任意の $x \in X$ に対して 1 点集合 $\{x\}$ が開集合ならば、X の任意の部分集合は開集合である。何故ならば、$A \subseteqq X$ とすると

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

と書け、開集合族は有限無限を問わず和集合に関して閉じているから、A は開集合であるからである。従ってこのような場合、任意の部分集合は閉集合でもある (閉集合の補集合が開集合だから)。このような事態は離散距離空間で起こりうる。1 点集合は半径 1/2 の開球に等しいから、開集合となるからである。実数空間 $\mathbb{R}$ では、このような事は起こり得ない。任意の $x \in X$ に対して 1 点集合 $\{x\}$ が閉集合であり、

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

であるが、無限和集合に関して閉集合族は閉じていないから、一般に A は閉集合とは言えない。実数空間 $\mathbb{R}$ では、閉集合でもあり開集合でもあるものは、全体集合 $\mathbb{R}$ と空集合 $\emptyset$ しかない。実際、全体集合 $\mathbb{R}$ でも空集合 $\emptyset$ でもない閉かつ開集合が存在したとする。このとき、$\mathbb{R}$ は 2 つの空でない閉集合 A と B に分割できる。$a_1 \in A$、$b_1 \in B$ が取れる。ここで、$a_1 < b_1$ として一般性を失わない。

$$c_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{a_1 + b_1}{2}$$

とおいて、$c_1 \in A$ なら

$$a_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_1,\ b_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} b_1$$

とし、$c_1 \in B$ ならば

$$a_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_1,\ b_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_1$$

とする。これによって、区間縮小列 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ができる。区間縮小法の定理によって、1 点 $r \in \mathbb{R}$ が定まる。A および B が閉集合であり、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = r$$

であることから、$r \in A$ かつ $r \in B$ でなければならず、$A \cap B = \emptyset$ であることに矛盾する。

一般に、X に対して、$A \cap B = \emptyset$ かつ $A \cup B = X$ となるような 2 つの閉集合 A と B(2 つの閉集合 A と B としても同値) がとれるとき、X は不連結であるといい、そうでないとき X は連結であるという。上のことから、離散距離空間は不連結であり、$\mathbb{R}$ は連結であることがわかる。

定義 15 $A \subseteqq X$ とする。このとき、

$$\overline{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{A \subseteqq C \in \mathcal{C}} C$$

$$A^{\circ} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{A \supseteqq O \in \mathcal{O}} O$$

と定義して、$\overline{A}$ を A の閉包、A° を A の開核と呼ぶ。

閉包、開核がそれぞれ閉集合、開集合であることは、直前の定理による。また、それぞれの定義より

$$A \subseteqq C \in \mathcal{C} \ \Rightarrow\ \overline{A} \subseteqq C$$

および、

$$A \supseteqq O \in \mathcal{O} \ \Rightarrow \ A^\circ \supseteqq O$$

が成立する。即ち、A の閉包 $\overline{A}$ を含む最小の閉集合であり、開核 A° は A に含まれる最大の開集合のことである。

命題 18 $A, B \subset X$ とする。

(1) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{A}$.

(2) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

(3) $\left(A^{\mathrm{C}}\right)^\circ = \left(\overline{A}\right)^{\mathrm{C}}$.

(4) $\overline{\left(A^{\mathrm{C}}\right)} = \left(A^\circ\right)^{\mathrm{C}}$.

(5) $A \subseteqq B \ \Rightarrow \ \overline{A} \subseteqq \overline{B}$.

(6) $A \subseteqq B \ \Rightarrow \ A^\circ \subseteqq B^\circ$.

証明　(1) および (2) はそれぞれ、閉集合の閉包はそれ自身、開集合の開核はそれ自身ということから示される。

(3) は

$$\left(A^{\mathrm{C}}\right)^\circ = \bigcup_{A^{\mathrm{C}} \supset O \in \mathcal{O}} A^{\mathrm{C}} = \left(\bigcup_{A^{\mathrm{C}} \supset O \in \mathcal{O}} A \right)^{\mathrm{C}} = \left(\bigcup_{A \subset C \in \mathcal{C}} A \right)^{\mathrm{C}} = \left(\overline{A}\right)^{\mathrm{C}}$$

により示される。

(4) は、A^{C} に対して (3) を適用して

$$\left(\left(A^{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{C}}\right)^\circ = \left(\overline{\left(A^{\mathrm{C}}\right)}\right)^{\mathrm{C}}$$

ここで

$$A^\circ = \left(\overline{\left(A^{\mathrm{C}}\right)}\right)^{\mathrm{C}}$$

両辺の補集合をとって

$$\left(A^\circ\right)^{\mathrm{C}} = \overline{\left(A^{\mathrm{C}}\right)}$$

より示される。

(5) を示す。$A \subseteqq B$ であり、一方、$B \subseteqq \overline{B}$ が成立するので、

$$A \subseteqq \overline{B}$$

が言える。$\overline{B}$ は A を含む閉集合なので、$\overline{A}$ が A を含む最小の閉集合であることから

$$\overline{A} \subseteqq \overline{B}$$

が示される。

(6) は、(5) と同じやり方 (開核の最大性を用いる) でも証明できるし、また (3) を用いて (4) を導いたように、補集合を考えて証明することもできるので、2つの証明方法で証明を付けることを練習問題とする。

定義 16 $A \subseteq X$ とする。このとき

$$\begin{aligned} A \text{ は } X \text{ で稠密である} \quad &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \overline{A} = X, \\ A \text{ は } X \text{ で粗である} \quad &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \left(\overline{A}\right)^{\circ} = \emptyset \text{ と定義する。} \end{aligned}$$

例えば、$\mathbb{R}$ において $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{Q}^{\mathrm{C}}$ は稠密であり、$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{N}$ は粗である。