

確率論

塚田 真

平成 12 年度

1 事象と標本空間

確率について述べられる文脈では

サイコロを振って 3 以上の偶数の目が出る確率は $\frac{1}{3}$ である

とか、

明日の正午から午後 6 時までの間に 1mm 以上の雨が降る確率は 60 % である

などのように、

(a) 確率は (b) である

という形式の文が頻繁に使われる。

問 1 上の (a) と (b) に適当な言葉を入れた文章を 5 つ以上作れ。

(a) に入るべき言葉は、「サイコロを振って 3 以上の偶数の目が出る」、「明日の正午から午後 6 時までの間に 1mm 以上の雨が降る」などのように、ある事実を表わしたものである。これを事象と呼ぶ。事象は起こるかもしれないし、起こらないかもしれない。その起こりやすさを数値化したものが (b) に入る。(b) に入る数値は 0 以上 1 以下の実数、またはそれを百分率や割合で表わしたものである。0 (0% 或いは 0 割) は決して起こらない、0.5 (50% 或いは 5 割) は起こるか起こらないか半々であり、1 (100% 或いは 10 割) は必ず起こることを表わす。

ある事象「... が起こる」に対して、否定をとった「... が起こらない」というのも事象であり、元の事象の余事象という。事象を表わすのに変数を用いることがある。 P を事象とするとき、 $\neg P$ により P の余事象を表わすことにする。事象を表わす変数には、具体的に事象を代入することができる。 P に「サイコロを振って偶数の目が出る」という事象を代入すれば、 $\neg P$ は「サイコロを振って偶数の目が出ない」即ち「サイコロを振って奇数の目が出る」という事象になる。余事象を 2 回とると元の事象に戻る。 $\neg\neg P$ は P と同じ事象を表わす。

問 2 事象とその余事象のペアを 5 組作れ。そのとき、「サイコロを振って偶数の目が出ない」を「サイコロを振って奇数の目が出る」のように、余事象「... でない」という文章を「... である」という形の文章に書き換えよ。

「サイコロを振って 3 以上の偶数の目が出る」という事象は、「サイコロを振って 3 以上の目が出る」という事象と「サイコロを振って偶数の目が出る」という事象が同時に起きることである。事象 P と事象 Q が同時に起こる事象を P と Q の積事象と言い、 $P \wedge Q$ により表わす。「サイコロを振って 3 以上の目か、或いは偶数の目が出る」という事象は、「サイコロを振って 3 以上の目が出る」という事象と「サイコロを振って偶数の目が出る」という事象の少なくとも一方が起きることである。事象 P と事象 Q の少なくとも一方が起こる事象を P と Q の和事象と言い、 $P \vee Q$ で表わす。

問 3 ある事象が、幾つかの他の事象の積事象或いは和事象となっているものを 5 つ考えよ。

事象とは一般に、幾つかの結果の集まりである。「サイコロを振って 3 以上の偶数の目が出る」という事象は、「4 の目」が出るという結果と「5 の目」が出るという結果の集まりと考えることができる。

問 4 サイコロを 2 回投げる実験を考える。次のそれぞれの事象は、どのような結果の集まりと考えられるか。

- 2 回とも同じ目が出る
- 1 回目より 2 回目の方が大きな数の目が出る
- 1 回目と 2 回目に出た目の数の和が 5 以下である。

事象 P と余事象 $\neg P$ の積事象は、決して起こりえない事象である。これを空事象という。また、事象 P と余事象 $\neg P$ の和事象は、必ず起こる事象である。これを全事象という。

すべての可能な結果の集まりを Ω で表わすことが多い。 Ω は集合であり、その要素は結果を表わす。 Ω を標本空間、 Ω の要素を標本と呼ぶ。

サイコロ投げを考えると、

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

と考えてよい。コイン投げなら

$$\Omega = \{ \text{表}, \text{裏} \}$$

である。降水確率を考えるならば、負の降水量はありえないし、1mm 単位で 0mm からせいぜい 1000mm まで考えれば十分であるから、

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$$

などとすることが考えられる。また

$$\Omega = \{x \mid x \text{ は } 0 \text{ 以上の実数} \}$$

としてもよい。現実問題として 10^{10} mm 以上の雨が降るなどという事象は起こりえないし、また π mm の雨なども考えにくい（そんなに正確に降水量は量れない）。しかし、このような標本空間を考えると微積分が使えて便利なこともある。

事象はすべて標本空間の部分集合として表わすことができる。サイコロを投げる実験で、標本空間を $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とすれば、「サイコロを振って 3 以上の目が出る」という事象は、 $\{3, 4, 5, 6\}$ という部分集合で表わされる。「サイコロを振って偶数の目が出る」という事象は、 $\{2, 4, 6\}$ という部分集合で表わされる。「サイコロを振って 3 以上の目が出る」という事象と、「サイコロを振って偶数の目が出る」という事象の積事象「サイコロを振って 3 以上の偶数の目が出る」は、 $\{4, 6\}$ という部分集合で表わされる。興味深いことに

$$\{4, 6\} = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6\}$$

が成立する。「サイコロを振って 3 以上の目が出る」という事象と、「サイコロを振って偶数の目が出る」という事象の和事象「サイコロを振って 3 以上の目、或いは偶数の目が出る」は、 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ という部分集合で表わされる。このときも

$$\{2, 3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{2, 4, 6\}$$

が成立する。積事象は積集合 (共通部分)、和事象は和集合 (合併) に対応する。「サイコロを振って 3 以上の目が出る」という事象の余事象は、「サイコロを振って 2 以下の目が出る」という事象であり、それぞれが対応する標本の集合 $\{3, 4, 5, 6\}$ と $\{1, 2\}$ は互いに補集合の関係にある。事象とその余事象の関係は、部分集合とその補集合の関係に対応する。

問 5 上にのべた事実、即ち積事象は積集合 (共通部分)、和事象は和集合 (合併)、余事象は補集合に対応することを、他の例により確かめよ。

「サイコロを振って 4 以上の目が出る」という事象と、「サイコロを振って 3 以上の目が出る」という事象には

「サイコロを振って 4 以上の目が出る」 $\Rightarrow$ 「サイコロを振って 3 以上の目が出る」
という関係が成立する。これは集合で考えれば

$$\{4, 5, 6\} \subseteq \{3, 4, 5, 6\}$$

という関係である。即ち、事象どうしの「ならば」という関係は、集合の包含関係に対応する。

我々は今後、確率のモデルを考えるときに標本空間 Ω を決め、事象はすべてその標本空間の部分集合と考えることにする。従って、事象に関して導入した演算記号 $\wedge, \vee, \neg$ (これらは論理演算子と呼ばれる) は用いず、集合演算の記号を用いることにする。事象 P や Q は Ω の部分集合であり、 P と Q の積事象は $P \cap Q$ 、和事象は $P \cup Q$ で表現し、 P の余事象は P の補集合を表わす記号 P^c を用いる。空集合 $\emptyset$ は空事象を表わし、全体集合 Ω は全事象を表わす。

定理 1 P, Q, R を事象とする。このとき次が成立する。

$$\begin{aligned} \emptyset^c &= \Omega \\ \Omega^c &= \emptyset \\ P^{cc} &= P \\ P \cap Q &= Q \cap P \\ P \cup Q &= Q \cup P \\ P \cap (Q \cap R) &= (P \cap Q) \cap R \\ P \cup (Q \cup R) &= (P \cup Q) \cup R \\ P \cap (Q \cup R) &= (P \cap Q) \cup (P \cap R) \\ P \cup (Q \cap R) &= (P \cup Q) \cap (P \cup R) \\ (P \cap Q)^c &= P^c \cup Q^c \\ (P \cup Q)^c &= P^c \cap Q^c \\ P \cap P^c &= \emptyset \\ P \cup P^c &= \Omega \end{aligned}$$

定理 2 P, Q, R を事象とする。このとき次が成立する。

$$\begin{aligned} \emptyset &\subseteq P \\ P &\subseteq \Omega \\ P &\subseteq P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(P \subseteq Q) \wedge (Q \subseteq P) &\Rightarrow P = Q \\
(P \subseteq Q) \wedge (Q \subseteq R) &\Rightarrow P \subseteq R \\
P \subseteq Q &\Rightarrow Q^c \subseteq P^c
\end{aligned}$$

問 6 上の 2 つの定理が成立することを確認めよ。

数の集合を標本空間とする場合がよくある。 $\mathbb{R}$ で実数の全体の集合を表わす。 $\mathbb{Z}$ で整数の全体の集合を表わす。 $\mathbb{N}$ で自然数の全体の集合を表わす。これらはどれも無限個の要素から成る集合である。また、 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \mid a < x < b\} \\
[a, b] &= \{x \mid a \leq x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\} \\
(a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\} \\
(-\infty, a) &= \{x \mid x < a\} \\
(-\infty, a] &= \{x \mid x \leq a\} \\
(a, \infty) &= \{x \mid a < x\} \\
[a, \infty) &= \{x \mid a \leq x\}
\end{aligned}$$

集合 A と集合 B に対して、 $A \cap B = \emptyset$ であるとき、 A と B は素であるという。特に A と B が事象を表わすならば、 A と B は排反であるとか、排反事象であるという。

事象 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ が、

$$i \neq j \Rightarrow A_i \text{ と } A_j \text{ が排反である}$$

という条件を満たすとき、 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ は互いに排反であるという。

問 7 $A \cap B \cap C = \emptyset$ であるにもかかわらず、 A, B, C が互いに排反とならない例を作れ。

集合 A に対して、 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ は互いに素で、かつ

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

を満たすならば、 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ は A の分割であるという。例えば

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$$

或いは

$$\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}$$

などは、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の分割である。

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

を満たす実数に対して、

$$[x_0, x_1), [x_1, x_2), [x_2, x_3), \dots, [x_{n-1}, x_n)$$

は、 $[x_0, x_n)$ の分割である。

標本空間 Ω の分割 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ は、どの 2 つも決して同時に起こらず、必ずいずれかが起こる事象の集まりである。

サイコロを 2 回投げる実験の標本空間を

$$\Omega = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \dots, \langle 6, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle\}$$

という 36 個の要素から成る集合で表わす。ここで、 $\langle i, j \rangle$ は「1 回目に出た目の数が i 、2 回目に出た目の数が j 」という結果を表わす。このとき、「1 回目に出た目の数が n 」という事象は

$$A_n = \{\langle n, 1 \rangle, \langle n, 2 \rangle, \langle n, 3 \rangle, \langle n, 4 \rangle, \langle n, 5 \rangle, \langle n, 6 \rangle\}$$

である。 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ は Ω の分割である。また、「2 回目に出た目の数が n 」という事象は

$$B_n = \{\langle 1, n \rangle, \langle 2, n \rangle, \langle 3, n \rangle, \langle 4, n \rangle, \langle 5, n \rangle, \langle 6, n \rangle\}$$

である。 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ は Ω の分割である。

問 8 サイコロを 2 回投げる実験において、「1 回目に出た目の数と 2 回目に出た目の数の和が n である」という事象を集合 C_n で表わす。 $C_2, C_3, C_4, \dots, C_{12}$ をそれぞれ要素を書き並べる形で表わせ。

サイコロを投げる実験を考える。標本空間は

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

と考えてよい。このとき、考えられる事象は次の 64 個ある。要素が 0 個から成る事象 (空事象) は、6 個の中から 0 個を取り出す組合せの数だから ${}_6C_0 = 1$ 個で

$$\emptyset$$

要素が 1 個から成る事象は、6 個の中から 1 個を取り出す組合せの数だから ${}_6C_1 = 6$ 個で

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

要素が 2 個から成る事象は、6 個の中から 2 個を取り出す組合せの数だから ${}_6C_2 = 15$ 個で

$$\begin{aligned} &\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \\ &\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \\ &\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \\ &\{4, 5\}, \{4, 6\}, \\ &\{5, 6\} \end{aligned}$$

(注意 $\{1, 2\}$ と $\{2, 1\}$ などは同じ事象と考える。) 要素が 3 個から成る事象は、6 個の中から 3 個を取り出す組合せの数だから ${}_6C_3 = 20$ 個で

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \\ &\{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\} \\ &\{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \end{aligned}$$

$\{1, 5, 6\},$
 $\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\},$
 $\{2, 4, 5\}, \{2, 4, 6\},$
 $\{2, 5, 6\},$
 $\{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}$
 $\{3, 5, 6\},$
 $\{4, 5, 6\}$

要素が 4 個から成る事象は、6 個の中から 4 個を取り出す組合せの数だから ${}_6C_4 = 15$ 個で

$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 5, 6\},$
 $\{1, 3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\},$
 $\{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\},$
 $\{3, 4, 5, 6\}$

要素が 5 個から成る事象は、6 個の中から 5 個を取り出す組合せの数だから ${}_6C_5 = 6$ 個で

$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}$

要素が 6 個から成る事象 (全事象) は、6 個の中から 6 個を取り出す組合せの数だから ${}_6C_6 = 1$ 個で

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

の計 $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$ 個である。なお、 m 個のうちから n 個を取り出す組合せの数 ${}_mC_n$ は

$${}_mC_n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

で計算される。ここで、 $0! = 1$ とする。

別の方法で、サイコロを投げる実験に関する事象の数が全部で 64 個であるということを数え上げてみよう。次のような表を考える。

1	2	3	4	5	6

1, 2, 3, 4, 5, 6 の各数字の下に空欄の○か×のいずれかの数字を書き込むことができる。例えば

1	2	3	4	5	6
○	×	○	○	×	×

という表が出来たとする。ここで、○印の付いた欄の上の数字だけを取り出して

$\{1, 3, 4\}$

のように集合を作ると 1 つの事象ができる。全部×印なら空事象が、全部○印なら全事象、○印が n 個なら、 n 個の要素から成る事象ができる。○×の付け方の場合の数は $2^6 = 64$ 通りあるので、64 個の事象ができる。

さて、事象は全部で 64 個あることは簡単にわかったが、64 個漏れも重複もなく挙げるにはどうすれば良いであろうか。○と×を一行に 6 個並べたものを、64 個漏れも重複もなく挙げてやれば良いのだが、○と×の代わりに 1 と 0 を一行に 6 個並べたものを考える。これを 2 進数と見ると 10 進数で 0 から 63 までの数ができるので、小さい順から挙げて行けば良い。

10 進数	2 進数	事象
0	000000	{}
1	000001	{6}
2	000010	{5}
3	000011	{5, 6}
4	000100	{4}
5	000101	{4, 6}
6	000110	{4, 5}
7	000111	{4, 5, 6}
8	001000	{3}
9	001001	{3, 6}
10	001010	{3, 5}
11	001011	{3, 5, 6}
12	001100	{3, 4}
13	001101	{3, 4, 6}
14	001110	{3, 4, 5}
15	001111	{3, 4, 5, 6}
16	010000	{2}
17	010001	{2, 6}
18	010010	{2, 5}
19	010011	{2, 5, 6}
20	010100	{2, 4}
21	010101	{2, 4, 6}
22	010110	{2, 4, 5}
23	010111	{2, 4, 5, 6}
24	011000	{2, 3}
25	011001	{2, 3, 6}
26	011010	{2, 3, 5}
27	011011	{2, 3, 5, 6}
28	011100	{2, 3, 4}
29	011101	{2, 3, 4, 6}
30	011110	{2, 3, 4, 5}

31	011111	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$
32	100000	$\{1\}$
33	100001	$\{1, 6\}$
34	100010	$\{1, 5\}$
35	100011	$\{1, 5, 6\}$
36	100100	$\{1, 4\}$
37	100101	$\{1, 4, 6\}$
38	100110	$\{1, 4, 5\}$
39	100111	$\{1, 4, 5, 6\}$
40	101000	$\{1, 3\}$
41	101001	$\{1, 3, 6\}$
42	101010	$\{1, 3, 5\}$
43	101011	$\{1, 3, 5, 6\}$
44	101100	$\{1, 3, 4\}$
45	101101	$\{1, 3, 4, 6\}$
46	101110	$\{1, 3, 4, 5\}$
47	101111	$\{1, 3, 4, 5, 6\}$
48	110000	$\{1, 2\}$
49	110001	$\{1, 2, 6\}$
50	110010	$\{1, 2, 5\}$
51	110011	$\{1, 2, 5, 6\}$
52	110100	$\{1, 2, 4\}$
53	110101	$\{1, 2, 4, 6\}$
54	110110	$\{1, 2, 4, 5\}$
55	110111	$\{1, 2, 4, 5, 6\}$
56	111000	$\{1, 2, 3\}$
57	111001	$\{1, 2, 3, 6\}$
58	111010	$\{1, 2, 3, 5\}$
59	111011	$\{1, 2, 3, 5, 6\}$
60	111100	$\{1, 2, 3, 4\}$
61	111101	$\{1, 2, 3, 4, 6\}$
62	111110	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
63	111111	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

問 9 正四面体のサイコロを考える。4つの面にはそれぞれ東西南北の漢字が書かれている。このサイコロを振る実験を考えたときの事象をすべて挙げよ。なお、標本空間は

$$\Omega = \{ \text{東, 西, 南, 北} \}$$

とする。

問 10 コインを 2 回投げる実験を考えたときの事象をすべて挙げよ。なお、標本空間は

$$\Omega = \{ \text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏} \}$$

とする。

問 11 正八面体のサイコロを考える。4つの面にはそれぞれ 1 から 8 の数字が書かれている。このサイコロを振る実験を考えたときの事象は全部で幾つあるか。

一般に、標本空間 Ω の要素の数が全部で m のとき、事象は全部で 2^m 個あり、

$$\sum_{n=0}^m {}_m C_n = 2^m$$

という公式が成立する。この公式は二項定理

$$\sum_{n=0}^m {}_m C_n x^n y^{(m-n)} = (x+y)^m$$

に $x = y = 1$ を代入して得られる式でもある。

2 事象系

Ω を有限個の結果から成る標本空間とし、 $\mathcal{F}$ を事象の集まりとする。即ち、 $\mathcal{F}$ は集合で、その要素はどれも Ω の部分集合である (ただし、必ずしも $\mathcal{F}$ は Ω の部分集合を全部集めたものとは限らない)。 $\mathcal{F}$ が以下の条件を満たすとき、 $\mathcal{F}$ は Ω 上の事象系であるという。

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

サイコロを投げる実験で、標本空間を

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

としたとき (結果は全部で 6 つなので、有限個の結果から成る標本空間)、64 個の事象をすべて集めた集合

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$$

は事象系である。明らかに、 $\emptyset \in \mathcal{F}$ である。また、 $\{1\} \in \mathcal{F}$ に対して

$$\{1\}^c = \{2, 3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{F}$$

のように、 $\mathcal{F}$ のどの要素に対しても、その補集合をとったものが $\mathcal{F}$ の中に見つかる。さらに、 $\{1\}, \{2\} \in \mathcal{F}$ に対して

$$\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \in \mathcal{F}$$

のように、 $\mathcal{F}$ のどの 2 つ要素 (同じものでもよい) に対しても、その和集合をとったものが $\mathcal{F}$ の中に見つかる。

問 12 上の事実を確かめよ。

事象系は必ずしも標本空間 Ω の部分集合をすべて集めたものとは限らない。

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

として

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$$

も事象系となるための 3 つの条件を満たす。1 つ目の条件 $\emptyset \in \mathcal{F}$ は明らかである。2 つ目の条件は

$$\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2\}^c = \{3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{F}$$

$$\{3, 4\}^c = \{1, 2, 5, 6\} \in \mathcal{F}$$

$$\{5, 6\}^c = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2, 3, 4\}^c = \{5, 6\} \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2, 5, 6\}^c = \{3, 4\} \in \mathcal{F}$$

$$\{3, 4, 5, 6\}^c = \{1, 2\} \in \mathcal{F}$$

$$\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{F}$$

により示される 3 つ目の条件は

$$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$\emptyset \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} \in \mathcal{F}$$

$$\emptyset \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \in \mathcal{F}$$

$$\emptyset \cup \{5, 6\} = \{5, 6\} \in \mathcal{F}$$

$$\emptyset \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{F}$$

$$\emptyset \cup \{1, 2, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\} \in \mathcal{F}$$

$$\emptyset \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{F}$$

$$\emptyset \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\} \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2\} \cup \{1, 2, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\} \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \Omega \in \mathcal{F}$$

$$\{1, 2\} \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F}$$

$$\{3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \in \mathcal{F}$$

$$\{3, 4\} \cup \{5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{F}$$

$$\{3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{F}$$

$$\{3, 4\} \cup \{1, 2, 5, 6\} = \Omega \in \mathcal{F}$$

$$\begin{aligned}
&\{3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{F} \\
&\{3, 4\} \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F} \\
&\{5, 6\} \cup \{5, 6\} = \{5, 6\} \in \mathcal{F} \\
&\{5, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \Omega \in \mathcal{F} \\
&\{5, 6\} \cup \{1, 2, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\} \in \mathcal{F} \\
&\{5, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{F} \\
&\{5, 6\} \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F} \\
&\{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \in \mathcal{F} \\
&\{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 5, 6\} = \Omega \in \mathcal{F} \\
&\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \Omega \in \mathcal{F} \\
&\{1, 2, 3, 4\} \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F} \\
&\{1, 2, 5, 6\} \cup \{1, 2, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\} \in \mathcal{F} \\
&\{1, 2, 5, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \Omega \in \mathcal{F} \\
&\{1, 2, 5, 6\} \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F} \\
&\{3, 4, 5, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\} \in \mathcal{F} \\
&\{3, 4, 5, 6\} \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F} \\
&\Omega \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

問 13 サイコロを投げる実験で、上に挙げた以外の事象系を 1 つ作れ。

$\mathcal{F}$ が標本空間 Ω 上の事象系であるとき、次の条件を満たす。

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

何故ならば、 $\mathcal{F}$ が事象系であることの 1 つ目の条件より

$$\emptyset \in \mathcal{F}$$

であり、これに 2 つ目の条件を組み合わせると

$$\emptyset^c \in \mathcal{F}$$

であるが、 $\emptyset^c = \Omega$ であるから、 $\Omega \in \mathcal{F}$ が示される。一方、 $A, B \in \mathcal{F}$ とすると、2 つ目の条件によって

$$A^c, B^c \in \mathcal{F}$$

これに 3 つ目の条件を組み合わせると

$$A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$$

更にこれに再び 2 つ目の条件を適用すると

$$(A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$

ところが、 $(A^c \cup B^c)^c = A^{cc} \cap B^{cc} = A \cap B$ であるから、 $A \cap B \in \mathcal{F}$ が示される。事象系のことを、ブール代数 (Boolean algebra) と呼ぶこともあることも覚えておこう。

標本空間 Ω が与えられたとき、 Ω 上の事象系は次のようにして作ることができる。まず、 Ω の分割

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

を作る。この n 個の中から 0 個以上 n 個以下の組み合わせを取り出し、それらの和集合をとったものを全部集めると、1 つの事象系ができる。例えば

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

として、分割

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$$

を作る。次のような表を作って

$\{1, 2\}$	$\{3, 4\}$	$\{5, 6\}$	
×	×	×	$\emptyset$
×	×	○	$\{5, 6\}$
×	○	×	$\{3, 4\}$
×	○	○	$\{3, 4, 5, 6\}$
○	×	×	$\{1, 2\}$
○	×	○	$\{1, 2, 5, 6\}$
○	○	×	$\{1, 2, 3, 4\}$
○	○	○	Ω

右の欄の部分集合を全部集めた

$$\{\emptyset, \{5, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4\}, \Omega\}$$

が事象系となる。事象系は事象の集合であるから、事象を並べる順番はどうでもよい (事象についても同じである)。

$$\{\Omega, \{6, 5, 4, 3\}, \{6, 5, 2, 1\}, \{4, 3, 2, 1\}, \{6, 5\}, \{4, 3\}, \{2, 1\}, \emptyset\}$$

とは同じ事象系である。また、分割が

$$\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$$

ならば、

$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6\}$	
×	×	$\emptyset$
×	○	$\{4, 5, 6\}$
○	×	$\{1, 2, 3\}$
○	○	Ω

より

$$\{\emptyset, \{4, 5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \Omega\}$$

が事象系となる。

問 14 サイコロを 2 回投げる実験の事象系をすべて挙げよ。

問 15 標本空間 Ω を n 個に分割したものからできる事象系を作ったとき、この事象系の事象は全部で 2^n あることを示せ。

Ω を無限個の結果から成る標本空間とし、 $\mathcal{F}$ を事象の集まりとする。即ち、 $\mathcal{F}$ は集合で、その要素はどれも Ω の部分集合である (ただし、必ずしも $\mathcal{F}$ は Ω の部分集合を全部集めたものとは限らない)。 $\mathcal{F}$ が以下の条件を満たすとき、 $\mathcal{F}$ は Ω 上の事象系であるという。

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

3 つ目の条件が、この節の最初に挙げた有限の場合の事象系と異なっている。事象の無限列

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots$$

(同じ事象が繰り返し登場しても構わない) が与えられたとき、これ等のいずれかが起こるという事象が

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

である。この条件

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

という条件を含む。即ち、

$$A_1 = A, \quad A_2 = B, \quad A_i = \emptyset \quad (i = 3, 4, 5, \dots)$$

とすればよい。逆に

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

という条件を有限回用いれば

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$$

という条件が得られる。しかし、この条件より

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

という条件の方が強い条件である。

例えば、 $\Omega = \mathbb{N}$ としよう。 $\mathcal{F}$ として、 Ω の部分集合でそれ自身かその補集合のいずれかが空集合または有限個の要素から成る集合であるものを全部集めたものを考える。 $\mathcal{F}$ には、

$$\{1, 2, 3, \dots, n\}$$

や

$$\{n, n+1, n+2, \dots\}$$

などは属する。また、

$$\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$$

も属するが、偶数である自然数全体の集合

$$\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

は $\mathcal{F}$ には属さない。この集合は無限集合であり、この集合の補集合

$$\{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$$

即ち奇数である自然数全体を集めたものも無限集合だからである。

$\mathcal{F}$ は

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

という条件は確かに満たす。

問 16 上の事実を確かめよ (ヒント：4つのケースが考えられる。 A と B のいずれもが有限集合の場合、 A^c と B^c のいずれもが有限集合の場合、あと2つの場合は?)。

しかし

$$A_n = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$$

としたとき

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$$

であるにも関わらず、上で見たように

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\} \notin \mathcal{F}$$

であるので

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

という条件は満たされない。

問 17 標本空間 Ω が有限個の結果からなる集合の場合は、 $\mathcal{F}$ が

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

という条件を満たせば

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

という条件も満たされることを示せ (ヒント： $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots$ は高々の有限個の事象が繰り返し登場するに過ぎないことに注意せよ)。

この問の結果から我々は、標本空間 Ω が有限集合であれ無限集合であれ、 $\mathcal{F}$ が Ω 上の事象系であることの定義として、

- $\emptyset \in \mathcal{F}$

- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

を採用することにする。

定理 3 Ω を標本空間とし、 $\mathcal{F}$ を Ω 上の事象系であるとする。このとき

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

が成立する。

問 18 上の定理を証明せよ (ヒント：最後の条件を示すには、ド・モルガンの法則

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \\ \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c &= \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \end{aligned}$$

を用いる)。

どんな標本空間 Ω に対しても、 $\mathcal{F}$ として Ω のすべての部分集合を集めたものを考えれば、 $\mathcal{F}$ は Ω 上の事象系となる。 Ω のすべての部分集合を集めたものを、 Ω のべき集合と言い、 2^Ω という記号で表すことにする。この記号は、 Ω が有限集合で、その要素の個数が n のとき、 Ω の部分集合は全部で 2^n 個あるという事実由来している。

3 標本空間 $\mathbb{R}$ 上の事象系

観測した結果が実数であるような実験を考えてみよう。結果があらゆる実数をとる可能性があれば、標本空間は

$$\Omega = \mathbb{R}$$

となる。このような標本空間において

結果は a 以上 b 未満である

という事象は、 Ω の部分集合

$$[a, b)$$

が対応する。 Ω 上の事象系 $\mathcal{F}$ (必ずしも $\mathcal{F} = 2^\Omega$ であるとは限らない) が、すべてのこのような形の $\mathbb{R}$ の部分集合 (半开区間) を含むと仮定してみる。

$$A_n = \left[a + \frac{1}{n}, b \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とすると、 $\mathcal{F}$ が事象系であるための

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

という条件を適用して、

$$(a, b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

であるから、 $\mathcal{F}$ はすべての开区間を含むことがわかる。これは

結果は a より大きく b 未満である

であるという事象である。また

$$A_n = \left[a, b + \frac{1}{n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とすると、 $\mathcal{F}$ が事象系であることから得られる条件

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

という条件を適用して、

$$[a, b] = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

であるから、 $\mathcal{F}$ はすべての閉区間を含むことがわかる。これは

結果は a 以上 b 以下である

という事象である。この特別な場合として

$$A_n = \left[a, a + \frac{1}{n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とすると、

$$\{a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

であるから、 $\mathcal{F}$ はすべての1点集合を含むことがわかる。これは

結果は a である

という事象である。

問 19 上の $\mathcal{F}$ は、

$$(a, b]$$

の形のすべての半开区間を含むことを示せ。また、この事象を文章で表現せよ。

問 20 上の $\mathcal{F}$ は、

$$(-\infty, a], \quad (-\infty, a), \quad [a, \infty), \quad (a, \infty)$$

の形の部分集合をすべてを含むことを示せ。また、これ等の事象を文章で表現せよ。

$\mathcal{F}$ はすべての 1 点集合を含むので

$$A_n = \{n\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とすれば、

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

が示される。 Ω の部分集合としての $\mathbb{N}$ は

結果は自然数である

という事象である。

問 21 上の $\mathcal{F}$ には、

結果は自然数かつ偶数である

という事象に対応する部分集合が属することを示せ。

集合 A の要素を順番に挙げて全てを尽くすことができるとき、 A は可算集合であるという。即ち

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

のように書ける集合のことである。自然数の全体 $\mathbb{N}$ は可算集合である。

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

と書けるからである。偶数である自然数の全体も

$$\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

と書けるから、可算集合である。整数の全体 $\mathbb{Z}$ も可算集合である。

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots, +n, -n, \dots\}$$

と書けるからである。有理数の全体 $\mathbb{Q}$ が可算集合であることを見てみよう。有理数とは分数で表現できる数のことであることに注意する。分数を下のように並べて、右肩のカッコの数の順番に分数を取り出せば (通分して重複するものは除く)、全ての分数を尽くすことができる。

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & -\frac{3}{1}^{(19)} & -\frac{2}{1}^{(11)} & -\frac{1}{1}^{(5)} & \frac{0}{1}^{(1)} & \frac{1}{1}^{(2)} & \frac{2}{1}^{(6)} & \frac{3}{1}^{(12)} & \dots \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 \dots & -\frac{3}{2}^{(18)} & -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2}^{(4)} & \leftarrow \frac{0}{2} & \leftarrow \frac{1}{2}^{(3)} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2}^{(13)} & \dots \\
 & \uparrow & \uparrow & & & & \downarrow & \downarrow & \\
 \dots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3}^{(10)} & \leftarrow -\frac{1}{3}^{(9)} & \leftarrow \frac{0}{3} & \leftarrow \frac{1}{3}^{(8)} & \leftarrow \frac{2}{3}^{(7)} & \frac{3}{3} & \dots \\
 & \uparrow & & & & & & \downarrow & \\
 \dots & -\frac{3}{4}^{(17)} & \leftarrow -\frac{2}{4} & \leftarrow -\frac{1}{4}^{(16)} & \leftarrow \frac{0}{4} & \leftarrow \frac{1}{4}^{(15)} & \leftarrow \frac{2}{4} & \leftarrow \frac{3}{4}^{(14)} & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
 \end{array}$$

可算でない集合が存在する。実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ は可算でない。これを見るために、 $\mathbb{R}$ の部分集合である $[0, 1]$ が可算集合ではないことを背理法によって証明する。 $[0, 1]$ が可算集合であると仮定する。即ち

$$[0, 1] = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

と表現できるとする。ここで、 a_n を小数点に展開して

$$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots$$

と表現する。このとき、

$$0.1 = 0.0999\cdots$$

のように2通りに展開できるものは、9 が無限に続く展開の方を採用することにする。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & . & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0 & . & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & . & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

ここで、

$$b = 0.b_1b_2b_3\cdots$$

と表現される実数 b を

$$b_n \neq a_{nn} \quad \text{かつ} \quad b_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であるように定める。実数 b は、0 以上 1 以下の数であるから、いずれかの実数 a_n に等しいはずである。しかし、 $b_n \neq a_{nn}$ なので $b \neq a_n$ となり矛盾である。従って、

$$[0, 1] = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

と表現することはできない。

以上によって、可算でない集合があることがわかった。可算でない集合を非可算と呼ぶ。

ここで、 $\mathbb{R}$ の部分集合の「長さ」の概念を説明しておこう。 $a < b$ であるとき、半開区間

$$(a, b]$$

の長さを

$$b - a$$

とする。このことを

$$\mu((a, b]) = b - a$$

と表現する。 $a < b < c$ のとき

$$\mu((a, c]) = \mu((a, b]) + \mu((b, c])$$

を満たす。半開区間 $(a, c]$ を2つに分割したとき、元の半開区間の長さは、2つに分けられたそれぞれの半開区間の長さの和になる。3つ以上に分割したときも同様である。

$$b = a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$$

かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

であるとしよう。半開区間 $(a, b]$ は

$$\cdots, (a_n, a_{n-1}], \cdots, (a_2, a_1], (a_1, a_0]$$

と、可算個の半開区間に分割される。このとき

$$\mu((a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu((a_n, a_{n-1}])$$

を満たす。 $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して、 $\mu(A)$ を A の長さと呼ぶ。今のところ、 A として許されるのは $(a, b]$ の形の半開区間だけである。 A 自身は $(a, b]$ の形の半開区間ではないが、 A が

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

のように分割でき ($i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \emptyset$)、各 A_i が $(a, b]$ の形の半開区間であるときは

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

により A の長さ $\mu(A)$ を定義する。1 点集合 $\{a\}$ の長さが $\frac{1}{n}$ の半開区間 $(a - \frac{1}{n}, a]$ を考えると

$$\{a\} \subseteq \left(a - \frac{1}{n}, a\right]$$

であるので、 $\mu(\{a\})$ があるとすれば

$$0 \leq \mu(\{a\}) \leq \mu\left(\left(a - \frac{1}{n}, a\right]\right) = a - \left(a - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

なので、 $n \rightarrow \infty$ として

$$\mu(\{a\}) = 0$$

でなければならない。このことから、 $a \leq b$ のとき

$$\mu((a, b)) = \mu([a, b]) = \mu([a, b)) = \mu((a, b]) = b - a$$

がわかる。 $\mathbb{R}$ の有限部分集合の長さはすべて 0 である。何故ならば

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

とすると

$$\mu(A) = \mu(\{a_1\}) + \mu(\{a_2\}) + \mu(\{a_3\}) + \cdots + \mu(\{a_n\})$$

で、右辺の各項はすべて 0 だから、左辺の値も 0 となる。さらに、 $\mathbb{R}$ の可算無限部分集合の長さも 0 である。何故ならば

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

とすると

$$\mu(A) = \mu(\{a_1\}) + \mu(\{a_2\}) + \mu(\{a_3\}) + \cdots$$

となるからである。従って、 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ にぎっしりと詰まっている (稠密であるという) が、 $\mathbb{Q}$ の長さは 0 である。勿論、 $\mathbb{R}$ の長さは ∞ である。点を可算個集めても長さは 0 である。点を非可算個集

めたらいつでも長さが0ではなくなるかということ、必ずしもそうではない。簡単な例としてカントール集合というものがある。興味のある人は図書館などで調べてもらいたい。

標本空間 $\mathbb{R}$ 上の事象系としては、長さが測れることのできる集合の全体を考えることにする。長さが測れるということの意味をここでは正確に定義しないが、このようにして出来る事象系 $\mathcal{F}$ は、この節の前半で考えたように、半开区間を全部集めたものから出発して、事象系の性質を用いて徐々に膨らましていってできるものと素朴に考えることにする。実際、この節の後半ではそのような集合に対して、次々に長さを与えていった。このような事象系は、 $\mathbb{R}$ の部分集合をすべて集めた $2^{\mathbb{R}}$ ではない。長さの測れない集合というものも存在する (ただし、このような例を作るには高度の数学の知識が必要である)。

4 確率

標本空間 Ω と、その上の事象系 $\mathcal{F}$ を考える。事象 $A \in \mathcal{F}$ に対して、その起こり易さというものを $P(A)$ で表す。全事象は確実に起こるので

$$P(\Omega) = 1$$

とする。それに対して、空事象は決して起こり得ないので

$$P(\emptyset) = 0$$

とする。その他の事象については

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

であるとする。もし、事象 A と事象 B の間に

$$A \subseteq B$$

という関係が成り立つとしよう。この場合、 A という事象が起これば B という事象が起こったことになる (A に属する結果は B に属する結果である) ので、 A の起こり易さは B の起こり易さ以下である。

$$P(A) \leq P(B)$$

とする。ここで、 A には属さないで B には属する結果をすべて集めたものを C としよう。

$$A \cup C = B \quad \text{かつ} \quad A \cap C = \emptyset$$

という関係が成立する。 $P(A)$ より $P(B)$ の値の方が大きいのは、 B が起きることが A が起きる可能性の他に C が起きる可能性が増えたためである。そこで

$$P(B) = P(A) + P(C)$$

が成立するとする。ここまでの説明は単なる言い訳に過ぎない (こうあって欲しいということ)。

確率というものを正確に定義しよう。標本空間 Ω とその上の事象系 $\mathcal{F}$ が与えられたとき、 P が確率であるとは次の条件を満たすことである:

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$;

$$\bullet A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \quad (\text{互いに排反}) \quad \Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

このとき、標本空間 Ω と事象系 $\mathcal{F}$ と確率 P の 3 つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間と呼ぶ。

この 3 つの条件だけから、前に述べた「こうあって欲しい」という条件は全て導かれる。

$$P(\emptyset) = 0$$

は次のようにして示される。3 つ目の条件において

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n = \dots = \emptyset$$

とする（互いに排反という条件は満たされている）。このとき

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

が成立しなければならないが、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

であるので

$$P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

である。 $0 \leq P(\emptyset) \leq 1$ の中でこのような条件を満たすのは

$$P(\emptyset) = 0$$

のときだけである。これが言えると、次のことも言える。

$$A, B \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{F}.$$

問 22 上の事実を証明せよ。（ヒント：3 つ目の条件において

$$A_1 = A, \quad A_2 = B, \quad A_3 = A_4 = \dots = \emptyset$$

とせよ。）

更に、この結果を用いると次が言える。

$$A, B \in \mathcal{F} \quad \wedge \quad A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B).$$

問 23 上の事実を証明せよ。（ヒント： A と $B \cap A^c$ を考えよ。）

問 24 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とし、 $\mathcal{F}$ は Ω のすべての部分集合（全部で 64 個ある）とする。

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

であるとする。残りの 58 個の事象 X に対して、 X の起こる確率 $P(X)$ を計算せよ。

問 25 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とし、 $\mathcal{F}$ は Ω のすべての部分集合（全部で 64 個ある）とする。

$$\begin{aligned} P(\{1\}) &= \frac{1}{2} \\ P(\{2\}) &= \frac{1}{4} \\ P(\{3\}) &= \frac{1}{8} \\ P(\{4\}) &= \frac{1}{16} \\ P(\{5\}) &= \frac{1}{32} \\ P(\{6\}) &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

であるとする。残りの 58 個の事象 X に対して、 X の起こる確率 $P(X)$ を計算せよ。

上の例からもわかるように、標本空間が有限集合（起こりうる結果が高々有限）の場合、即ち

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$$

と表せる場合、 n 個の実数 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ が

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

および

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

を満たすならば

$$\begin{aligned} P(\{\omega_1\}) &= p_1 \\ P(\{\omega_2\}) &= p_2 \\ P(\{\omega_3\}) &= p_3 \\ &\vdots \\ P(\{\omega_n\}) &= p_n \end{aligned}$$

として、更に

$$P(X) = \sum_{\omega_i \in X} p_i$$

とすることによって、確率 P を定義することができる。 $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$ を、確率ベクトルと呼ぶことがある。

問 26 $\Omega = \{\text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏}\}$ とし、確率ベクトル $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ を考える。このとき、全ての事象の確率を計算せよ。

標本空間 Ω 上の任意の事象 A と B を考える。 $A \cap B = \emptyset$ であるならば

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

であったが、 $A \cap B \neq \emptyset$ であった場合は

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

が成立する。これは $A \cap B^c, A \cap B, A^c \cap B$ が互いに排反事象であり、 $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = A \cup B$ であることなどを用いて

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &\leq P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= P((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) + P((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

により示される。一般に、標本空間 Ω 上の任意の事象 $A_1, A_2, A_3, \dots$ に対して、

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

が成立する。いま

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_n &= A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

とおくと、 $B_1, B_2, B_3, \dots$ は互いに排反事象となるので

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

が示される。

Ω の任意の事象 $A_1, A_2, A_3, \dots$ が

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

を満たすならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

が成立する。これは

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_n &= A_n \cap A_{n-1}^c \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

とおくと、事象 $B_1, B_2, B_3, \dots$ は互いに排反事象なので

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n B_k\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

が言える。

問 27 Ω の任意の事象 $A_1, A_2, A_3, \dots$ が

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

を満たすならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

が成立することを証明せよ。

問 28 Ω の任意の事象 A, B に対して

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が成立することを証明せよ。

第3節で、 $\mathbb{R}$ 上の部分集合 A に対して、その長さにあたる概念 $\mu(A)$ というものを考えた。 A が区間であれば、 $\mu(A)$ は本当の意味での長さである。今、 $\Omega = [0, 1)$ としよう。 $\mu(\Omega) = 1$ である。即ち、 Ω の長さは1である。 Ω の部分集合で、長さを測れるものの全体を $\mathcal{F}$ とする。このとき

$$P(A) = \mu(A) \quad (A \in \mathcal{F})$$

と定義すると、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間となる。

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ に対して

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

と表すことにする。特に

$$A^2 = A \times A$$

と表す。従って、 xy 座標平面上の点の全体は $\mathbb{R}^2$ で表される。 $\mathbb{R}^2$ の部分集合の面積というものを考えたい。 $A, B \subseteq \mathbb{R}$ が長さを測れる集合とするならば、 $A \times B$ の面積 $\nu(A \times B)$ は

$$\nu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

と定義することが自然であろう。しかし、例えば円のような図形は $A \times B$ の形で表現することができない。当然、円は面積を測ることができる。どのような図形が面積が測ることができるのかは、ここでは述べない。それには高度の数学が必要となるからである。ここでは、素朴に積分などによって面積が計算できるものとしておこう。

$$\Omega = [0, 1)^2$$

とすると、 Ω の面積は 1 である。 Ω の部分集合で面積が測れるものの全体を $\mathcal{F}$ とし、

$$P(A) = \nu(A) \quad (A \in \mathcal{F})$$

と定義すると、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ができる。

5 確率変数

確率現象を数理的に取り扱う場合、起こった結果を数値化して表すことが重要になる。 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。起こった結果 $\omega \in \Omega$ は、数値化されたデータ $X(\omega) \in \mathbb{R}$ として観測されると考える。 X は、 Ω 上で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる関数である。このことを

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

と表す。このとき、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、観測結果が a 以下であるという事象は、 Ω の部分集合

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq a\}$$

に対応する。これが事象でなければならないので、

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

でなければならない。このとき X は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数であるという。上のような事象を簡単に $\{X \leq a\}$ で表す。更に、 $P(\{X \leq a\})$ と書く代わりに、 $P(X \leq a)$ と書く。即ち

$$P(X \leq a) = P(\{\omega \mid X(\omega) \leq a\})$$

は、 X を観測して a 以下になる確率である。同様に、 $\{X < a\}, \{X \geq a\}, \{X > a\}, \{X = a\}$ などの事象も考えられる。

$$P(X < a) = P(\{\omega \mid X(\omega) < a\})$$

$$P(X \geq a) = P(\{\omega \mid X(\omega) \geq a\})$$

$$P(X > a) = P(\{\omega \mid X(\omega) > a\})$$

$$P(X = a) = P(\{\omega \mid X(\omega) = a\})$$

などとする。

問 29 サイコロを投げる実験を考える。標本空間は $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であり、事象系 $\mathcal{F}$ は Ω のすべての部分集合とする。確率 P は

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

を満たすものとする。 $\omega \in \Omega$ に対して、 $X(\omega)$ を ω を 3 で割った余りとする。即ち

$$X(1) = 1$$

$$X(2) = 2$$

$$X(3) = 0$$

$$X(4) = 1$$

$$X(5) = 2$$

$$X(6) = 0$$

とする。このとき、確率 $P(X \leq 1), P(X \leq 2), P(X \leq 3)$, を計算せよ。

100円玉を同時に2枚投げる実験を考える。実験を行う人間には2枚は区別がつかないが、厳密には2枚の区別がつく（別の人がコインの表面を電子顕微鏡などで調べれば、表面のキズの状態などで区別がつくと考えよう）。従って、標本空間は

$$\Omega = \{ \text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏} \}$$

と考えられる。事象系は2枚の区別がつかないので

$$\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{ \text{表表} \}, \{ \text{表裏}, \text{裏表} \}, \{ \text{裏裏} \}, \{ \text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表} \}, \{ \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏} \}, \{ \text{表表}, \text{裏裏} \}, \Omega \}$$

で与えられる。例えば

$$\{ \text{表表}, \text{表裏} \}$$

は、 $\mathcal{F}$ に属さない。この事象は、2枚のコインに区別がつくときに、1枚目のコインが表が出るという事象であるが、2枚のコインの区別がつかない実験者にとっては、この事象が起きたの起きないのか判断できない。関数 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$X(\text{表表}) = 0$$

$$X(\text{表裏}) = 0$$

$$X(\text{裏表}) = 1$$

$$X(\text{裏裏}) = 1$$

で定義しよう。このとき

$$\{\omega \mid X(\omega) \leq 0.5\} = \{ \text{表表}, \text{表裏} \}$$

であるので、 X を観測して値が0.5以下になるという事象は $\mathcal{F}$ に属さない。関数 $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$Y(\text{表表}) = 0$$

$$Y(\text{表裏}) = 0$$

$$Y(\text{裏表}) = 0$$

$$Y(\text{裏裏}) = 1$$

とするならば、 $a \geq 1$ のとき

$$\{\omega \mid Y(\omega) \leq 0.5\} = \Omega$$

であり、 $0 \leq a < 1$ のとき

$$\{\omega \mid Y(\omega) \leq 0.5\} = \{ \text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表} \}$$

であり、 $a < 0$ のときは

$$\{\omega \mid Y(\omega) \leq 0.5\} = \emptyset$$

となる。即ち、任意の実数 a に対して $Y \leq a$ は $\mathcal{F}$ に属する事象となる。

問 30 上の例で、関数 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$Z(\text{表表}) = 0$$

$$Z(\text{表裏}) = 1$$

$$Z(\text{裏表}) = 1$$

$$Z(\text{裏裏}) = 2$$

とする。任意の実数 a に対して $Z \leq a$ は $\mathcal{F}$ に属する事象となることを確かめよ。

標本空間 Ω の分割 $A_1, A_2, \dots, A_n$ があり、事象系 $\mathcal{F}$ に属する事象はすべて、 $A_1, A_2, \dots, A_n$ から 0 個以上取り出して和集合で表すことができる場合、 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の実数 a に対して事象 $\{X \leq a\}$ が $\mathcal{F}$ に属するための必要十分条件は、 X が各 A_i 上で一定の値をとることである。上の例では $\mathcal{F}$ に属する事象はすべて、 Ω の分割

$$\{\text{表表}\}, \{\text{表裏, 裏表}\}, \{\text{裏裏}\}$$

の幾つかの和集合で表されるので、

$$X(\text{表裏}) = X(\text{裏表})$$

が、任意の実数 a に対して事象 $\{X \leq a\}$ が $\mathcal{F}$ に属するための必要十分条件となる。

定理 4 次はすべて同値である。

- (1) 任意の実数 a に対して、 $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}$
- (2) 任意の実数 a に対して、 $\{X < a\} \in \mathcal{F}$
- (3) 任意の実数 a に対して、 $\{X \geq a\} \in \mathcal{F}$
- (4) 任意の実数 a に対して、 $\{X > a\} \in \mathcal{F}$

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) a を任意の実数とする。任意の自然数 n に対して $a - \frac{1}{n}$ も実数であるので、(1) の仮定より

$$\left\{X \leq a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$ は事象系であるので

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \leq a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}$$

であるが、ここで

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X \leq a - \frac{1}{n}\right\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\omega \mid X(\omega) \leq a - \frac{1}{n}\right\} \\ &= \left\{\omega \mid X(\omega) \leq a - \frac{1}{n} \text{ となる自然数 } n \text{ が存在する}\right\} \\ &= \{\omega \mid X(\omega) < a\} \\ &= \{X < a\} \end{aligned}$$

なので、(2) が示された。

(2) $\Rightarrow$ (3) a を任意の実数とする。(2) の仮定より

$$\{X < a\} \in \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$ は事象系であるので

$$\{X < a\}^c \in \mathcal{F}$$

であるが、ここで

$$\begin{aligned} \{X < a\}^c &= \{\omega \mid X(\omega) < a\}^c \\ &= \{\omega \mid X(\omega) < a \text{ ではない}\} \\ &= \{\omega \mid X(\omega) \geq a\} \\ &= \{X \geq a\} \end{aligned}$$

なので、(3) が示された。

(3) $\Rightarrow$ (4) a を任意の実数とする。任意の自然数 n に対して $a + \frac{1}{n}$ も実数であるので、(3) の仮定より

$$\left\{ X \geq a + \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$ は事象系であるので

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ X \geq a + \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}$$

であるが、ここで

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ X \geq a + \frac{1}{n} \right\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega \mid X(\omega) \geq a + \frac{1}{n} \right\} \\ &= \left\{ \omega \mid X(\omega) \geq a + \frac{1}{n} \text{ となる自然数 } n \text{ が存在する} \right\} \\ &= \{ \omega \mid X(\omega) > a \} \\ &= \{ X > a \} \end{aligned}$$

なので、(4) が示された。

(4) $\Rightarrow$ (1) a を任意の実数とする。(4) の仮定より

$$\{ X > a \} \in \mathcal{F}$$

$\mathcal{F}$ は事象系であるので

$$\{ X > a \}^c \in \mathcal{F}$$

であるが、ここで

$$\begin{aligned} \{ X > a \}^c &= \{ \omega \mid X(\omega) > a \}^c \\ &= \{ \omega \mid X(\omega) > a \text{ ではない} \} \\ &= \{ \omega \mid X(\omega) \leq a \} \\ &= \{ X \leq a \} \end{aligned}$$

なので、(1) が示された。

上の定理から、 X が確率変数であることの定義は (1)~(4) のどれを採用してもよい。 X が確率変数であるとき、任意の実数 a に対して

$$\{ X = a \} \in \mathcal{F}$$

と言える。これは $\{ X \leq a \} \in \mathcal{F}$ かつ $\{ X \geq a \} \in \mathcal{F}$ であるので $\mathcal{F}$ が事象系であることから

$$\{ X \leq a \} \cap \{ X \geq a \} \in \mathcal{F}$$

が言えて、ここで

$$\{ X \leq a \} \cap \{ X \geq a \} = \{ X = a \}$$

だからである。

$\mathcal{F}$ が有限個の事象から成る事象系である場合には（特に、 Ω が有限個の結果から成る集合の場合がそうである）、任意の実数 a に対して

$$\{ X = a \} \in \mathcal{F}$$

と言えることが、 X が確率変数であるための十分条件にもなる。

問 31 上のことを確かめなさい。ヒント： $\mathcal{F}$ が有限個の事象から成る事象系である場合には、標本空間 Ω の分割 $A_1, A_2, \dots, A_n$ があり、事象系 $\mathcal{F}$ に属する事象はすべて、 $A_1, A_2, \dots, A_n$ から 0 個以上取り出して和集合で表すことができる。 X が確率変数であるためには、 X は各 A_i 上で一定の値をとることを言えばよい。もしある A_i があり、その上の 2 点 ω_1 と ω_2 でそれぞれ異なる値 a_1 と a_2 をとるとする。即ち

$$X(\omega_1) = a_1$$

$$X(\omega_2) = a_2$$

とすると、 $\{X = a_1\} \cap \{X = a_2\} = \emptyset$ であり

$$\emptyset \neq A_i \cap \{X = a_1\} \in \mathcal{F}$$

$$\emptyset \neq A_i \cap \{X = a_2\} \in \mathcal{F}$$

であるが、これが矛盾であることを言えばよい。

X と Y を確率変数とすると、

$$Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

により、新たな確率変数 Z ができる。 Z を $X + Y$ で表すことにする。 $X - Y$ 、 $X \times Y$ 、 $X \div Y$ なども同様に定義される。更に、実数 a と確率変数 X に対して

$$Y = aX(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

により、定義される確率変数 Y を aX で表す。確率変数 X と実数 a の和 $X + a$ など同様に定義される。確率変数の四則演算は、実数の四則演算同様に、交換法則、結合法則、分配法則などが成立する。

6 分布関数、平均、分散

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と、その上の確率変数 X を考える。このとき

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

と定義して、 F を X の分布関数と呼ぶ。分布関数 F は、次の性質をもつ。

- F は単調増加関数である。
- F は右連続である。
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

F は単調増加関数であることは、 $a \leq b$ のとき

$$\{X \leq a\} \subseteq \{X \leq b\}$$

であるので、

$$F(a) = P(X \leq a) \leq P(X \leq b) = F(b)$$

により示される。 F が右連続であることは、

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \downarrow x \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるとする、

$$\{X \leq x_1\} \supseteq \{X \leq x_2\} \supseteq \cdots \supseteq \{X \leq x_n\}$$

であり

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \{X \leq x\}$$

が言えるので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}\right) \\ &= P(X \leq x) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

により示される。同様にして

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \downarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるとする、

$$\{X \leq x_1\} \supseteq \{X \leq x_2\} \supseteq \cdots \supseteq \{X \leq x_n\}$$

であり

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \emptyset$$

が言えるので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}\right) \\ &= P(\emptyset) \\ &= 0 \end{aligned}$$

また

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \uparrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるとする、

$$\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\} \subseteq \cdots \subseteq \{X \leq x_n\}$$

であり

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \Omega$$

が言えるので、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) \\ &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}\right) \\ &= P(\Omega) \\ &= 1\end{aligned}$$

が示される。

コイン投げの実験を考える。

$$\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\}$$

として、

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\text{表}\}, \{\text{裏}\}, \Omega\}$$

とする。 P を

$$P(\{\text{表}\}) = P(\{\text{裏}\}) = \frac{1}{2}$$

となるように定める。確率変数 X を

$$\begin{aligned}X(\text{表}) &= 1 \\ X(\text{裏}) &= 0\end{aligned}$$

とする。 $x < 0$ のとき

$$\{X \leq x\} = \emptyset$$

$0 \leq x < 1$ のとき

$$\{X \leq x\} = \{\text{裏}\}$$

$1 \geq x$ のとき

$$\{X \leq x\} = \Omega$$

であるから、分布関数は

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1; \\ 1 & 1 \leq x. \end{cases}$$

となる。

問 32 コインを 2 回投げる実験を考える。

$$\Omega = \{\text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏}\}$$

として、 $\mathcal{F}$ は Ω のすべての部分集合とする。確率 P は

$$P(\{\text{表表}\}) = P(\{\text{表裏}\}) = P(\{\text{裏表}\}) = P(\{\text{裏裏}\}) = \frac{1}{4}$$

となるように定め、確率変数 X を

$$X(\text{表表}) = 3$$

$$X(\text{表裏}) = 2$$

$$X(\text{裏表}) = 1$$

$$X(\text{裏裏}) = 0$$

とする。このとき、分布関数 F を求めよ。

問 33 区別のつかない 2 枚のコインを投げる実験を考える。

$$\Omega = \{ \text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏} \}$$

として、

$$\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{ \text{表表} \}, \{ \text{表裏}, \text{裏表} \}, \{ \text{裏裏} \}, \Omega \}$$

とする。確率 P は

$$P(\{ \text{表表} \}) = P(\{ \text{表裏} \}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\{ \text{表裏}, \text{裏表} \}) = \frac{1}{2}$$

となるように定め、確率変数 X を

$$X(\text{表表}) = 2$$

$$X(\text{表裏}) = 1$$

$$X(\text{裏表}) = 1$$

$$X(\text{裏裏}) = 0$$

とする。このとき、分布関数 F を求めよ。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 X が、高々有限個の異なる値 $x_1, x_2, \dots, x_n$ しかとらない場合、

$$A_k = \{X = x_k\} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

と定義すると、 $A_1, A_2, \dots, A_n$ は互いに排反であり

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$$

を満たす。このとき、

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(A_k)$$

と定義して、これを X の**平均**または**期待値**と呼ぶことにする。

サイコロを投げる実験を考える。 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であり $\mathcal{F}$ としては、 Ω のすべての部分集合を考える。確率 P は

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

となるように定める。確率変数 X は

$$X(k) = k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

により定義する。このとき、

$$A_k = \{X = k\} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

とすると、 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ は互いに排反で

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$$

を満たす。実際

$$A_k = \{k\} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

であり、

$$P(A_k) = \frac{1}{6} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

である。従って

$$\begin{aligned} E(X) &= X(1) \times \frac{1}{6} + X(2) \times \frac{1}{6} + X(3) \times \frac{1}{6} + X(4) \times \frac{1}{6} + X(5) \times \frac{1}{6} + X(6) \times \frac{1}{6} \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{21}{6} = 3.5 \end{aligned}$$

問 34 コインを投げる実験を考える。 $\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\}$ であり $\mathcal{F}$ としては、 Ω のすべての部分集合を考える。ただし、確率 P は

$$P(\{\text{表}\}) = P(\{\text{裏}\}) = \frac{1}{2}$$

により与える。また、確率変数 X は

$$X(\text{表}) = 1$$

$$X(\text{裏}) = -1$$

により定義する。このとき $E(X)$ を求めよ。

問 35 コインを 2 回投げる実験を考える。

$$\Omega = \{\text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏}\}$$

として、 $\mathcal{F}$ は Ω のすべての部分集合とする。確率 P は

$$P(\{\text{表表}\}) = P(\{\text{表裏}\}) = P(\{\text{裏表}\}) = P(\{\text{裏裏}\}) = \frac{1}{4}$$

となるように定め、確率変数 X を

$$X(\text{表表}) = 3$$

$$X(\text{表裏}) = 2$$

$$X(\text{裏表}) = 1$$

$$X(\text{裏裏}) = 0$$

とする。このとき、 $E(X)$ を求めよ。

問 36 区別のつかない 2 枚のコインを投げる実験を考える。

$$\Omega = \{ \text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏} \}$$

として、

$$\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{ \text{表表} \}, \{ \text{表裏}, \text{裏表} \}, \{ \text{裏裏} \}, \Omega \}$$

とする。確率 P は

$$P(\{ \text{表表} \}) = P(\{ \text{表裏} \}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\{ \text{表裏}, \text{裏表} \}) = \frac{1}{2}$$

となるように定め、確率変数 X を

$$X(\text{表表}) = 2$$

$$X(\text{表裏}) = 1$$

$$X(\text{裏表}) = 1$$

$$X(\text{裏裏}) = 0$$

とする。このとき、 $E(X)$ を求めよ。

高々有限個の異なる値しかとらない確率変数のことを、単純な確率変数と呼ぶ。標本空間が有限個の結果から成る集合であれば、確率変数はいつでも単純である。標本空間が無限個の結果から成る集合の場合は、確率変数はいつでも単純であるとは限らない。単純ではない確率変数 X の平均 $E(X)$ は以下のようにして定義される。まず、 X が負の値をとらない場合について考える。このときは、負の値をとらない単純な確率変数の列 $\{X_n\}$ が存在して、任意の $\omega \in \Omega$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

となるという事実がある。このとき

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n)$$

により定義する（この定義は確率変数の列 $\{X_n\}$ の選び方によらない）。ただし、 $E(X) = \infty$ となることもあり得る。次に、 X が正の値をとらない場合について考える。このときは、 $-X$ が負の値をとらないので

$$E(X) = -E(-X)$$

により定義する。ただし、 $E(X) = -\infty$ となることもあり得る。最後に、 X が正の値も負の値も取る場合について考える。この場合は、任意の $\omega \in \Omega$ に対して

$$X^+(\omega) = \max\{0, X(\omega)\}$$

$$X^-(\omega) = \min\{0, X(\omega)\}$$

と定義すれば、

$$X(\omega) = X^+(\omega) + X^-(\omega)$$

であり、 X^+ は負の値をとらず、 X^- は正の値をとらない確率変数となる。そこで

$$E(X) = E(X^+) + E(X^-)$$

と定義する。ただし、 $E(X^+) = \infty$ かつ $E(X^-) = -\infty$ となるときは、 $E(X)$ は定義しない。

X が確率変数であるとき、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、確率変数 aX を

$$(aX)(\omega) = a \cdot X(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

により、確率変数 $X + a$ を

$$(X + a)(\omega) = X(\omega) + a \quad (\omega \in \Omega)$$

により定義する。また、 X と Y が確率変数であるとき確率変数 $X + Y$ を

$$(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

と定義する。このとき

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

が満たされる。また、 X と Y が確率変数であるとき、任意の $\omega \in \Omega$ に対して

$$X(\omega) \leq Y(\omega)$$

が成立するとき、 $X \leq Y$ と書くことにすると

$$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

が言える。

$\psi(\omega)$ を、 $\omega \in \Omega$ に関するある命題とする。

$$A = \{\omega | \psi(\omega) \text{ が真} \}$$

として、 $A \in \mathcal{F}$ で

$$P(A) = 1$$

が言えるとき、 ψ は確率 1 で真である、または、 ψ はほとんど確実に真であるという。

コイン投げの実験を考える。

$$\Omega = \{\text{表}, \text{裏}, \text{立つ}\}$$

として、 $\mathcal{F}$ を Ω のすべての部分集合とする。 P を

$$P(\{\text{表}\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{\text{裏}\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{\text{立つ}\}) = 0$$

となるように定める。確率変数 X を

$$X(\text{表}) = 1$$

$$X(\text{裏}) = 0$$

$$X(\text{立つ}) = -1$$

とする。このとき、殆ど確実に $X \geq 0$ である。何故ならば

$$\begin{aligned}P(X \geq 0) &= P(\{\omega | X(\omega) \geq 0\}) \\&= P(\{\text{表}\} \cup \{\text{裏}\}) \\&= P(\{\text{表}\}) + P(\{\text{裏}\}) \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

だからである。

問 37 上のコイン投げの例で、確率変数 Y を

$$\begin{aligned}Y(\text{表}) &= 1 \\Y(\text{裏}) &= -1 \\Y(\text{立つ}) &= 0\end{aligned}$$

と定義する。このとき、殆ど確実に $|Y| = 1$ であることを示せ。

確率変数 X が、殆ど確実に $X = 0$ であるならば、 $E(X) = 0$ であることが言える。この逆は一般には言えないが、殆ど確実に $X \geq 0$ (または殆ど確実に $X \leq 0$) である確率変数 X に対して、

$$E(X) = 0$$

が言えるならば、殆ど確実に $X = 0$ であることが言える。

X が確率変数であるとき、 $X^2 - E(X)^2$ は確率変数となる。このとき

$$\text{var}(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

と定義して、これを X の**分散**と呼ぶ。 $\text{var}(X) \geq 0$ である。 $\sqrt{\text{var}(X)}$ を X の**標準偏差**と呼ぶ。

問 38

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

であることを証明せよ。

サイコロを投げる実験を考える。 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であり $\mathcal{F}$ としては、 Ω のすべての部分集合を考える。確率 P は

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

となるように定める。確率変数 X は

$$X(k) = k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

により定義する。このとき、 $E(X) = \frac{7}{2}$ であった。一方、

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} \\&= \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} \\&= \frac{91}{6}\end{aligned}$$

であるので、

$$\text{var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

となる。

問 39 コインを投げる実験を考える。 $\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\}$ であり $\mathcal{F}$ としては、 Ω のすべての部分集合を考える。ただし、確率 P は

$$P(\{\text{表}\}) = P(\{\text{裏}\}) = \frac{1}{2}$$

により与える。また、確率変数 X は

$$X(\text{表}) = 1$$

$$X(\text{裏}) = -1$$

により定義する。このとき $\text{var}(X)$ を求めよ。

X と Y が確率変数であるとき、次が成立する：

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

この不等式をシュワルツの不等式という。シュワルツの不等式を証明しよう。 $E(X^2) = 0$ の場合は、殆ど確実に $X^2 = 0$ であり、従って殆ど確実に $X = 0$ で、殆ど確実に $XY = 0$ が言えるので、 $E(XY) = 0$ となり、不等式は明らかである。従って、 $E(X^2) > 0$ と仮定してよい。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$E\left((tX - Y)^2\right) \geq 0$$

であることに注意する。

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\left((tX - Y)^2\right) \\ &= E\left((tX - Y)(tX - Y)\right) \\ &= E\left(t^2 X^2 - 2tXY + Y^2\right) \\ &= E\left(t^2 X^2\right) - E(2tXY) + E(Y^2) \\ &= t^2 E(X^2) - 2tE(XY) + E(Y^2) \end{aligned}$$

であり、 t に関する 2 次方程式の判別式は負でなければならない。即ち

$$\frac{D}{4} = E(XY)^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0$$

となり、シュワルツの不等式が証明される。

7 独立性、条件付確率、条件付期待値

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において、ある事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

を満たすとき、 A と B は独立であるという。

コインを2回投げる実験で

$$\Omega = \{ \text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏} \}$$

として、 $\mathcal{F}$ は Ω のすべての部分集合、確率 P は

$$P(\{\text{表表}\}) = P(\{\text{表裏}\}) = P(\{\text{裏表}\}) = P(\{\text{裏裏}\}) = \frac{1}{4}$$

となるように定める。このとき、1回目に表が出る事象 $\{\text{表表}, \text{表裏}\}$ と2回目に表が出る事象 $\{\text{表表}, \text{裏表}\}$ は独立である。何故ならば

$$\begin{aligned} P(\{\text{表表}, \text{表裏}\} \cap \{\text{表表}, \text{裏表}\}) &= P(\{\text{表表}\}) = \frac{1}{4} \\ P(\{\text{表表}, \text{表裏}\}) P(\{\text{表表}, \text{裏表}\}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

だからである。

問 40 上の例で、1回目に表が出る事象と2回目に表が出る事象、1回目に裏が出る事象と2回目に表が出る事象、1回目に裏が出る事象と2回目に裏が出る事象もそれぞれ独立であることを示せ。また、この例から、事象 A と B が独立であり、事象 B と C が独立であったとしても、 A と C は独立にはなるとは限らないことを示せ。

$\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ に対して、任意の $A \in \mathcal{G}$ と $B \in \mathcal{H}$ が独立であるとき、 $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ は独立であるという。上のコイン投げの例において

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \{ \{\text{表表}, \text{表裏}\}, \{\text{裏表}, \text{裏裏}\} \} \\ \mathcal{H} &= \{ \{\text{表表}, \text{裏表}\}, \{\text{表裏}, \text{裏裏}\} \} \end{aligned}$$

と定義すると、 $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ は独立である。

$\{A_1, A_2, \dots, A_m\}, \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \subseteq \mathcal{F}$ とし、 $A_1, A_2, \dots, A_m$ が互いに排反で

$$\bigcup_{i=1}^m A_i = \Omega$$

を満たし、 $B_1, B_2, \dots, B_m$ が互いに排反で

$$\bigcup_{j=1}^m B_j = \Omega$$

を満たすとする。

	第1列	第2列	...	第 n 列	第 $n+1$ 列
第1行	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_1 \cap B_2)$	...	$P(A_1 \cap B_n)$	$P(A_1)$
第2行	$P(A_2 \cap B_1)$	$P(A_2 \cap B_2)$	...	$P(A_2 \cap B_n)$	$P(A_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
第 m 行	$P(A_m \cap B_1)$	$P(A_m \cap B_2)$	...	$P(A_m \cap B_n)$	$P(A_m)$
第 $m+1$ 行	$P(B_1)$	$P(B_2)$	...	$P(B_n)$	1

のような表を作る。第1行第1列から第 m 行第 n 列までの $m \times n$ 個の数をすべて加えようとちょうど1となる。この部分は、互いに排反な事象 $A_i \cap B_j$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) の確率と

なっている。これを結合分布という。また、第 $n+1$ 列の第 1 行から第 m 行まで加えるとちょうど 1 となる。この部分は、互いに排反な事象 $A_1, A_2, \dots, A_m$ の確率となっている。第 $m+1$ 行の第 1 列から第 m 列まで加えるとちょうど 1 となる。この部分は、互いに排反な事象 $B_1, B_2, \dots, B_m$ の確率となっている。これらの 2 つの部分はそれぞれ周辺分布と呼ばれる。

もし、事象 $A_1, A_2, \dots, A_m$ のうちの A_i が起こったということがわかったとしよう。このとき、事象 $A_i \cap B_1, A_i \cap B_2, \dots, A_i \cap B_m$ のいずれかが起こる。その確率は、

$$P(A_i \cap B_1), P(A_i \cap B_2), \dots, P(A_i \cap B_m)$$

であるので、全部の和が 1 になるように正規化して、

$$\frac{P(A_i \cap B_1)}{P(A_i)}, \frac{P(A_i \cap B_2)}{P(A_i)}, \dots, \frac{P(A_i \cap B_m)}{P(A_i)}$$

が、 A_i が起こったということがわかったときの事象 $B_1, B_2, \dots, B_m$ が起きる条件付き確率ということにする。

$$P(B_j|A_i) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)}$$

と表すことにする。即ち、 $P(B_j|A_i)$ は、 A_i が起こったということがわかったときの事象 B_j が起きる条件付き確率である。同様に、

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

B_j が起こったということがわかったときの事象 A_i が起きる条件付き確率である。

もし、 A_i と B_j が独立ならば

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) P(B_j)$$

であるので、

$$P(B_j|A_i) = P(B_j)$$

である。 A_i が起きたのか起こらなかったのか知っても知らなくても B_j が起きる確率は変わらない。同様に

$$P(A_i|B_j) = P(A_i)$$

であるので、 B_j が起きたのか起こらなかったのか知っても知らなくても A_i が起きる確率は変わらない。

例えば、コインを 2 回投げる実験を考える。

$$\Omega = \{ \text{表表}, \text{表裏}, \text{裏表}, \text{裏裏} \}$$

として、 $\mathcal{F}$ は Ω のすべての部分集合とする。確率 P は

$$P(\{ \text{表表} \}) = P(\{ \text{表裏} \}) = P(\{ \text{裏表} \}) = P(\{ \text{裏裏} \}) = \frac{1}{4}$$

となるように定める。

$$A_1 = \{ \text{表表}, \text{表裏} \}$$

$$A_2 = \{ \text{裏表}, \text{裏裏} \}$$

$$B_1 = \{ \text{表表}, \text{裏表} \}$$

$$B_2 = \{ \text{表裏}, \text{裏裏} \}$$

とすると、 A_1 は1回目に表が出るという事象で、 A_2 は1回目に裏がでるという事象である。また、 B_1 は2回目に表が出るという事象で、 B_2 は2回目に裏がでるという事象である。このとき、結合分布と周辺分布は以下ようになる。

	B_1	B_2	
A_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
A_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

この場合、条件付き確率は

$$P(B_1|A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B_1|A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B_2|A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2|B_1) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1|B_2) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2|B_2) = \frac{P(A_2 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

であり、1枚目が何であるかを知ってたととしても、2枚目が何であるかの確率は変わらず、同様に、2枚目が何であるかを知ってたととしても、1枚目が何であったのかの確率は変わらない。

確率が

$$P(\{\text{表表}\}) = \frac{1}{9}$$

$$P(\{\text{表裏}\}) = \frac{2}{9}$$

$$P(\{\text{裏表}\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{\text{裏裏}\}) = \frac{1}{6}$$

で与えられるならば、結合分布と周辺分布は

	B_1	B_2	
A_1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
A_2	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{18}$	1

となり、条件付き確率は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 P(B_1|A_1) &= \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \\
 P(B_2|A_1) &= \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \\
 P(B_1|A_2) &= \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \\
 P(B_2|A_2) &= \frac{P(A_2 \cap B_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \\
 P(A_1|B_1) &= \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{11}{18}} = \frac{2}{11} \\
 P(A_2|B_1) &= \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{11}{18}} = \frac{9}{11} \\
 P(A_1|B_2) &= \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7} \\
 P(A_2|B_2) &= \frac{P(A_2 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

即ち、1枚目が何であるかを知ることによって、2枚目が何であるかの確率は変わり、同様に、2枚目が何であるかを知ることによって、1枚目が何であったのかの確率も変わる。

問 41 サイコロを投げる実験を考える。 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であり $\mathcal{F}$ としては、 Ω のすべての部分集合を考える。確率 P は

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

となるように定める。

$$A_1 = \{1, 3, 5\}$$

$$A_2 = \{2, 4, 6\}$$

$$B_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$B_2 = \{4, 5, 6\}$$

として、結合分布と周辺分布の表を作り、条件付き確率を

$$P(B_1|A_1), P(B_2|A_1), P(B_1|A_2), P(B_2|A_2)$$

および

$$P(A_1|B_1), P(A_2|B_1), P(A_1|B_2), P(A_2|B_2)$$

を求めよ。

問 42 サイコロを2回投げる実験を考える。1回目に i が出て2回目に j が出るとい結果を (i, j) で表現する。標本空間は

$$\Omega = \{(i, j) | i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

であり、事象系 $\mathcal{F}$ は、 Ω のすべての部分集合を考える。また、確率は

$$P(\{\langle i, j \rangle\}) = \frac{1}{36} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

を満たすものとする。 A_i により、2つのサイコロの少なくとも一方の目が i である事象を表す。また、 B_j により、2つのサイコロの出た目の和が j である事象を表す。このときの条件付き確率をすべて求めよ。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して、 $P(A) \neq 0$ である事象 $A \in \mathcal{F}$ と、任意の確率変数 X を考える。このとき

$$\mathcal{F}_A = \{A \cap B | B \in \mathcal{F}\}$$

と定義すると、 $\mathcal{F}_A$ は A 上の事象系となる。また

$$P_A(B) = P(B|A)$$

と定義すると、 P_A は確率となる。即ち、確率空間 $(A, \mathcal{F}_A, P_A)$ ができる。

$$X_A(\omega) = X(\omega) \quad (\omega \in \Gamma)$$

によって定義される X_A は、確率変数となる。

問 43 $(A, \mathcal{F}_A, P_A)$ が確率空間であり、 X_A が確率変数であることを証明せよ。

X_A の期待値を、 $E(X|A)$ で表し、条件 A の下での X の条件付き期待値という。

サイコロを2回投げる実験を考える。1回目に i が出て2回目に j が出るとい結果を $\langle i, j \rangle$ で表現する。標本空間は

$$\Omega = \{\langle i, j \rangle | i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

であり、事象系 $\mathcal{F}$ は、 Ω のすべての部分集合を考える。また、確率は

$$P(\{\langle i, j \rangle\}) = \frac{1}{36} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

を満たすものとする。ここで、事象 A として、1回目と2回目に出た目の数の和が6であるという事象を考える。即ち

$$A = \{\langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}$$

確率変数 X は、1回目に出た目の数とする。即ち

$$X(\langle i, j \rangle) = i \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

とする。このとき、 $\mathcal{F}_A$ は A のすべての部分集合である。また、

$$\begin{aligned} P_A(\{\langle 1, 5 \rangle\}) &= \frac{1}{5} \\ P_A(\{\langle 2, 4 \rangle\}) &= \frac{1}{5} \\ P_A(\{\langle 3, 3 \rangle\}) &= \frac{1}{5} \\ P_A(\{\langle 4, 2 \rangle\}) &= \frac{1}{5} \\ P_A(\{\langle 5, 1 \rangle\}) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

であり

$$X_A(\langle 1, 5 \rangle) = 1$$

$$X_A(\langle 2, 4 \rangle) = 2$$

$$X_A(\langle 3, 3 \rangle) = 3$$

$$X_A(\langle 4, 2 \rangle) = 4$$

$$X_A(\langle 5, 1 \rangle) = 5$$

である。従って、

$$E(X|A) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} = 3$$

となる。

問 44 上の例で、 A として 1 回目と 2 回目に出た目の数の和が 5 であるという事象を考えたらどうなるか。