線形システム I

塚田　真

平成 13 年度

1　序論

この講義の題名にある「線形」という概念を理解することは容易なことではない。しかし、世の中には「線形」という概念によって説明できる現象が沢山ある。また、「線形」の反対語である「非線形」であるような現象も沢山ある。「非線形」を理解するにも、「線形」を理解しなければならない。

線形性を持つ現象は、比較的解析しやすい。解析とは、数学の式で、或いは定理の形で現象を説明することである。それに対して、非線形性を持つ現象は解析が厄介で、相転移とかカタストロフィとかカオスなどと呼ばれる現象に遭遇することがある。多くの場合、計算機シミュレーションに頼らなければならない。線形現象も規模が大きくなれば、計算機シミュレーションに厄介になることになるが、予め数理的に解析しておけば、シミュレーションもし易くなる。

大学一年の教養数学で「微積分学」と「線形代数学」を学んできたはずである。そこでは、動機付け無しに基本的な計算や定理を学んだ。極めて形式的な計算は、約束事だと思って学ぶことも時には重要であるが、後で立ち止まってじっくりその意味を考え直すという作業を行わない限り、本当には身に付かない。

この講義では、その予備知識をある程度仮定して、場合によっては改めて説明し直すことにより、「線形」という概念に馴染むように心がける。そして、「線形代数学」だけでなく「微積分学」の知識も必要になってくる。また、例などにおいては「確率論」の話も登場することもある。

線形システムで学ばなければならないことは非常に多い。そのすべてをこの半期の「線形システム I」で取り上げることは不可能である。また、引き続く「線形システム II」まで含めても限度がある。「線形システム I」では主に、行列を用いて記述できる現象を、行列を基本的な性質を利用して解析することに主眼を置く。時間などのパラメタを持つシステムでは、時間発展が差分方程式 (漸化式) とか微分方程式などで記述されることが多い。その中でも「線形」な差分方程式とか微分方程式は非常に綺麗に理論付けられている。そこでは、一年次の「線形代数学」ではやりきれなかった (やったとしてもあまり時間がかけられなかった) 固有値と固有ベクトルの話が重要になってくる。固有値と固有ベクトルは、今後「線形システム」の授業以外でも様々な講義で登場するであろうし、また卒業研究などでもお世話になることが多いと思う。この講義で、その意味と重要性を理解してもらいたい。

2　線形とは何か

ベクトルとベクトルは足し算することができる。ベクトルとベクトルの足し算のことを、ベクトル和という。また、ベクトルは拡大したり縮小したり、スケールを変えることができる。それは、ベクトルに数 (拡大または縮小率) を掛けると考える。ベクトルにスケールを掛けることを、スカラー倍するという言い方をする。負のスカラー倍を行うと、スケールが変わるだけでなく、方向が反対になる。スケールとして 0 を掛けると、どんなベクトルも長さも方向も持たない点になってしまう。いずれ、複素数のスケールも考えなければならないときがくるが、しばらくの間スカラーは実数に限るものとする。

ベクトル (x_1, x_2) と (y_1, y_2) のベクトル和を (z_1, z_2) とすると

$$(z_1, z_2) = (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2)$$

である。(x_1, x_2) にスカラー a を掛けたものを (y_1, y_2) とすれば

$$(y_1, y_2) = (ax_1, ax_2)$$

である。

ベクトル $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ のベクトル和を $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ とすると

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

である。$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ にスカラー a を掛けたものを $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ とすれば

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$$

である。

上の例は、$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は有限数列 $\{x_i\}_{i=1}^n$ と考え方を変えることもできる。有限数列 $\{x_i\}_{i=1}^n$ と $\{y_i\}_{i=1}^n$ のベクトル和にあたる有限数列 $\{z_i\}_{i=1}^n$ は

$$z_i = x_i + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

で定義されると考える。また、有限数列 $\{x_i\}_{i=1}^n$ スカラー a を掛けた有限数列を $\{y_i\}_{i=1}^n$ は

$$y_i = ax_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

で定義されると考える。

この考え方、無限数列に自然に拡張できる。無限数列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ と $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ のベクトル和にあたる無限数列 $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ は

$$z_i = x_i + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty)$$

で定義されると考える。。また、無限数列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ スカラー a を掛けた無限数列を $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ は

$$y_i = ax_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty)$$

で定義されると考える。

収束する無限数列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ と $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ および、任意のスカラー a, b に対して

$$\lim_{i\to\infty}(ax_i + by_i) = a\lim_{i\to\infty} x_i + b\lim_{i\to\infty} y_i$$

が成立する。

無限数列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ を、$\mathbb{N}$ 上で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる関数と考え直すこともできる。即ち

$$f(i) \stackrel{\text{def}}{=} x_i \qquad (i \in \mathbb{N})$$

で定義される関数と考える。逆に、$\mathbb{N}$ 上で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる関数 f は

$$x_i \stackrel{\text{def}}{=} f(i) \qquad (i \in \mathbb{N})$$

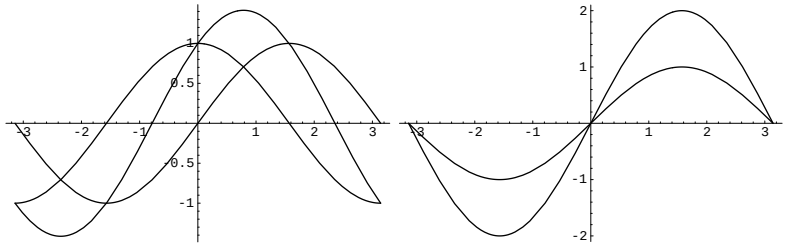
と定義することによって、無限数列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ に戻すことが可能である。なにも定義域は $\mathbb{N}$ である必要はなく、集合 X 上で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる関数 f と g に対して、ベクトル和にあたるものは

$$(f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \qquad (x \in X)$$

で定義する。また、$\mathbb{N}$ 上で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる関数 f にスカラー a を掛けることは

$$(af)(x) \stackrel{\text{def}}{=} af(x) \qquad (x \in X)$$

と定義する。ベクトル和 $f+g$ も、スカラー倍 af も、集合 X 上で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる関数である。



$X = \mathbb{R}$ のとき、f と g がいずれも連続関数ならば、任意のスカラー a, b に対して $af + bg$ は連続関数である。更に、f と g がいずれも微分可能関数ならば、$af + bg$ も微分関数でありこのとき、

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

が成立する。X が数直線上の閉区間 $[c, d]$ であるとき、f と g がこの区間で定積分可能ならば、任意のスカラー a, b に対して $af + bg$ もこの区間で定積分可能であり、このとき

$$\int_c^d (af + bg)(x)dx = a\int_c^d f(x)dx + b\int_c^d g(x)dx$$

を満たす。

確率変数 X, Y と、実数 a, b に対して、$aX + bY$ は確率変数である。このとき、X, Y の期待値 (平均) が存在するならば、

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

が成立する。

連立方程式

$$\begin{cases} cx + dy = e, \\ fx + gy = h \end{cases}$$

を考えてみよう。この連立方程式は、解が存在しないいわゆる「不能」という場合と、解がたくさんある「不定」という場合と、解がただ一つだけ存在する場合とがある。「不定」の場合、解は何でも良いわけではない。上の連立方程式の変わりに

$$\begin{cases} cx + dy = 0, \\ fx + gy = 0 \end{cases}$$

という方程式を考えてみる。この連立方程式は「不能」になることは決してない。何故ならば、すくなくとも

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

という解が一つ存在するからである。「不定」になることはある。今

$$\begin{cases} x = x_1, \\ y = y_1 \end{cases}$$

という解と、

$$\begin{cases} x = x_2, \\ y = y_2 \end{cases}$$

という解があったとする。このとき、任意の実数 a, b に対して

$$\begin{cases} x = ax_1 + bx_2, \\ y = ax_2 + by_2 \end{cases}$$

も必ず解となる。そして、元々の連立方程式

$$\begin{cases} cx + dy = e, \\ fx + gy = h \end{cases}$$

の解を

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 \end{cases}$$

とすれば

$$\begin{cases} x = x_0 + ax_1 + bx_2, \\ y = y_0 + ax_2 + by_2 \end{cases}$$

も必ず、元の連立方程式の解となる。

このように、世の中には 2 つの「もの」x, y と、実数 a, b に対して

$$ax + by$$

という「もの」を考えることができる場合が沢山ある。また、「もの」x によって決まる量（それが同じ世界の「もの」であることもあるし、べつの世界の「もの」であることもある）$f(x)$ が一意に決まり、

$$f(ax + by) = af(x) + b(y)$$

を満たすことがよくある。

このような状況を見せる世界には、何か共通する性質があるはずである。その共通する性質を取り出して、理論を作り上げれば、個々の世界での性質はその特別の場合となり、個々の世界で別々に理論を作る必要はなくなる。何か共通する性質が、線形性と呼ばれるものである。

データ構造とアルゴリズムでは、線形探索とか線形リストといった概念が登場する。数学でも、全順序関係のことを線形順序と呼ぶことがある。これらの場合の「線形」は、上で述べた線形性とは異なる。

3　システムとは何か

システム (system) とは、日本語では「系」と訳されるのが普通である。まず、system の意味を辞書で調べてみよう。Longman Dictionary of Contemporary English によれば

a group of related parts which work together forming a whole

an orderd set of ideas, methods, or ways of working

the use of oderly methods

the body, thought of as a set of working parts

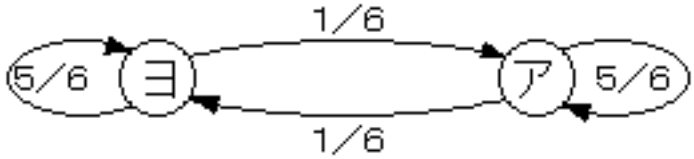
the workings of a computer or set of computers

といなどの意味が載っている。

共通して言えることは、システムは部分 (パーツ) から成り立っていて、それぞれの部分が何らかの関係で結びついて全体のシステムの性格を決めるというところにある。前節の最後に上げた連立方程式はまさにシステムの一例である。部分は、一つ一つの方程式である。それぞれの方程式は、一般に異なる解を持つ。それぞれに部分の共通する解として、互いに結びついて全体の連立方程式の性格（解）を決めることになっている。

システムにはもう一つの重要な意味がある。上の辞書の意味にも現れる 'oder' という単語がそれを表している。'oder' 日本語では通常「順序」と訳されるが、システムを構成する部分が時間的順序 (必ずしも時間とは限らないが) に結びついていて、ある部分が次の部分を決定付けることが多い (因果関係)。例えば、運転免許証を取る場合のシステムなどを考えてみると良い。

次に挙げるような思考実験は、システムの一例である。A君はいま旅行に、ヨーロッパに行くかアメリカに行くか迷っている。ヨーロッパに行きたい気持ちが多少強い。でもアメリカも捨てがたい。そこで、サイコロを振って決めることにした。しかし、サイコロを一回振って決めてしまうことにも不安がある。それならば、サイコロを何度も振って決めれば諦めがつくと考えた。A君が考えた旅行にどちらに行くかどうかを決めるシステムは次のようなものである。まず、一旦ヨーロッパに行こうと決める。そして、サイコロを振る。1以外の目が出たならば、決定を変えない。1の目が出たならば、決定を変更する。これを何回も繰り返す。



A君は心配性なので、何度も何度サイコロを降り続けた。例えば 100 回振り終わったときは、ヨーロッパに決まる可能性が $p_{100} \times 100$ パーセント、アメリカに決まる可能性が $q_{100} \times 100$ パーセントで現れるはずである。ここで p_n および q_n はそれぞれ n 回サイコロを振ったとき、ヨーロッパに決定する確率とアメリカに決定する確率で。$p_0 = 1, q_0 = 0$ である。また、p_n, q_n と p_{n+1}, q_{n+1} の間には次の関係がある。

$$
\begin{aligned}
p_{n+1} &= p_n \times \frac{5}{6} + q_n \times \frac{1}{6}, \\
q_{n+1} &= p_n \times \frac{1}{6} + q_n \times \frac{5}{6}.
\end{aligned}
$$

$q_n = 1 - p_n$ であるから、上の漸化式で p_n だけの漸化式にして解くこともできるが、次のように

考えてみよう。上の漸化式は、行列とベクトルを用いて

$$\begin{bmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}$$

と表現できる。従って

$$\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であることがすぐわかる。

一般に、行列のベキ乗は

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

および

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n$$

によって定義される。対角行列の場合は、話が簡単である。

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{bmatrix}$$

であることがすぐわかる。残念ながら、我々がそのベキ乗を計算したい行列は対角行列ではない。ここから先の話は、天下り的である。後で本論に入ってから、その計算方法を具体的に学ぶことになる。まず

$$\begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

であることから

$$\begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{6^n} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^n$$

であるので、

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^n$$

が計算できればよい。次の関係式を見つけるのは大変であるが、少なくとも成立することは容易に確かめられる。

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

式が見づらいので

$$
\begin{aligned}
A &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \\
B &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \\
U &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \\
V &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

とおくことにしよう。U と V の間には、もう一つ顕著な関係式

$$UV = VU = I$$

が成り立つ (I は単位行列)。計算したいのは A^n であるが

$$A^n = AA \cdots A = VBUVBU \cdots VBU = VBB \cdots BU = VB^nU$$

の関係に注意すると

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

が得られるので

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}^n &= \frac{1}{6^n} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^n \\
&= \frac{1}{6^n}\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6^n/6^n & 0 \\ 0 & 4^n/6^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2/3)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$n \to \infty$ とすれば、

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を得るので、

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}^n = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

が得られる。即ち、A君は無限にサイコロを降り続ければ、結局同じ確からしさでヨーロッパ行きとアメリカ行きを選択することになる。

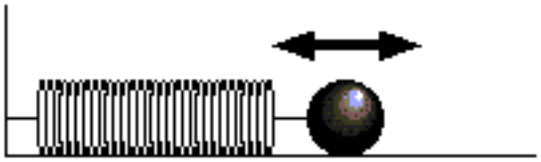
このようにして、A君が考えたシステムの数理的な解析ができた。システムの解析方法にもう一つ、シミュレーションによるものがある。次の擬似 C 言語のプログラムは、A君が考えたシステムのシミュレーションを行うプログラムである。

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define ShikouKaisuu 100
#define RansuuNoTane 123

void main(){
  int x=1;
  void shikou(int*,int);

  srand(RansuuNoTane);
  shikou(&x,ShikouKaisuu);
  if(x==1){
    printf("Europe\n");
  }else{
    printf("United States\n");
  }
}

void shikou(int *x, int n){
  int i;

  for(i=0;i<n;i++){
    if((double)rand()/MaxInt<1/6.0){
      *x=1-*x;
    }
  }
  return;
}
```

ここで行ったシミュレーションは、マルコフ連鎖と呼ばれている確率過程の例の一つである。マルコフ連鎖とは、時間が離散的で、とる値も離散的な確率過程である。今の例では、時間がサイコロを投げる回数で、とる値が 1(ヨーロッパ) と 0(アメリカ) である。時間も、とる値も連続的な確率過程として最も代表的なものは、ブラウン運動である。これについては、「確率過程論」の授業で学ぶことになるであろう。

4　力学系 (Dynamical System)

因果関係が顕著な例として、物理の力学がある。



一次元のバネの運動を考える。時刻 t における錘の位置を $x(t)$ で表す。ここで、釣り合いの位置 (バネに力がかからない状態の位置) を原点とする一次元座標系を考えている。時刻 t における錘の速度を $v(t)$ とすると

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

の関係にある。更に、時刻 t における錘の加速度を $\alpha(t)$ とすると

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt}v(t)$$

の関係にある。バネ係数を k として

$$\text{錘にかかる力} = -kx(t)$$

と表現できる。ニュートン力学によれば

$$\text{力} = \text{質量} \times \text{加速度}$$

であるので、錘の質量を m とすれば

$$m\alpha(t) = -kx(t)$$

が運動方程式となる。α は v の微分なので

$$m\frac{d}{dt}v(t) = -kx(t)$$

と書き換えてよい。さらに、v は x の微分あるので

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -kx(t)$$

という 2 階の微分方程式を得る。錘は、この微分方程式を満たす $x(t)$ の運動を行う。

2 階の微分方程式を考える代わりに、それと同値な

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = v(t), \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = -\dfrac{k}{m}x(t) \end{cases}$$

1 階の連立微分方程式を考えよう。この連立微分方程式は、ベクトルと行列によって次のように表現することもできる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix}$$

とおいた。

微分の定義を思い出してみよう。

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

であるので、h が非常に小さなとき

$$\frac{d}{dt}x(t) \fallingdotseq \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

である。x の微分は v であったから

$$v(t) \fallingdotseq \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

となり、従って

$$x(t+h) \fallingdotseq x(t) + v(t)h$$

が得られる。同様に

$$\frac{d}{dt}v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

であるので、h が非常に小さなとき

$$\frac{d}{dt}v(t) \fallingdotseq \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

である。v の微分は $(-k/m)x$ であったから

$$-\frac{k}{m}x(t) \fallingdotseq \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

となり、従って

$$v(t+h) \fallingdotseq v(t) - \frac{k}{m}x(t)h$$

が得られる。ベクトルと行列で一纏めにして

$$\begin{bmatrix} x(t+h) \\ v(t+h) \end{bmatrix} \fallingdotseq \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + hA \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = (I + hA) \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

と表現することができる。このことから、t を任意に固定して十分大きな n をとれば

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \fallingdotseq \left(I + \frac{t}{n}A\right)^n \begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

が言える。指数関数 e^{at} は

$$e^{at} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{at}{n}\right)^n$$

によって定義され、

$$e^{at} = 1 + \frac{a}{1!}t + \frac{a^2}{2!}t^2 + \frac{a^3}{3!}t^3 +$$

を満たすことを思い出そう。また、微分公式

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

が成立する。このことから類推して (かなり乱暴な話であるが)、

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

と考えられそうである。ただし、

$$e^{tA} = 1 + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 +$$

である (右辺の行列の級数の収束問題はいずれ議論することになる)。話を簡単にするために

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする ($k = m = 1$ で考える)。このとき、

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A^3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

に注意すれば、

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots = \cos t \\ a_{12} &= \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \cdots = \sin t \\ a_{21} &= -\frac{t}{1!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} \cdots = -\sin t \\ a_{22} &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} \cdots = \cos t \end{aligned}$$

が得られる。以上により、与えられた連立微分方程式は

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)\sin t + v(0)\cos t \\ v(t) &= -x(0)\cos t + v(0)\sin t \end{aligned}$$

と解けた (実際に解であるか検証せよ)。

この問題の計算機シミュレーションを行ってみよう。基本となるのは、

$$\begin{cases} x(t+h) \fallingdotseq x(t) + v(t)h, \\ v(t+h) \fallingdotseq v(t) - \dfrac{k}{m}x(t)h \end{cases}$$

の式である。この式は、ある時間の状態から、微小時間経過したときの状態変化を記述した式と考えることができる。

```
#include <stdio.h>
#define M 1.0            /* 質量 */
#define K 1.0            /* バネ係数 */
#define X0 1.0           /* 初期状態の位置 */
#define Y0 1.0           /* 初期状態の速度 */
#define H 0.001          /* 微小時間 */
#define MaxTimes 1000    /* 移動回数 */

void main(){
  int times;
  double xnow=X0, vnow=V0, xnext, ynext;
  void draw(double);

  for(times=0;times<MaxTimes;times++){
    draw(xnow);
    xnext=xnow+vnow*H;
    vnext=vnow-(K/M)*xnow*H;
    xnow=xnext;
    vnow=vnext;
  }
}

void draw(double x){
  x の位置に錘を移動;
}
```

実は、このシミュレーションは振幅が徐々に大きくなる。原因は、微小時間 h 後の状態を表す近似式が良くないからである。近似式に h の 2 次の項まで加えると、かなりうまくいく。この微分方程式の数値的解法は、オイラー法と呼ばれているものである。オイラー法より近似が良い、ルッンゲ・クッタ法なども知られている。これらのことについては、「計算機シミュレーション」または「数値計算法」の授業でいずれ学ぶことになるであろう。

5　抽象線形空間

前節までで、線形システムの重要性が少しは理解できたであろう。まだまだ重要な例が沢山あるが、それを説明する前に、線形空間と行列のことをきちんと学んでおく必要がある。実はその多くが１学年の線形代数で学んだことではあるが、ここでは同じ話を抽象線形空間として説明する。

$\mathbb{K}$ を、$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のいずれかであるとする。$\mathbb{K}$ のことを、係数体と呼ぶ。係数体の要素のことをスカラーと呼ぶ。

V が $\mathbb{K}$ 上の線形空間であるとは、次の条件をすべて満たすときを言う。

(1)　V は空ではない集合である。

(2)　写像 $\varphi : V \times V \to V$ および $\psi : \mathbb{K} \times V \to V$ が定められている。

$$\begin{aligned} x + y &\overset{\text{def}}{=} \varphi(x, y) \qquad (x, y \in V), \\ ax &\overset{\text{def}}{=} \psi(a, x) \qquad (a \in \mathbb{K}, x \in V) \end{aligned}$$

と表現する。

(3)　任意の $x, y \in V$ に対して、交換法則

$$x + y = y + x$$

が成立する。

(4)　任意の $x, y, z \in V$ に対して、結合法則

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

が成立する。$(x + y) + z$ と $x + (y + z)$ が同じものなので、これを $x + y + z$ と表現してよい。

(5)　V に、ある要素 x_0 が存在して、任意の $x \in V$ に対して

$$x_0 + x = x + x_0 = x$$

が成立する。このような性質を満たす要素 x_0 は唯一つしかない。何故ならば、もし別に x_1 という要素が V の中に存在して、任意の $x \in V$ に対して

$$x_1 + x = x + x_1 = x$$

が成立したとしよう。このとき

$$x_0 = x_0 + x_1 = x_1$$

が成立しなければならないので、x_0 と x_1 は同じものである。x_0 を 0 で表し、V の零ベクトルとか零元であるという。

(6)　任意の $x \in V$ に対して、

$$x + x' = x' + x = 0$$

を満たす $x' \in V$ が必ず存在する。このような性質を満たす要素 x' は唯一つしかない。何故ならば、もし別に x'' という要素が V の中に存在して、

$$x + x'' = x'' + x = 0$$

が成立したとしよう。このとき

$$x'' = x'' + 0 = x'' + (x + x') = (x'' + x) + x' = 0 + x' = x'$$

が成立しなければならないので、x' と x'' は同じものである。x' を $-x$ で表し、x の逆ベクトルとか逆元であるという。0 の逆元は 0 自身である。

(7)　任意の $x, y \in V$ および $a \in \mathbb{R}$ に対して、分配法則

$$a(x + y) = ax + ay$$

が成立する。

(8)　任意の $x \in V$ および $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、分配法則

$$(a + b)x = ax + bx$$

が成立する。

(9)　任意の $x \in V$ および $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、結合法則

$$(ab)x = a(bx)$$

が成立する。$(ab)x$ と $a(bx)$ が同じものなので、これを abx と表現してよい。

(10)　任意の $x \in V$ に対して

$$1x = x$$

が成立する。

これですべてである。以上のことから、任意の $x \in V$ に対して

$$0x = 0,\ (-1)x = -x$$

でなければならない。ここで左辺の 0 はスカラー、右辺の 0 はベクトルであることに注意する。同様に、左辺の $-$ 記号がスカラーのマイナス記号であり、右辺の $-$ は逆ベクトルを表す記号であることに注意する。

この 2 つを証明しておこう。まず、$0x = 0$ を示す。これは

$$x + 0x = 1x + 0x = (1 + 0)x = 1x = x$$

に注意して、両辺に左から x の逆ベクトル $-x$ を加えることによって得られる。次に、$(-1)x = -x$ を示す。これは

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = 0$$

と、

$$(-1)x + x = (-1)x + 1x = ((-1) + 1)x = 0x = 0$$

から、$(-1)x$ が x の逆ベクトルであることが示される (逆ベクトルの一意性)。

V が $\mathbb{R}$ 上の線形空間であるとき、V は実線形空間であるという。また、V が $\mathbb{C}$ 上の線形空間であるとき、V は複素線形空間であるという。

(例 1)　$\mathbb{R}$ はそれ自身、実線形空間である。

(例 2)　$\mathbb{C}$ はそれ自身、複素線形空間である。

(例 3)　$\mathbb{C}$ は、実線形空間である。一般にどんな複素線形空間でも、スカラーとして実数しか許さない場合 (係数体を $\mathbb{R}$ に制限する) を考えれば、実線形空間になる。逆は一般に成立しない。実線形空間は複素線形空間には一般にならない。何故ならば、実線形空間のベクトルに複素数を掛けることが定義されていないか、或いはたとえ定義されていても掛け算した結果が空間からはみだしてしまうことがあるからである。

(例 4)　0 ベクトルだけの空間 $\{0\}$ は、実線形空間でも複素線形空間でもある。

(例 5)　任意の自然数 n に対して、$\mathbb{R}$ の直積集合

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{n}\\ &= \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

は、実線形空間である。$\langle x_1\rangle \mapsto x_1$ の対応により、$\mathbb{R}^1$ は数直線と同一視する。$\langle x_1, x_2\rangle \mapsto (x_1, x_2)$ の対応により、$\mathbb{R}^2$ は 2 次元平面と同一視する。$\langle x_1, x_2, x_3\rangle \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ の対応により、$\mathbb{R}^3$ は 3 次元空間と同一視する。

(例 6)　任意の自然数 n に対して、$\mathbb{C}$ の直積集合

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^n &\stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}^{n}\\ &= \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}\}\end{aligned}$$

は、複素線形空間である。$\langle x_1\rangle \mapsto x_1$ の対応により、$\mathbb{C}^1$ は複素平面と同一視する。

(例 5) と (例 6) は、幾つかの線形空間が与えられたとき、集合の直積によりそれらを一纏めにして 1 つの線形空間にする方法を示唆している。例えば、V_1 と V_2 という抽象線形空間が与えられたとしよう。このとき

$$V_1 \times V_2 = \{\langle x_1, x_2\rangle \mid x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2\}$$

は線形空間となる。この線形空間を $V_1 \oplus V_2$ で表し、V_1 と V_2 の直和線形空間と呼ぶ。要素 $\langle x_1, x_2\rangle$ は $x_1 \oplus x_2$ と表現することにする。$V_1 \oplus V_2$ 上のベクトル和とスカラー倍は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}&(x_1 \oplus x_2) + (x_1 \oplus x_2) = (x_1 + y_1) \oplus (x_2 + y_2),\\ &a(x_1 \oplus x_2) = (ax_1) \oplus (ax_2).\end{aligned}$$

同様にして、$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ なども考えることができる。

(例 8)　$\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ は、n 次元線形空間と呼ばれるものの典型的なものである。無限数列を、無限個成分が並んだベクトルと考えると、無限次元線形空間ができる。

$$\mathbb{K}^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots \in \mathbb{K}\}$$

と定義すると、$\mathbb{K}$ 上の線形空間である。零ベクトルは、無限に 0 が並んだ数列

$$0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

である。

$\mathbb{K}^\infty$ の中から有界な数列だけ取り出して作った空間

$$l^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\infty \mid \exists K \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq K\}$$

も $\mathbb{K}$ 上の線形空間である。

$\mathbb{K}^\infty$ の中から収束する数列だけを取りだした空間

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\infty \mid \exists x \in \mathbb{K}, x_n \to x (n \to \infty)\}$$

も $\mathbb{K}$ 上の線形空間である。

$\mathbb{K}^\infty$ の中から 0 収束する数列だけを取りだした空間

$$c_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\infty \mid x_n \to 0 (n \to \infty)\}$$

も $\mathbb{K}$ 上の線形空間である。

$\mathbb{K}^\infty$ の中から級数が絶対収束するものだけを取りだした空間

$$l^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\}$$

も $\mathbb{K}$ 上の線形空間である。

$\mathbb{K}^\infty$ の中から、ある番号から先はすべて 0 である数列だけを取りだした空間

$$c_{00} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\infty \mid \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow x_n = 0\}$$

も $\mathbb{K}$ 上の線形空間である。

これらの数列空間の包含関係は以下の通りである。

$$\mathbb{K}^\infty \supseteq l^\infty \supseteq c \supseteq c_0 \supseteq l^1 \supseteq c_{00}.$$

(例 9)　x を変数として

$$\mathbb{K}[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots;\ a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{K}\}$$

と定義すると、$\mathbb{K}[x]$ は $\mathbb{K}$ 上の線形空間である。$\mathbb{K}[x]$ は変数 x の多項式の全体である。$\mathbb{K}[x]$ は

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mapsto \langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots \rangle$$

の対応により、(例 8) の c_{00} と 1 対 1 に対応している。

(例 10)　(例 9) は、

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

という関数を考えることにより、$\mathbb{R}$ 上で定義され $\mathbb{K}$ に値をとる関数の集まりと考えても良い。$\mathbb{R}[x]$ は、$\mathbb{R}$ 上の整関数の全体と考えられる。

$\mathbb{R}$ 上で定義され $\mathbb{K}$ に値をとるすべての関数の集合

$$\mathbb{K}^\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}\}$$

は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる。

このうち連続な関数だけを集めた

$$C(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{K},\ \text{連続関数}\}$$

も $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる。

さらに、ここから n 階連続微分微分可能な関数だけを集めた

$$C^{(n)}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f \text{ は } n \text{ 階連続微分微分可能}\}$$

や、C^∞ 級関数の全体

$$C^\infty(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n=0}^{\infty} C^{(n)}(\mathbb{R})$$

も $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる。

定義域は $\mathbb{R}$ 全体でなくても、閉区間 $[a, b]$ 上に限って

$$C([a, b]) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{K},\ \text{連続関数}\}$$

を考えても、$\mathbb{K}$ 上の線形空間となる。また、

$$L^1([a, b]) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{K},\ \text{定積分可能}\}$$

も $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる。

$$C([a, b]) \subseteq L^1([a, b])$$

である (閉区間で定義された連続関数は定積分可能)。

上では定義域を $\mathbb{R}$ で考えたが、定義域を $\mathbb{C}$ として考えると、複素関数論で登場するいろいろな関数の作る空間ができる。

様々な線形空間の例を挙げてきたが、実際は本当に線形空間になるかどうかを調べなければならない。即ち、線形空間になるための条件 (1) から (10) までを、一つ一つチェックする必要がある。多少厄介な仕事ではあるが、これを一回済ませてしまえば、今後幾つも登場するであろう線形空間で成立する定理はすべてそれぞれの例の線形空間で成立することになり、定理を個別に証明する必要が無くなる。これが「抽象」化の利点である。

(例 8) 以降は、無限次元線形空間と呼ばれるものである。線形空間の次元を概念は、次節以降で定義するが、この講義で学ぶことは主に有限次元線形空間の話に限る。無限次元線形空間を取り扱うには、「情報数理 II」で学ぶ距離や位相の概念が必要となる。無限次元線形空間は、実は「積分変換法」に登場しているはずであるが (空間としての捉え方に欠けていた)、正式に取り扱うのは「応用解析学」になるであろう。

6　線形部分空間と線形写像

線形空間 V の部分集合 U が、V の線形部分空間であるとは、

(1)　任意の $x, y \in U$ に対して、$x + y \in U$,
(2)　任意の $x \in U$ と $a \in \mathbb{K}$ に対して、$ax \in U$

が成立するときを言う。U が V の線形部分空間であるための必要十分条件は

(3)　任意の $x, y \in U$ と $a, b \in \mathbb{K}$ に対して、$ax + by \in U$

が言えることである。また、U が V の線形部分空間であるための必要十分条件は

(4)　V の持つベクトル和およびスカラー倍で、U 自身が線形空間になる

ことでもある。いずれも、証明は易しい。

V を 2 次元座標平面とすれば、V の部分空間は原点だけからなる集合、原点を通るある直線上の点の集合、V 自身のいずれかである。V を 3 次元座標空間とすれば、V の部分空間は原点だけからなる集合、原点を通るある直線上の点の集合、原点を通るある平面上の点の集合、V 自身のいずれかである。どんな線形空間 V を考えても、零ベクトルだけの空間 $\{0\}$ と V 自身はいつでも V の線形部分空間である。この 2 つの線形部分空間は、V の自明な線形部分空間であるということがある。

3 次元座標空間で、原点を通る異なる 2 つ平面の共通部分は、原点を通る直線でることを想像すれば予想がつくように、2 つの線形部分空間の共通部分は、また線形部分空間になる。一般に次の定理が言える。

定理 1 V を線形空間とする。V の線形部分空間の族 $\{U_\lambda\}$ が空でない限り、$\bigcap_\lambda U_\lambda$ は V の線形部分空間である。

証明　$x, y \in \bigcap_\lambda U_\lambda$、$a, b \in \mathbb{K}$ とする。任意の λ を固定する。$x, y \in \bigcap_\lambda U_\lambda$ なので、$x, y \in U_\lambda$ である。U_λ は線形部分空間であるから

$$ax + by \in U_\lambda$$

である。λ は任意であったから、$ax + by \in \bigcap_\lambda U_\lambda$ である。

系 1 V を線形空間とする。V の任意の部分集合 X に対して、X を含む最小の線形部分空間が存在する。

証明　X を含む線形部分空間の族を、$\{U_\lambda\}$ とする。V は X を含む線形部分空間の 1 つであるから、この族は空ではない。$\bigcap_\lambda U_\lambda$ が、X を含む最小の線形部分空間である。

X を含む最小の線形部分空間を $\mathrm{span}X$ で表し、X が張る線形部分空間とか、X が生成する線形部分空間であるという。X の要素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ に対して

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

を、X の要素の線形結合とか 1 次結合という。$\mathrm{span}X$ は、X の要素の線形結合をすべて集めた集合にちょうど一致する。何故ならば、X の要素の線形結合をすべて集めた集合は X を含む線形部分空間であり、$\mathrm{span}X$ に含まれるからである。

注意 1 *2* つの線形部分空間 U_1 と U_2 に対して、$U_1 \cup U_2$ は一般に線形部分空間にはならない。部分空間になるのは、一方が他方んい含まれる場合に限る。$\mathrm{span}(U_1 \cup U_2)$ を、$U_1 \vee U_2$ で表す。

例えば、V を *3* 次元空間として、U_1 および U_2 をそれぞれ原点を通る直線とする。このときは、$U_1 \vee U_2$ は直線 U_1 と直線 U_2 の張る平面となる。

同様に、線形部分空間の族 $\{U_\lambda\}$ に対して、$\mathrm{span}\bigcup_\lambda U_\lambda$ を $\bigvee_\lambda U_\lambda$ で表す。

線形空間 V_1 と V_2 を考える。V_1 と V_2 は同じ空間であってもよいし、一方が他方に含まれてもよいし、全く異なる空間であってもよい。異なる空間であっても、零ベクトルは同じ 0 を用いる。文脈からどちらの零ベクトルを考えているかは容易にわかるであろう。また、係数体 $\mathbb{K}$ は同じで考える。写像 $f : V_1 \to V_2$ が線形写像であるとは、

(1) 任意の $x, y \in V_1$ に対して、$f(x+y) = f(x) + f(y)$,
(2) 任意の $x \in V_1$ および $a \in \mathbb{K}$ に対して、$f(ax) = af(x)$

を満たすことを言う。$f : V_1 \to V_2$ が線形写像であるための必要十分条件は、

(3) 任意の $x, y \in V_1$ および $a, b \in \mathbb{K}$ に対して、$f(ax+by) = af(x) + bf(y)$,

が成立することである。

線形写像 f はいつでも

$$f(0) = 0,\ f(-x) = -f(x)$$

を満たすことが容易にわかる。

線形写像 f による V_1 の像を、f のレンジと言い $\mathrm{Range}(f)$ で表す。即ち

$$\mathrm{Range}(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f(x) \mid x \in V_1\}$$

で定義される。$\mathrm{Range}(f)$ は、V_2 の線形部分空間である。f が V_2 の上への写像であることと、$\mathrm{Range}(f) = V_2$ は同値である (定義そのもの)。

また、$\{0\} \subseteq V_2$ の f による逆像を、f のカーネルと言い $\mathrm{Kernel}(f)$ で表す。即ち

$$\mathrm{Kernel}(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}$$

で定義される。$\mathrm{Kernel}(f)$ は、V_1 の線形部分空間である。f が 1 対 1 写像であることと、$\mathrm{Kernel}(f) = \{0\}$ は同値である。何故ならば、f が 1 対 1 写像であるとすると $x \neq 0$ ならば $f(x) \neq f(0) = 0$ なので、$\mathrm{Kernel}(f) = \{0\}$ である。逆に、$\mathrm{Kernel}(f) = \{0\}$ であるとする。$f(x) = f(y)$ ならば、$f(x-y) = 0$ であり、$x - y = 0$。即ち、$x = y$ が示される。

線形空間 V_1, V_2, V_3 と、線形写像 $f : V_1 \to V_2$ および $g : V_2 \to V_3$ に対して、合成写像 $g \circ f$ は V_1 から V_3 への線形写像である。何故ならば、任意の $x, y \in V_1$ および $a, b \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(ax+by) &= g(f(ax+by)) \\
&= g(af(x) + bf(y)) \\
&= ag(f(x)) + bg(f(y)) \\
&= a(g \circ f)(x) + b(g \circ f)(y)
\end{aligned}$$

が言えるからである。

第 2 節「線形とは」で取り上げた例から、様々な線形空間、線形部分空間、線形写像の例を見つけることができるので、読者は自分で探してもらいたい。

線形空間 V_1 から V_2 の上への 1 対 1 線形写像 f が存在とき、V_1 は V_2 と線形同型であるといい、f は線形同型写像であるという。線形同型という関係は、反射的、対称的、かつ推移的である。

(反射的)　線形空間 V は自分自身と線形同型である (恒等写像を考えればよい)。

(対称的)　線形空間 V_1 が V_2 と線形同型ならば、V_2 は V_1 と線形同型である (逆写像を考えればよい)。

(推移的)　線形空間 V_1 が V_2 と線形同型であり、V_2 が V_3 と線形同型であるならば、V_1 が V_3 と線形同型である (合成写像を考えればよい)。

線形同型の関係にある線形空間どうしは、一方が持つ線形空間としての性質はそっくりそのまま他方の性質に遺伝される。

(例 1)　$i = \sqrt{-1}$ とする。$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ を

$$\langle x, y \rangle \mapsto x + iy$$

により定義する。$\mathbb{R}^2$ は実線形空間である。$\mathbb{C}$ は複素線形空間であるが、スカラーを実数に限れば実線形空間であるとも考えられる。上で定義した f は実線形空間 $\mathbb{R}^2$ と実線形空間 $\mathbb{C}$ の間の線形同型写像である。

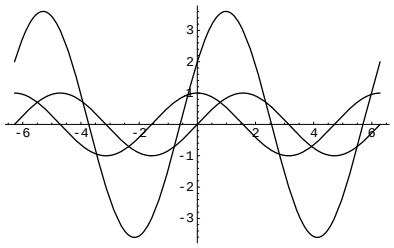
(例 2)　$\mathbb{R}$ 上で定義された関数 ϕ で、適当な実数 a と b によって

$$\phi(x) = a \cos x + b \sin x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

と表現されるものの全体を V としよう。V は実線形空間である。V の任意の要素は、適当な $r \geq 0$ と $0 \leq \omega < 2\pi$ によって

$$\phi(x) = r \sin(x + \omega) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

と表現できる (三角関数の合成)。



逆に、このように表現できる関数 ϕ は必ず V の要素となる (加法定理)。

$f : \mathbb{R}^2 \to V$ を、

$$\langle a, b \rangle \mapsto a \cos x + b \sin x$$

によって定義すると、f は $\mathbb{R}^2$ から V への線形同型写像となる。

$[0,\infty)\times[0,2\pi)$ から V への写像

$$\langle r,\omega\rangle \mapsto r\sin(x+\omega)$$

は、1 対 1 上への写像であるが、線形写像ではない。

2 次元平面上のベクトルの内積という概念を高等学校で習ったはずである。位置ベクトル (a_1,b_2) および (a_2,b_2) として表現されるベクトルの内積は

$$a_1a_2+b_1b_2$$

と書けた。ベクトルが直交するための必要十分条件は、内積が 0 になることである。$(1,0)$ と $(0,1)$ は直交する。上で定義した R^2 と V の線形同型関係は、2 次元平面と V との線形同型関係であると考えてもよい。このとき、2 次元平面上のベクトル $(1,0)$ と $(0,1)$ はそれぞれ $\cos x$ と $\sin x$ という関数に対応する。従って、$\cos x$ と $\sin x$ とは直交するという言い方をする。この直交の意味には、$\cos x$ と $\sin x$ のグラフから見える幾何学的意味とはあまり関係がない。内積や直交性の概念は、後できちんと定義することになる。

(例 3)

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

は Eular の公式として知られている。与えられた $z\in\mathbb{C}$ に対して

$$\phi(x)=ze^{ix} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

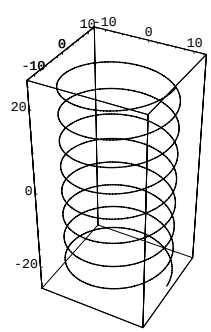
と表現できる関数 ϕ の全体を U とすると、U は複素線形空間である。$z\in\mathbb{C}$ は、ある $r\geq 0$ と $0\leq\omega 2\pi$ によって

$$z=re^{i\omega}$$

と表現できる (極形式) ので、

$$\phi(x)=re^{i(x+\omega)} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

の形をしている。



$f:\mathbb{C}\to U$ を、

$$z\mapsto ze^{ix}$$

によって定義すると、f は複素線形空間 $\mathbb{C}$ から U への線形同型写像となる。

U に属する関数 $\phi(x)$ の実部だけを取り出すと

$$\mathrm{Re}(\phi(x)) = \mathrm{Re}((a+bi)(\cos x + i\sin x)) = a\cos x - b\sin x$$

なので ($z = a+bi$)、U の関数の実部をすべて取り出すと、ちょうど V に一致する。

上の (例 2)、(例 3) は、周期が 2π の正弦波の作る空間である。与えられた関数が

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \sin 3x,\ \cos 3x,\ \ldots$$

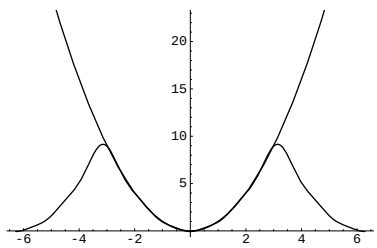
の重ね合わせで表現できるかという問題は非常に重要な問題である。

$$\sin nx,\ \cos nx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

は周期が $\dfrac{2\pi}{n}$ の正弦関数である。下のグラフは

$$y = \frac{2\pi}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{4}{25}\cos 5x$$

を描いたものである。



$[-\pi, \pi]$ の範囲で

$$y = x^2$$

のグラフに非常によくフィットしている。

(例 5)　2 次関数の全体の集合を V とする (2 次や 1 次の係数が 0 と考えて、1 次関数、定数関数も 2 次関数の特別な場合と考える)。即ち、

$$V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

は実線形空間である。このとき、$\mathbb{R}^3$ から V への写像 f を

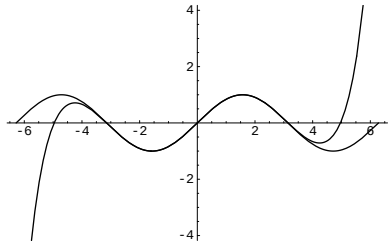
$$\langle a, b, c\rangle \mapsto ax^2 + bx + c$$

によって定義すると、f は線形同型写像となる。同様にして、$\mathbb{R}^{n+1}$ と n 次関数の作る空間も線形同型となる。

与えられた関数が、n 次関数で表現できるかという問題も非常に重要な問題である。下のグラフは

$$y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9$$

を描いたものである。



やはり、原点を含むある区間 $[-c, c]$ で

$$y = \sin x$$

のグラフに非常によくフィットしている。

7　線形独立、線形従属、基底および次元

$$y = \sin x$$

で表されるグラフの y 軸のスケールをいくら変えても

$$y = \cos x$$

のグラフを作ることはできない。別の言葉で言えば、関数 $\sin x$ のスカラー倍で、関数 $\cos x$ を表現することはできない。しかし、$\sin x$ と $\cos x$ の 2 つの関数があれば、その線形結合によって $r\sin(x+\omega)$ の形の関数はいくらでも作り出すことができる (このような関数は無限に存在する)。では、$\sin 2x$ は、$\sin x$ と $\cos x$ の線形結合で作れるかというと、これは無理である。

同様に、

$$y = x$$

で表されるグラフの y 軸のスケールをいくら変えても

$$y = x^2$$

のグラフを作ることはできない。別の言葉で言えば、関数 x のスカラー倍で、関数 x^2 を表現することはできない。しかし、関数 1(恒等的に 1 の値をとる定数関数)、x および x^2 の 3 つの関数さえあれば、これらの線形結合で、次数が 2 以下のどんな関数でも作りだすことが可能である (このような関数は無限に存在する)。では、x^3 は、1 と x と x^2 の線形結合で作れるかというと、これは無理である。

この節では、このような問題を考えていきたい。線形空間 V を任意に固定して話を進める。V は実線形空間であっても複素線形空間であっても良い。

V の要素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が与えられたとき、

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

が言えるとき、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は線形独立であるという。

V の部分集合 X が与えられたとき、X から相異なる任意個のベクトル $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を勝手に取りだしたときに、それらが必ずは線形独立であると言えるとき、X は線形独立であるという。

V の部分集合 X と $x \in V$ が与えられたとき、$X \cup \{x\}$ が線形独立であるとき、x は X と線形独立であるという。

次のことを確かめることは易しい。$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が線形独立ならば、これらの中に同じベクトルは存在しない (同じベクトルのスカラー倍すら存在しない)。線形独立な集合の任意の部分集合は必ず線形独立である。また、線形独立な集合には決して零ベクトルが属すことはない。零ベクトル以外の任意のベクトル 1 個だけの集合は、必ず線形独立である。x が X と線形独立ならば、X のどのような要素を取りだしても、それらの線形結合によっても x を表すことはできない。

念のため、最後の事実だけ示しておこう。もし、x が X のある要素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ によって

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

と表現できたとしよう。このとき、

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + (-1)x = 0$$

であるので、$X \cup \{x\}$ が線形独立であるという定義に反する。

線形従属という用語は、線形独立の否定の意味で用いられる。例えば、x が X と線形従属ならば、必ず X のある要素 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ によって

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

と表現できる。

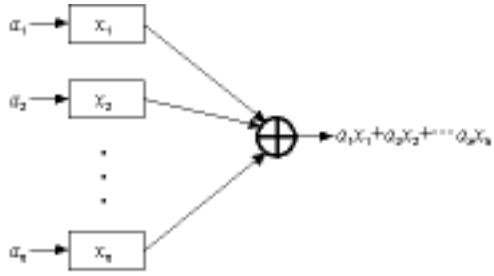
すでに見てきたとおり、関数空間において $1, \sin x, \cos x$ は線形独立である。また、$1, x, x^2$ も線形独立である。

一方、U として、$\mathbb{R}$ 上で定義され $\mathbb{C}$ に値をとる関数の全体を考える。U は複素線形空間である。この空間で考えると、$\sin x$ と $\cos x$ は線形従属である (何故か)。$1, x, x^2$ は線形独立のままである。

V の有限部分集合 (要素の数が有限個という意味)$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ が存在して、それが線形独立であり、しかも V の任意の要素が $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ に線形従属となる場合、即ち

$$\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = V$$

である場合に、V は有限次元であるという。このとき、$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ は V の基底であるという。



基底は通常たくさんある。例えば、V の基底が $\{x, y\}$ であるとき、

$$\{x+y,\ x-y\}$$

も V の基底になる (確かめよ)。更に、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

が逆行列を持てば

$$\{ax+by,\ cx+dy\}$$

も V の基底であることも簡単にわかる (一般論は後でやる)。次の定理は、線形空間の最も基本的でかつ重要な定理の一つである。

定理 2 V は有限次元であるとき、基底の要素の数は一定である。

この定理を証明する前に、2 つの補助定理を証明する。

補題 1 0 ではないベクトルの列 $x_1, \ldots, x_n$ が線形従属であるとする。このとき、$1 < k \leq n$ を満たす k および、$a_1, \ldots, a_{k-1}$ が存在して

$$x_k = a_1 x_1 + \cdots + a_{k-1} x_{k-1}$$

と書ける。

証明 $x_1, \ldots, x_k$ が線形従属であるような最小の k が存在するはずである。このとき、$b_1, \ldots, b_k$ のすべてが同時に 0 ではない (少なくとも一つは 0 でない)

$$b_1 x_1 + \cdots + b_k x_k = 0$$

となる $b_1, \ldots, b_{k-1}$ が存在する。ここで、k の最小性より $b_{k-1} \neq 0$ でなければならない。従って

$$x_k = \frac{b_1}{b_k} x_1 + \cdots + \frac{b_{k-1}}{b_k} x_{k-1}$$

より、補題は証明された。

補題 2 $x_1, \ldots, x_m$ は線形独立であるとする。$y_1, \ldots, y_n$ は、

$$\mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_n\} = V$$

を満たすとする。このとき、$m \leq n$ である。

証明 $\mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_n\} = V$ という仮定より、x_m は $y_1, \ldots, y_n$ の線形結合で表現できるので、$x_m, y_1, \ldots, y_n$ は線形従属である。補題 1 より $y_1, \ldots, y_n$ の中に y_i が存在して、$x_m, y_1, \ldots, y_{i-1}$ の線形結合で表現できる。従って、

$$\mathrm{span}(\{x_m, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n\}) = V$$

が言える。

$$x_{m-1}, x_m, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$$

を考えと、これも線形従属である。再び補題 1 を用いて、$x_m, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ の中のあるベクトルで、そのベクトルは自分自身より前に並んでいるベクトルたちの線形結合で表現できるものがある。そのベクトルは x_m であることはない。何故ならば x_{m-1}, x_m は線形独立だからである。そのベクトルを取り除く。これを繰り返して、最後に

$$x_1, \ldots, x_m, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}$$

ができる。このベクトルの個数は n のままである。よって $m \leq n$ が示された。

定理の証明　$\{x_1, \ldots, x_m\}$ および $\{y_1, \ldots, y_n\}$ を、V の基底であるとする。このとき、補題 2 より $m \leq n$ と $n \leq m$ が言えるので、$m = n$ が示される。

上に述べた定理から一定に決まる有限次元線形空間の基底の要素数のことを、その線形空間の次元と呼ぶことにする。なお、零ベクトルだけから成る空間を 0 次元線形空間という。以下に挙げる定理の証明は、練習問題とする。

定理 3 V が n 次元線形空間とすると、V の任意の線形部分空間の次元はすべて n 以下である。特に、V の線形部分空間の次元が n であれば、それは V 自身である。

定理 4 V を有限次元線形空間とする。このとき、V の任意の線形独立な部分集合に対して、それを含む V の基底が必ず存在する。

定理 5 $\mathbb{K}$ 上の n 次元線形空間はすべて $\mathbb{K}^n$ と線形同形である。

定理 6 *2* つの有限次元線形空間が互いに線形同形であるための必要十分条件は、*2* つの線形空間が同じ次元をもつことである。

定理 7 V_1 および V_2 を有限次元線形空間とし、それぞれの次元を m および n とする。このとき、直和線形空間 $V_1 \oplus V_2$ も有限次元線形空間で、その次元は $m + n$ である。

上のいくつかの定理で、線形空間が 2 つ以上登場するものは、同じ係数体で考えての話である。一方を $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とし (即ち実線形空間とみなし)、他方を $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする (即ち複素線形空間とみなす) と、話は違ってくる。実際、n 次元複素線形空間は、実線形空間とみなせば、$2n$ 次元線形空間となる。V を n 次元複素線形空間として、$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を V の基底とする。このとき、

$$\{x_1,\ ix_1,\ x_2,\ ix_2,\ \ldots,\ x_n,\ ix_n\}$$

が、V を実線形空間とみなした場合の基底となる (ここで、i は虚数単位である)。

実線形空間は一般にそのままでは複素線形空間とみなすことはできないが、空間を拡大することによって複素線形空間化できる。V を実線形空間とする。このとき、実線形空間 $V \oplus V$ を複素線形空間にすることが可能である。$V \oplus V$ 上には元々、ベクトルを実数倍が定義されているが、ベクトルを複素数倍するということを

$$(a + bi)(x \oplus y) = (ax - by) \oplus (ay + bx) \qquad (a + bi \in \mathbb{C}, x \oplus y \in V \oplus V)$$

によって定義する。この定義は、ベクトルを実数倍することの拡張になっていることに注意する。$V \oplus V$ がこのスカラー倍の定義によって複素線形空間となることを確かめることはそれほど難しくない。

$$i(x \oplus 0) = 0 \oplus x$$

であることに注意すると、$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を V の基底としたとき

$$\{x_1 \oplus 0,\ x_2 \oplus 0,\ \ldots, x_n \oplus 0\}$$

が複素線形空間 $V \oplus V$ の基底となる。従って、複素線形空間 $V \oplus V$ の次元は n である。$V \oplus V$ を実線形空間と考えた場合は

$$\{x_1 \oplus 0,\ 0 \oplus x_1,\ x_2 \oplus 0,\ 0 \oplus x_2,\ \ldots, x_n \oplus 0,\ 0 \oplus x_n\}$$

が基底なので $2n$ 次元である。このうち

$$\{x_1 \oplus 0,\ x_2 \oplus 0,\ \ldots, x_n \oplus 0\}$$

が生成する実線形空間が V と実線形空間として線形同形となる。

(例 1)　$\mathbb{K}^n$ は有限次元線形空間で、次元は n である。基底としては、

$$\{\langle 1,0,0,\ldots,0\rangle,\ \langle 0,1,0,\ldots,0\rangle,\ \langle 0,0,1,\ldots,0\rangle,\ \ldots,\ \langle 0,0,0,\ldots,1\rangle\}$$

を考えるのが最も易しい (他にも沢山あるが)。

$$a_1\langle 1,0,0,\ldots,0\rangle + a_2\langle 0,1,0,\ldots,0\rangle + a_3\langle 0,0,1,\ldots,0\rangle + \cdots + a_n\langle 0,0,0,\ldots,1\rangle = 0$$

ならば、

$$\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\rangle = \langle 0,0,0,\ldots,0\rangle$$

であるから、線形独立であることが言える。また、$\mathbb{K}^n$ の任意のベクトルは

$$\begin{aligned}
& \langle x_1, x_x, x_3, \ldots, x_n\rangle \\
= \ & \langle x_1,0,0,\ldots,0\rangle + \langle 0,x_2,0,\ldots,0\rangle + \langle 0,0,x_3,\ldots,0\rangle + \cdots + \langle 0,0,0,\ldots,x_n\rangle \\
= \ & x_1\langle 1,0,0,\ldots,0\rangle + x_2\langle 0,1,0,\ldots,0\rangle + x_3\langle 0,0,1,\ldots,0\rangle + \cdots + x_n\langle 0,0,0,\ldots,1\rangle
\end{aligned}$$

と表現できるから、V を生成することも言える。

$$\{\langle 1,0,0,\ldots,0\rangle,\ \langle 0,1,0,\ldots,0\rangle,\ \langle 0,0,1,\ldots,0\rangle,\ \ldots,\ \langle 0,0,0,\ldots,1\rangle\}$$

をそれぞれ

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_n$$

で表し、$\mathbb{K}^n$ の標準基底と呼ぶ。

$$\langle x_1, x_x, x_3, \ldots, x_n\rangle = x_1e_1 + x_2 + e_2 + x_3e_3 + \cdots + x_ne_n$$

である。

8　ノルムと内積

この節では、$V, V_1, V_2, \ldots$ は、線形空間とする。特に断りがない限り、実線形空間でも複素線形空間でもよい。

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ が、次の条件を満たすとき $\|\cdot\|$ を V 上のノルムという：

(1) 任意の $x \in V$ に対して $\|x\| \geq 0$ であり、等号が成立するための必要十分条件は $x = 0$ である;
(2) 任意の $a \in \mathbb{K}$ および $x \in V$ に対して、$\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ を満たす;
(3) 任意の $x, y \in V$ に対して、$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ を満たす。

(例 1)　$\mathbb{K}$ 自身を $\mathbb{K}$ 上の線形空間と考えたとき、$|\cdot|$ は $\mathbb{K}$ 上のノルムである。
(例 2)

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \qquad (x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \mathbb{K}^n)$$

と定義すると、$\|\cdot\|_1$ は $\mathbb{K}^n$ 上のノルムである。
(例 3)

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \qquad (x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \mathbb{K}^n)$$

と定義すると、$\|\cdot\|_2$ は $\mathbb{K}^n$ 上のノルムである。
(例 4)

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \qquad (x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \mathbb{K}^n)$$

と定義すると、$\|\cdot\|_\infty$ は $\mathbb{K}^n$ 上のノルムである。

$\mathbb{R}$ 上の閉区間 $[a, b]$ に対して

$$C_{\mathbb{K}}[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{K}\}$$

と定義すると、$C_{\mathbb{K}}[a, b]$ は $\mathbb{K}$ 上の線形空間であった。

(例 5)

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

と定義すると、$\|\cdot\|_\infty$ は $C_{\mathbb{K}}[a, b]$ 上のノルムである。
(例 6)

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

と定義すると、$\|\cdot\|_1$ は $C_{\mathbb{K}}[a, b]$ 上のノルムである。
(例 7)

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

と定義すると、$\|\cdot\|_2$ は $C_{\mathbb{K}}[a, b]$ 上のノルムである。

$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ が、次の条件を満たすとき $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を V 上の内積という：

(1) 任意の $x \in V$ に対して $\langle x|x\rangle \geq 0$ であり、等号が成立するための必要十分条件は $x = 0$ である;

(2) 任意の $a \in \mathbb{K}$ および $x, y \in V$ に対して、$\langle x|ay\rangle = a\langle x|y\rangle$ を満たす;

(3) 任意の $x, y \in V$ に対して、$\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ を満たす (ここで、$\overline{\cdot}$ は、共役複素数を意味する);

(4) 任意の $x, y, z \in V$ に対して、$\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$ を満たす。

(2) および (3) より

(5) 任意の $a \in \mathbb{K}$ および $x, y \in V$ に対して、$\langle ax|y\rangle = \overline{a}\langle x|y\rangle$ を満たす;

が言える。実線形空間では、(3) の条件は

(3') 任意の $x, y \in V$ に対して、$\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$ を満たす;

に置き換えることが可能である。従って、(5) の条件は更に

(5') 任意の $a \in \mathbb{K}$ および $x, y \in V$ に対して、$\langle ax|y\rangle = a\langle x|y\rangle$ を満たす;

に置き換えることが可能である。

定理 8 V が内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つならば、任意の $x, y \in V$ に対して

$$|\langle x|y\rangle| \leq \sqrt{\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle}$$

が成立する。

証明 $x = 0$ のとき、不等式が成立することは明らか。$x \neq 0$ の場合に証明する。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle tx+y|tx+y\rangle \\ &= \langle x|x\rangle t^2 + (\langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle)\, t + \langle y|y\rangle \\ &= \langle x|x\rangle t^2 + 2\mathrm{Re}\,(\langle x|y\rangle)\, t + \langle y|y\rangle \end{aligned}$$

が成立するので、t に関する 2 次方程式が常に非負ということから、判別式を計算すると

$$\frac{D}{4} = \mathrm{Re}\,(\langle x|y\rangle)^2 - \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \leq 0$$

が成立しなければならない。従って、

$$\mathrm{Re}\,(\langle x|y\rangle)^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$$

であり、V が実線形空間ならばこれから直ちに望みの不等式が得られる。V が複素線形空間の場合は、上で得られた不等式は任意の $x, y \in V$ に対して成立するので、

$$\langle x|y\rangle = |\langle x|y\rangle|\, e^{i\omega}$$

として、

$$\mathrm{Re}\left(\langle e^{i\omega}x|y\rangle\right)^2 \leq \langle e^{i\omega}x|e^{i\omega}x\rangle\langle y|y\rangle$$

を得るが、これは

$$|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$$

を意味する。

上の不等式を Schwarz の不等式と呼ぶ。次の良く知られた 3 つの不等式はこの特別の場合である (3 つ目は、確率論の分散・共分散の関係)。

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} {x_n}^2 \sum_{n=1}^{\infty} {y_n}^2}, \\
\int_a^b f(x)g(x)dx &\leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx}, \\
E(XY) &\leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}.
\end{aligned}$$

定理 9 V が内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ場合、

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle} \qquad (x \in V)$$

と定義すると、$\| \cdot \|$ は V 上のノルムとなる。

証明 三角不等式以外は易しい。三角不等式は、Schwarz の不等式を用いて

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x|y \rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

によって証明される。

$\mathbb{K}^n$ 上の内積として、

$$x = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, \quad y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$$

に対して

$$\langle x|y \rangle = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \cdots \overline{x_n} y_n$$

で定義されるものは特に重要である。このとき、ノルムは

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

となる。このノルムのことを、$\mathbb{K}^n$ 上のユークリッドノルムという。

x と y の内積が 0 のとき、x と y は直交するという。x と y が直交するとき、三平方 (ピタゴラス) の定理

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

が成立する。

実線形空間 $C_{\mathbb{R}}[0,2\pi]$ に

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

により、内積が定義できる。このとき、$m,n=0,1,2,\ldots$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx &= 0, \quad (\text{ただし、} m \neq n) \\
\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= 0, \quad (\text{ただし、} m \neq n) \\
\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx &= 0,
\end{aligned}$$

が言えるので、

$$1,\ \sin mx,\ \cos nx \qquad (m,n=1,2,\ldots)$$

は、互いに直交している (どの 2 つの関数をとっても直交している)。

複素線形空間 $C_{\mathbb{C}}[0,2\pi]$ に

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)dx$$

により、内積が定義できる。このとき、$m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ に対して

$$\int_0^{2\pi} e^{-mix}e^{nix}dx = 0 \quad (\text{ただし、} m \neq n)$$

が言えるので、

$$e^{nix} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

は、互いに直交している (どの 2 つの関数をとっても直交している)。

9 ベクトル値関数の微積分

この節では V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする。集合 X に対して、X 上で定義され V に値をとる写像 $f: X \to V$ をベクトル値関数という。

(例 1) n 個の関数 $f_i : X \to \mathbb{K} \quad (i=1,2,\ldots,n)$ が与えられたとき

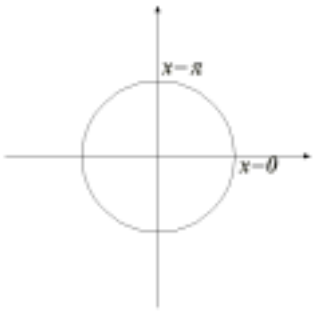
$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)\rangle \qquad (x \in X)$$

と定義すると、$f: X \to \mathbb{K}^n$ はベクトル値関数である ($V=\mathbb{K}^n$)。

例えば、

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \cos x, \sin x\rangle \qquad (x \in \mathbb{R})$$

で定義される $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は、ベクトル値関数である。



(例 2)　2 変数関数 $g : X \times X \to \mathbb{K}$ を考える。任意の $\in X$ を固定して、

$$y \mapsto g(x, y) \qquad (y \in X)$$

で定義される関数を $f(x)$ で表す。$f : X \to V$ はベクトル値関数である。ここで線形空間 V は

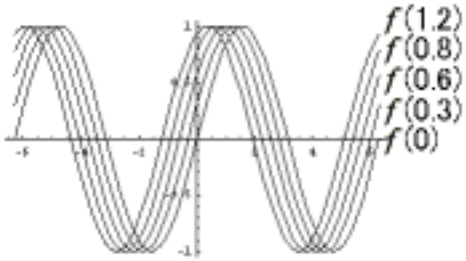
$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{h \mid h : X \to \mathbb{K}\}$$

で定義される線形空間である。

例えば、$x \in \mathbb{R}$ を固定して

$$y \mapsto \sin(x + y) \qquad (y \in \mathbb{R})$$

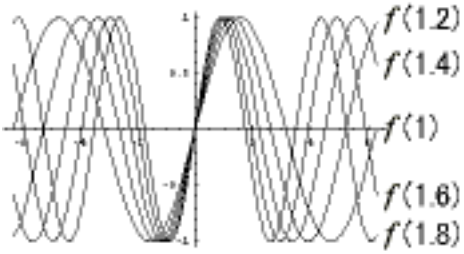
で定義される関数を $f(x)$ で表す。このとき、$f(0), f(0.3), f(0.6), f(0.9), f(1.2)$ のグラフは以下のようになる。



$x \in \mathbb{R}$ を固定して

$$y \mapsto \sin(x \times y) \qquad (y \in \mathbb{R})$$

で定義される関数を $f(x)$ で表す。このとき、$f(1.0), f(1.2), f(1.4), f(1.6), f(1.8)$ のグラフは以下のようになる。



線形空間 V 上にノルム $\|\cdot\|$ が定義されているものとする。ベクトル値関数 $f:\mathbb{R}\to V$ を考える。f が $x_0\in\mathbb{R}$ において連続であるとは

$$x_n\to x_0\quad(n\to\infty)\quad\Rightarrow\quad\|f(x_0)-f(x_n)\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

が成立することを言う。

注意 2 $f:V\to\mathbb{K}$ が $x_0\in V$ で連続であるとは

$$\|x_0-x\|\to 0\quad(n\to\infty)\quad\Rightarrow\quad f(x_n)\to f(x_0)\quad(n\to\infty)$$

が成立することを言う。$V=\mathbb{K}^n$ ならば、f は n 変数関数と見なすことができる。

もっと一般に、線形空間 V_1 と V_2 があり、それぞれノルム $\|\cdot\|_1$ および $\|\cdot\|_2$ が定義されているとき、$f:V_1\to V_2$ が $x_0\in V_1$ で連続であるとは

$$\|x_0-x\|_1\to 0\quad(n\to\infty)\quad\Rightarrow\quad\|f(x_0)-f(x_n)\|_2\to 0\quad(n\to\infty)$$

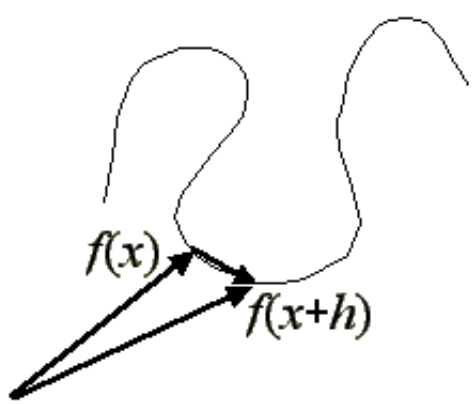
が成立することを言う。

これらはどちらかというと、「ベクトル解析」という分野の話となる。線形システムにおいてもベクトル解析が必要になることがあるが、この講義ではベクトル解析に触れない。線形システムにおいては、$f:\mathbb{R}\to V$ を考えるのは、V の要素、即ちベクトルがシステムの状態を表し、f の定義域 $\mathbb{R}$ の要素は時間と考えることが多い。f は時間と共にシステムの状態が変化していく挙動を表しているものと考える。f が連続であるとは、微小時間でのシステムの変化が微小であることを言っている。

$f:\mathbb{R}\to V$ が $x\in\mathbb{R}$ において連続であり、

$$\left\|a-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\|\to 0\quad(h\to 0)$$

が言えるとき、f は x において微分可能であるといい、a を $f'(x)$、$\dot{f}(x)$、$\dfrac{df}{dx}(x)$ などで表す。



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^n$ とする。$\mathbb{K}^n$ 上にはユークリッドノルムが定義されているとする。このとき

$$f(x)=\langle f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)\rangle \qquad (x\in\mathbb{R})$$

と表すことができる。f は x で微分可能であり

$$\frac{df}{dx}(x)=a$$

としよう。

$$a=\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$$

と表すことができる。このとき、

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left\langle \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h},\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h},\ldots,\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\right\rangle$$

であるので、

$$\left\|a-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\|=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left|a_i-\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h}\right|}$$

が言える。$h\to 0$ のとき左辺が 0 に収束するための必要十分条件は、

$$\left|a_i-\frac{f_i(x+h)-f_i(x)}{h}\right|\to 0 \qquad (h\to 0)$$

が各 $i=1,2,\ldots,n$ について言えることである。このとき

$$a_i=\frac{df_i}{dx}(x)$$

である (この微分は通常の関数の微分)。即ち、

$$\frac{df}{dx}(x)=\left\langle \frac{df_1}{dx}(x),\frac{df_2}{dx}(x),\ldots,\frac{df_n}{dx}(x)\right\rangle$$

が言える。即ち、$\mathbb{K}^n$ に値をとるベクトル値関数は成分毎に微分を行えば良い。

例えば、$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(x)\stackrel{\text{def}}{=}\langle\cos x,\sin x\rangle \qquad (x\in\mathbb{R})$$

により定義すると

$$\frac{df}{dx}(x)=\langle-\sin x,\cos x\rangle \qquad (\forall x\in\mathbb{R})$$

である。

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が x で微分可能であり

$$\frac{df}{dx}(x)=a$$

であるとする。微分の定義から

$$\|a-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\|\to 0 \qquad (h\to 0)$$

である。

$$f_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Re}\,(f(x))\,, \quad f_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Im}\,(f(x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

と、実部と虚部に分けて考える。即ち

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

であるとする。同様に a も

$$a = a_1 + ia_2$$

とする。このとき、

$$\|a - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\| = \sqrt{\left(a_1 - \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}\right)^2}$$

であるから、$h \to 0$ として

$$a_1 = \frac{df_1}{dx}(x), \quad a_2 = \frac{df_2}{dx}(x)$$

が言える。即ち、

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{Re}(f(x)) + \frac{d}{dx}\mathrm{Im}(f(x))$$

である。

微分と同様にベクトル値関数の積分も考えられるが、積分論をきちんとやるのは少し煩雑なので、結論だけ述べておく。

$$f : [a, b] \to \mathbb{C}$$

に対して

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))dx$$

と定義できる。更に、

$$f : [a, b] \to \mathbb{K}^n$$

に対しては

$$f(x) = \langle f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\rangle \qquad (a \le x \le b)$$

とするとき、

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \int_a^b f_1(x)dx, \int_a^b f_2(x)dx, \ldots, \int_a^b f_n(x)dx \right\rangle$$

と定義できる。微分同様に、積分も成分毎に積分すればよい。

$$\int_a^b \langle f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\rangle\, dx = \left\langle \int_a^b f_1(x)dx, \int_a^b f_2(x)dx, \ldots, \int_a^b f_n(x)dx \right\rangle$$

と書ける。

10　線形写像の行列による表現

以下、線形空間 V は有限次元であるとする。$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を V の基底とする。V の任意のベクトル x に対して、$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ が一意に定まり

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

と表現できる。V から $\mathbb{K}^n$ への写像

$$x \mapsto \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$$

は 1 対 1 上への写像であり、かつ線形である。

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と表現することにする。$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ および $x, y \in V$ に対して

$$\alpha x + \beta y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_2 \end{bmatrix}$$

が成立する。即ち、V の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ によって x および y がそれぞれ

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

と表現できるとき、$\alpha x + \beta y$ は V の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ によって

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) e_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) e_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n) e_n$$

と表現できる。また、

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表現される。もう一つ別の線形空間 W があり、W の基底の 1 つを $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ とする。W のベクトル u も、基底 $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ によって

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

のように表現される。特に

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad f_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。

V から W への線形写像 A を考える。$A(x)$ は Ax と書くことにする。各 e_i に対して、Ae_i は W のベクトルであるから

$$Ae_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

のように表現できるはずである $(i = 1, 2, \ldots, n)$。$x \in V$ が

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

と表現されているとしよう。即ち、

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

である。このとき、

$$\begin{aligned}
Ax &= A\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n\right) \\
&= x_1 Ae_1 + x_2 Ae_2 + \cdots + x_n Ae_n \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と表現できるので

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と表すことにしよう。$\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$(\alpha A)x \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(Ax) \qquad (x \in V)$$

と定義すると αA は V から W への線形写像となる。このとき、αA は

$$\begin{aligned} (\alpha A)x &= \alpha(Ax) \\ &= A(\alpha x) \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なので

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と表現される。

別に、V から W への線形写像 B があるとする。

$$(A + B)x \stackrel{\text{def}}{=} Ax + Bx \qquad (x \in V)$$

と定義すと、$A + B$ は V から W への線形写像となる。

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

と表現されるとする。

$$
\begin{aligned}
(A+B)x &= Ax+Bx \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\cdots+b_{mn}x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)+(b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n) \\ (a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)+(b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n) \\ \vdots \\ (a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n)+(b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\cdots+b_{mn}x_n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})x_1+(a_{12}+b_{12})x_2+\cdots+(a_{1n}+b_{1n}x_n) \\ (a_{21}+b_{21})x_1+(a_{22}+b_{22})x_2+\cdots+(a_{2n}+b_{2n}x_n) \\ \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1})x_1+(a_{m2}+b_{m2})x_2+\cdots+(a_{mn}+b_{mn}x_n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

であるので

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と表現される。

別の線形空間 U があって、$\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ を U の基底であるとしよう。C を W から U への線形写像を考えることにする。

$$
(CA)x \stackrel{\text{def}}{=} C(Ax) \qquad (x \in V)
$$

と定義する。即ち、CA は A と C の合成写像である。

$$
C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{km} \end{bmatrix}
$$

と表現されるとする。CA は W から U への線形写像なので、行列で表現すれば k 行 n 列の大きさの行列になるはずである。

$$
\begin{aligned}
(CA)x &= C(Ax) \\
&= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m c_{1i}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^m c_{1i}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^m c_{1i}a_{in}x_n \\ \sum_{i=1}^m c_{2i}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^m c_{2i}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^m c_{2i}a_{in}x_n \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m c_{ki}a_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^m c_{ki}a_{i2}x_2 + \cdots + \sum_{i=1}^m c_{ki}a_{in}x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m c_{1i}a_{i1} & \sum_{i=1}^m c_{1i}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m c_{1i}a_{in} \\ \sum_{i=1}^m c_{2i}a_{i1} & \sum_{i=1}^m c_{2i}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m c_{2i}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m c_{ki}a_{i1} & \sum_{i=1}^m c_{ki}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m c_{ki}a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

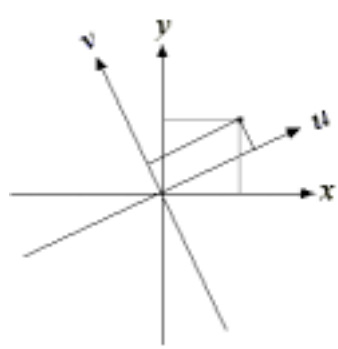
となるので

$$
\begin{aligned}
CA &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m c_{1i}a_{i1} & \sum_{i=1}^m c_{1i}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m c_{1i}a_{in} \\ \sum_{i=1}^m c_{2i}a_{i1} & \sum_{i=1}^m c_{2i}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m c_{2i}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m c_{ki}a_{i1} & \sum_{i=1}^m c_{ki}a_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m c_{ki}a_{in} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と表現される。

以上によって、行列のスカラー倍、行列と行列の和、行列と行列の積の意味が正当化された。

11 座標変換



上の図のように、x-y 座標平面上の点 $\langle x, y\rangle$ を、座標系を変換して u-v 座標平面ではどのように表現されるかを考えて見よう。$e_1 = \langle 1, 0\rangle$ と $e_2 = \langle 0, 1\rangle$ は基底をなす。点 $\langle x, y\rangle$ は、この基底による表現では $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ で表現される。u 軸上で正の方向の単位ベクトル (長さが 1 のベクトル) を $f_1 = \langle a, b\rangle$ とし、v 軸上で正の方向の単位ベクトルを $f_2 = \langle c, d\rangle$ としよう。これらも基底をなす。

$$\langle x, y\rangle = u\langle a, b\rangle + v\langle c, d\rangle \qquad (*)$$

と一意に表現したとき、$\langle u, v\rangle$ が、x-y 座標平面上の点 $\langle x, y\rangle$ を、座標系を変換して u-v 座標平面で表現したものである。(*) の式は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = u\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad (**)$$

と表現できる。

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるから、基底 $\{e_1, e_2\}$ によって $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ と表現される $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換 A は、e_1 を f_1 に、e_2 を f_2 に移す。即ち、

$$Ae_1 = f_1, \quad Ae_2 = f_2$$

を満たす。f_1 を e_1 に、f_2 を e_2 に移す変換、A の逆変換は $\langle x, y\rangle$ を $\langle u, v\rangle$ に移す。(**) より

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

なので、A の逆変換を基底 $\{e_1, e_2\}$ によって表現すると $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1}$ とならなければならない。これは、$\mathbb{R}^2$ の点 $\langle x, y\rangle$ を基底 $\{f_1, f_2\}$ によって表現したら

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

と表現されることを意味している。

$\mathbb{R}^2$ の線形変換 B が、基底 $\{e_1, e_2\}$ によって表現したら $\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}$ であるとしよう。基底 $\{e_1, e_2\}$ によって $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ で表現される点は、線形変換 B によって

$$\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

で表現される点に移される。これは基底 $\{e_1, e_2\}$ による表現であるから、基底 $\{f_1, f_2\}$ による表現にすると

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

で表現される。ここで、$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は基底 $\{e_1, e_2\}$ による表現であるから、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

の関係を用いて置き換えて得られる

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

が、基底 $\{f_1, f_2\}$ により

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

で表現される点が移される先を、やはり基底 $\{f_1, f_2\}$ で表現したものである。即ち、線形変換 B は基底 $\{f_1, f_2\}$ によって

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

と表現される。この行列は、線形変換 $A^{-1}BA$ を基底 $\{e_1, e_2\}$ によって表現したものでもある。

V を有限次元線形空間とし、。$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ および $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を V の基底とする。$x \in V$ の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ による表現、および基底 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ による表現をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

としよう。また、$f_1, f_2, \ldots, f_n$ をそれぞれ基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ により表現したものを

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

とする。このとき

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= u_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + u_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。従って

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

である。ここで、各 e_i を f_i に対応する線形写像を A とすれば、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

は、A の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ による表現であり、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

は、A^{-1} の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ による表現である。また、V 上の線形変換 B が、基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ により

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

と表現されるならば、B を基底 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ により表現すると

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

である。またこれは、$A^{-1}BA$ の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ による表現でもある。

12　線形微分方程式

システムの状態が、線形空間のベクトルで表されるようなモデルは、世の中に沢山ある。1 個の質点の 1 次元運動の場合、システムの状態とは位置 q と運動量 p(＝質量×速度) と考えられる。即ち、システムの状態は

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \langle q, p \rangle \;\middle|\; q, p \in \mathbb{R} \right\}$$

のベクトルで表される。

3 次元空間を運動する n 個の質点からなるシステムの場合、k 番目の質点の位置を $\left\langle q_x^{(k)}, q_y^{(k)}, q_z^{(k)} \right\rangle$ で表し、位置を $\left\langle p_x^{(k)}, p_y^{(k)}, p_z^{(k)} \right\rangle$ で表すことにすれば、

$$V^{(k)} = \left\{ \left\langle q_x^{(k)}, q_y^{(k)}, q_z^{(k)}, p_x^{(k)}, p_y^{(k)}, p_z^{(k)} \right\rangle \;\middle|\; q_x^{(k)}, q_y^{(k)}, q_z^{(k)}, p_x^{(k)}, p_y^{(k)}, p_z^{(k)} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^6$$

が、k 番目の粒子の状態を表す空間で

$$V = V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \cdots \oplus V^{(n)} = \mathbb{R}^{6n}$$

が、システム全体の状態を表す空間となる。

以下では、$V = \mathbb{R}^n$ として話を進める。システムの状態 v は時間とともに変化すると考える。時刻 t におけるシステムの状態を $v(t)$ とすると、v は $v : \mathbb{R} \to V$ という関数と考えられる。$v(t)$ は時間と伴に連続的に変化し、Δt の絶対値が十分小さいとき

$$v(t + \Delta t) = v(t) + f(v(t)) \cdot \Delta t$$

が成立するシステムを考える。ここで、$f : V \to V$ とする。即ち、システムの微小時間 Δt 後の変化率は、現在のシステムの状態によってのみ決まるとする。このようなシステムを自律系とか自励系とよぶ。外部から何の作用も加わっていないシステムである。このようなシステムは微分方程式

$$\frac{d}{dt} v(t) = f(v(t))$$

を満たす。f が線形写像であるとき、このよなシステムは線形システムであると言い、そうでない場合は非線形システムであるという。ここでは線形システムに限って話を進めていく。即ち、

$$\frac{d}{dt} v(t) = A v(t)$$

と書ける微分方程式を考える。

$$v(t) = \langle v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t) \rangle$$

とすると、V の基底

$$e_1 = \langle 1, 0, \ldots, 0 \rangle, e_2 = \langle 0, 1, \ldots, 0 \rangle, \ldots, e_n = \langle 0, 0, \ldots, 1 \rangle$$

によって

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}$$

と表現される。また、線形写像 A は

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

と表現され、微分方程式は

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}$$

と書ける。

$$\frac{d}{dt}v(t) = \left\langle \frac{d}{dt}v_1(t), \frac{d}{dt}v_2(t), \ldots, \frac{d}{dt}v_n(t) \right\rangle$$

であったから、

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}v_1(t) \\ \frac{d}{dt}v_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}v_n(t) \end{bmatrix}$$

と表現される。

例えば A の表現行列が対角行列になる場合、

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}v_1(t) \\ \frac{d}{dt}v_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}v_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}$$

は、簡単に解くことができる。連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v_1(t) = a_{11} \cdot v_1(t) \\ \frac{d}{dt}v_2(t) = a_{22} \cdot v_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}v_n(t) = a_{nn} \cdot v_n(t) \end{cases}$$

を解けばよい。これは

$$\begin{cases} v_1(t) = C_1 \cdot e^{a_{11} \cdot t} \\ v_2(t) = C_2 \cdot e^{a_{22} \cdot t} \\ \vdots \\ v_n(t) = C_n \cdot e^{a_{nn} \cdot t} \end{cases}$$

と解ける。ここで、C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は積分定数で、v の初期値から決まる。即ち

$$\begin{cases} v_1(0) = C_1 \\ v_2(0) = C_2 \\ \vdots \\ v_n(0) = C_n \end{cases}$$

である。或いは

$$v(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

とも表現できる。ベクトル

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

は、システムの時刻 0 における状態である。$v(t)$ は

$$v(t) = \begin{bmatrix} e^{a_{11} \cdot t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22} \cdot t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn} \cdot t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

と表現される。

もう一つ、行列 A が特別な場合として解きやすい形は、

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} v_1(t) \\ \frac{d}{dt} v_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} v_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}$$

の形をしている場合である。この場合は、連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v_1(t) = v_2(t) \\ \frac{d}{dt} v_2(t) = v_3(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} v_{n-1}(t) = v_n(t) \\ \frac{d}{dt} v_n(t) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。これは、まず

$$\frac{d}{dt}v_n(t) = 0$$

より、

$$v_n(t) = D_n$$

を得、次に

$$\frac{d}{dt}v_{n-1}(t) = v_n(t) = D_n$$

より

$$v_{n-1}(t) = D_n \cdot t + D_{n-1}$$

を得、さらに

$$v_{n-2}(t) = \frac{1}{2}D_n \cdot t^2 + D_{n-1} \cdot t + D_{n-2}$$

のように順次解を得て、最終的に

$$v_1(t) = \frac{D_n}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} + \frac{D_{n-1}}{(n-2)!} \cdot t^{n-2} + \frac{D_2}{1!} \cdot t + \frac{D_1}{0!}$$

までを得る。従って、

$$v(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{n-2}/(n-2)! & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \cdots & t^{n-3}/(n-3)! & t^{n-2}/(n-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}$$

を得る。特に、

$$v(0) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

である。

　与えられたシステムが上のような簡単な形の行列表現を持つ微分方程式で記述されることは、まれである。行列表現は、基底をどう定めるかによる。微分方程式

$$\frac{d}{dt}v(t) = Av(t)$$

において、A は必ずしも簡単な形をしていなくても良い。ある逆行列を持つ行列 B によって

$$B^{-1}AB$$

が簡単な形の行列になるとしよう。与えられた微分方程式の両辺の B^{-1} を掛けると

$$B^{-1}\frac{d}{dt}v(t) = B^{-1}Av(t)$$

となる。ここで、

$$B^{-1}\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}B^{-1}v(t)$$

であり、また BB^{-1} は単位行列であるから

$$v(t) = BB^{-1}v(t)$$

なので、

$$\frac{d}{dt}B^{-1}v(t) = B^{-1}ABB^{-1}v(t)$$

を得る。ここで

$$B^{-1}v(t) = u(t), \quad B^{-1}AB = C$$

とすれば

$$\frac{d}{dt}u(t) = Cu(t)$$

と書ける。これから $u(t)$ が得られれば

$$v(t) = Bu(t)$$

とおいて、最初に与えられた微分方程式の解 $v(t)$ が得られる。

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

とする。

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

として、

$$x = By$$

の関係にあるとき

$$\begin{aligned} x &= By \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \\ &= y_1 \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + y_n \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なので、基底

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

によって

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

で表現されるベクトルを基底

$$f_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad f_n = \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix}$$

により表現すると

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

となる。従って、

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

は、$v(t)$ のこの基底による表現と考えられる。また、

$$C = B^{-1}AB$$

ということは

$$C \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = B^{-1}AB \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = B^{-1}A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

なので、線形写像 A の基底 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ による表現である。

13　固有値と固有ベクトル

この節では、$n \times n$ の行列 A がどのような場合に、ある行列 G に対して

$$G^{-1}AG = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となるかを考える。このとき、A は対角化可能であるという。A が対角化可能であるとき、線形微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

をどのように解けばよいかは、次節以降で考える。

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \ldots,\ e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、

$$G^{-1}AGe_1 = \lambda_1 e_1,\ G^{-1}AGe_2 = \lambda_2 e_2,\ \ldots,\ G^{-1}AGe_n = \lambda_n e_n$$

であるので

$$AGe_1 = \lambda_1 Ge_1,\ AGe_2 = \lambda_2 Ge_2,\ \ldots,\ AGe_n = \lambda_n Ge_n$$

が言える。即ち、$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が A の固有値であり、$Ge_1, Ge_2, \ldots, Ge_n$ がそれに対応する固有ベクトルでなければならない。即ち、A が対角化可能で、対角要素に $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が並ぶならば、これらがすべて A の固有値であることは必要条件である。

しかしこれは十分条件ではない。このことは後で見ることにして、まず A が与えられたとき A の固有値を求める方法について考えていこう。$x \neq 0$ として

$$Ax = \lambda x$$

を満たすとする。即ち、λ が A の固有値であり、それに対応する固有ベクトルが x であるとする。このとき

$$(A - \lambda I)x = 0$$

である。ここで、I は単位行列である。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

とすれば

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

の意味である。この行列は決して逆行列を持たない。何故ならば、もし $A-\lambda I$ が逆行列 $(A-\lambda I)^{-1}$ を持つならば、

$$(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)\,x=Ix=x$$

でなければならないが、

$$(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)\,x=(A-\lambda I)^{-1}0=0$$

であり、$x\neq 0$ に反するからである。$A-\lambda I$ が逆行列を持たないための必要十分条件は、$A-\lambda I$ の行列式が 0、即ち

$$\det(A-\lambda I)=0$$

であることである。この式は λ に関する n 次方程式であり、A の固有方程式 (または特性方程式) と呼ばれる。固有方程式は代数学の基本定理により、

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}=0$$

と因数分解できる。ここで、$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ は相異なる複素数であり

$$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$$

を満たす。n_i を、固有方程式の解

$$\lambda=\lambda_i$$

の重複度という。

例題 1　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有方程式を求めて、その解を計算せよ。

解答例　固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

であるから

$$(1-\lambda)^2-2=0$$

即ち、

$$\lambda^2-2\lambda-1=0$$

である。これを解くと

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$$

を得る。

例題 2　行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有方程式を求めて、その解を計算せよ。

解答例　固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

であるから

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

である。これを解くと

$$\lambda = \pm 1$$

を得る。

例題 3　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有方程式を求めて、その解を計算せよ。

解答例　固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

であるから

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 0 = 0$$

即ち、

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

である。これを解くと重解

$$\lambda = 1$$

を得る。この場合、$\lambda = 1$ の重複度は 2 である。

例題 4　行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有方程式を求めて、その解を計算せよ。

解答例　固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

であるから

$$(1-\lambda)(1-\lambda)+1=0$$

即ち、

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

である。これを解くと複素数解

$$\lambda=1\pm\sqrt{-1}$$

を得る。

注意　A が $n\times n$ 行列のとき、固有方程式は n 次方程式になるから、n が 3 以上の場合、実際に解くのは困難であることが多い。特に n が 5 以上の場合、一般に解の公式が無いことが知られている。ただし、解の公式が無いということと解けないということは別問題である。解は必ず存在する。

A が有限次元実線形空間 V 上の線形写像の表現 (表現は勿論、V の基底の取り方による) であるならば、A の成分はすべて実数である。また、x が V のベクトルの表現であるならば、x の成分もすべて実数である。従って、x が零ベクトルでなく

$$Ax=\lambda x$$

を満たすならば、λ も実数でなければならない。即ち、A の固有値はもし存在するならば実数である。

A が有限次元複素線形空間 V 上の線形写像の表現 (この場合も、V の基底の取り方による) であるならば、A の成分は一般に複素数である。また、x が V のベクトルの表現であるならば、x の成分も一般に複素数である。従って、x が零ベクトルでなく

$$Ax=\lambda x$$

を満たす λ は複素数であってよい。A の固有値は一般に複素数となるが、実数は複素数の特別な場合であるから、A の固有値が実数であることもありうる。

V を有限次元実線形空間とする。直和線形空間

$$W=V\oplus V$$

上に

$$\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)(x\oplus y)\stackrel{\text{def}}{=}(\alpha x-\beta y)\oplus(\alpha y+\beta x)$$

で複素スカラー倍を定義しなおすことによって、W は複素線形空間になる。複素線形空間 W を、実線形空間 V の複素化線形空間という。V 上の線形写像 A に対して、

$$B(x\oplus y)\stackrel{\text{def}}{=}(Ax)\oplus(Ay)$$

により、W 上の線形写像 B を定義することができる。

$$\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$$

を V の基底とすると

$$\{e_1 \oplus 0, e_2 \oplus 0, \ldots, e_n \oplus 0\}$$

であるので、A の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ による行列表現と、B の基底 $\{e_1 \oplus 0, e_2 \oplus 0, \ldots, e_n \oplus 0\}$ による行列表現は同じものになることが次のようにしてわかる。A の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ による表現行列を

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

とする。$x, y \in V$ に対して、x と y の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ による表現がそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

とするならば、$x \oplus y$ の基底 $\{e_1 \oplus 0, e_2 \oplus 0, \ldots, e_n \oplus 0\}$ による表現は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix}$$

になる (ただし、$i = \sqrt{-1}$)。$(Ax) \oplus (Ay)$ を基底 $\{e_1 \oplus 0, e_2 \oplus 0, \ldots, e_n \oplus 0\}$ で表現すると

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

即ち

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix}$$

である。よって、B の基底 $\{e_1 \oplus 0, e_2 \oplus 0, \ldots, e_n \oplus 0\}$ は A の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ による表現と同じになる。

なお、実線形空間 $\mathbb{R}^n$ の複素化線形空間は複素線形空間 $\mathbb{C}^n$ とみなしてよい。$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \oplus \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$ を、$\langle x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n \rangle$ とみなせばよいからである。

話を固有値問題に戻そう。

$$|A - \lambda I| = 0$$

を満たす λ(固有方程式を満たす λ) に対して、$A-\lambda I$ は逆行列を持たない。ということは、連立方程式

$$(A-\lambda I)\,x=0$$

は必ず $x\neq 0$ を満たす解を持つ ($x=0$ はいつでも上の連立方程式の解)。その x は

$$Ax=\lambda x$$

を満たすので、λ は A の固有値であり、x はその固有値に対する固有ベクトルであることになる。

λ が A の固有値であるとする。x が固有値 λ に対する固有ベクトルであるならば、x に零でないスカラー α を掛けた αx も固有値 λ に対する固有ベクトルである。また、x_1 と x_2 がいずれも固有値 λ に対する固有ベクトルであるならば、x_1+x_2 も固有値 λ に対する固有ベクトルである。従って、固有値 λ に対する固有ベクトルの全体は、線形部分空間をなす。この線形部分空間のことを固有値 λ に対する固有空間と呼ぶ。

例題 5　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

解答例　例題 1 より固有方程式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

を解くことにより、2 つの固有値 $1-\sqrt{2}$ と $1+\sqrt{2}$ を持つ。$1-\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルを求めるには、連立方程式

$$\begin{bmatrix} 1-\left(1-\sqrt{2}\right) & 1 \\ 2 & 1-\left(1-\sqrt{2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解く。

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_1+x_2=0 \\ 2x_1+\sqrt{2}x_2=0 \end{cases}$$

より

$$x_2=-\sqrt{2}x_1$$

を得る。従って、例えば $x_1=1$ として

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

は固有ベクトルとなる。

3 に対する固有ベクトルも同様にして、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

などを得る。

例題 6　行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

解答例　例題 2 より固有方程式

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

を解くことにより、2 つの固有値 -1 と 1 を得る。-1 に対する固有ベクトルを求めるには、連立方程式

$$\begin{bmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解く。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

より

$$x_2 = -x_1$$

なので、例えば $x_1 = 1$ などとして

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

が固有ベクトルとなる。

固有値 1 に対する固有ベクトルも同様にして

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

などを得る。

例題 7　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

解答例　例題 3 より固有方程式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

を解くことにより、重複度が 2 の 1 つの固有値 1 を得る。1 に対する固有ベクトルを求めるには、連立方程式

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 1 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解く。

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

より

$$x_1 = 0$$

なので、例えば $x_2 = 1$ などとして

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が固有ベクトルとなる。

例題 8　行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

解答例　例題 4 より固有方程式

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

を解くと、2 つの複素数固有値 $1-i$ と $1+i$ を得る (i はここでは虚数単位)。$1-i$ に対する固有ベクトルを求めるには、連立方程式

$$\begin{bmatrix} 1-(1-i) & -1 \\ 1 & 1-(1-i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解く。

$$\begin{cases} ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + ix_2 = 0 \end{cases}$$

より

$$x_2 = ix_1$$

なので、例えば $x_1 = 1$ などとして

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

が固有ベクトルとなる。

$-i$ の固有ベクトルも同様にして

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

などを得る。

例題 9　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

解答例　固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

より、

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)=0$$

である。従って、3 つの実固有値 1 と 2 と -1 を持つ。このように、三角行列の場合は対角線に並んだスカラーがそのまま固有値となる。固有値 1 に対する固有ベクトルは、連立方程式

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \\ 1 & 0 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即ち

$$\begin{cases} 0=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_1-2x_3 \end{cases}$$

より、

$$x_2=-x_1,\ x_3=x_1/2$$

が求まり、例えば $x_1=2$ として

$$\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \\ x_3=1 \end{cases}$$

が 1 つの解である。よって、固有ベクトル

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が得られる。固有値 2 および -1 に対する固有ベクトルは、同じようにしても得られるが、行列 A の第 2 列、第 3 列見ると対角線との交点以外はすべて 0 なので、それぞれ

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が固有ベクトルになることがすぐわかる。

練習問題　行列 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

定理 10 行列 A が相異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ を持つならば、これらに対応する固有ベクトル $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ は線形独立である。

証明　$\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ は線形従属であると仮定する。このとき、$l<k$ が存在して、$\{e_1, e_2, \ldots, e_l\}$ は線形独立であるが $\{e_1, e_2, \ldots, e_l, e_{l+1}\}$ は線形従属とすることができる。このとき、

$$e_{l+1}=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_le_l$$

と書ける。

$$
\begin{aligned}
0 &= (A-\lambda_{l+1}I)\,e_{l+1} \\
&= (A-\lambda_{l+1}I)\,(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_le_l) \\
&= \lambda_1a_1e_1+\lambda_2a_2e_2+\cdots+\lambda_la_le_l-\lambda_{l+1}a_1e_1-\lambda_{l+1}a_2e_2-\cdots-\lambda_{l+1}a_le_l \\
&= a_1(\lambda_1-\lambda_{l+1})\,e_1+a_2(\lambda_2-\lambda_{l+1})\,e_2+\cdots+a_l(\lambda_l-\lambda_{l+1})\,e_l
\end{aligned}
$$

であるので、$\{e_1,e_2,\ldots,e_l\}$ の線形独立性から

$$a_1(\lambda_1-\lambda_{l+1})=a_2(\lambda_2-\lambda_{l+1})=\cdots=a_l(\lambda_1-\lambda_{l+1})=0$$

でなければならない。従って、固有値は相異なることから

$$a_1=a_2=\cdots=a_l=0$$

でなければならず、$e_{l+1}=0$ となってしまう。これは固有ベクトルであることに反する (固有ベクトルは零ベクトルではない)。よって、$\{e_1,e_2,\ldots,e_k\}$ が線形独立であることが証明された。

14 行列の対角化

定理 11 $n\times n$ 行列 A の固有方程式が重解を持たないならば、正則行列 G が存在して、$G^{-1}AG$ は対角行列になる。このとき、この対角要素には固有方程式の相異なる n 個の解が並ぶ。

証明 A の前節の固有方程式の相異なる n 個を $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ として、それに対応する固有ベクトルをそれぞれ $e_1,e_2,\ldots,e_n$ とする。最後の定理から、$\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ は基底をなす。

$$Ae_1=\lambda_1e_1,\ Ae_2=\lambda_2e_2,\ \ldots,\ Ae_n=\lambda_ne_n$$

なので、A の基底 $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ による行列表現は

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる。

$$e_1=\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{n1} \end{bmatrix},\quad e_2=\begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{n2} \end{bmatrix},\quad \ldots,\quad e_n=\begin{bmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \vdots \\ e_{nn} \end{bmatrix}$$

とすれば、

$$A\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{n1} \end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{n1} \end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{n2} \end{bmatrix}=\lambda_2\begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{n2} \end{bmatrix},\quad \ldots,\quad A\begin{bmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \vdots \\ e_{nn} \end{bmatrix}=\lambda_n\begin{bmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \vdots \\ e_{nn} \end{bmatrix}$$

なので、これらをまとめて

$$A\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

と書ける。従って、

$$G = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix}$$

とおくと、G は正則行列 (逆行列を持つという意味) であり

$$AG = G\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

であり、両辺に左から G^{-1} をかけて

$$G^{-1}AG = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

を得る。

例題 1　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ を対角化せよ。

解答例　前節の例題 1 および例題 5 より、行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ は、2 つの固有値 $1-\sqrt{2}$ と $1+\sqrt{2}$ を持ち、これらに対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

であった。従って、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ の逆行列は

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

であるので、

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

例題 2　行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を対角化せよ。

解答例　前節の例題 2 および例題 6 より行列 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ は、2 つの固有値 -1 と 1 を持ち、これらの固有値に対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であった。従って、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列は

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であるので、

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例題 3　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ を対角化せよ。

解答例　前節の例題 3 および例題 7 より行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は、重複度が 2 の 1 つの固有値 1 をもつ。この行列は対角化不能である。この行列が対角化可能であると仮定する。即ち、

$$G^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

となる G が存在する。ここで λ_1 と λ_2 は固有値でなければならなかったので、$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ である。従って、

$$G^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、これに左から G を掛けて右から G^{-1} を掛けると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり矛盾である。

対角行列 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

であるので

$$(a-\lambda)^2 = 0$$

で、重解 $\lambda = a$ を持つ。また、G を任意の 2×2 正則行列とするならば

$$G^{-1} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

である。従って、2×2 行列が重解を持つ場合は、いかなる行列表現も対角行列であるか、それともいかなる表現行列も対角行列でないかのいずれかである。

例題 4　行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ を対角化せよ。

解答例　前節の例題 4 および例題 8 より、行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は、2 つの複素数固有値 $1-i$ と $1+i$ を持ち、それらに対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

である。従って、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$ の逆行列は

$$\frac{1}{-2i} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

であるので、

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

例題 5　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ を対角化せよ。

解答例　前節の例題 9 より、行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ は、相異なる 3 つの固有値 $1, 2, -1$ を持ち、これらに対応する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。従って、

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列は

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であるので、

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

練習問題　行列 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ を対角化せよ。

15　対角化可能な行列を係数行列に持つ同次線形微分方程式

例題 1　連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} v_1(t) = v_1(t) + 2v_2(t) \\ \dfrac{d}{dt} v_2(t) = 2v_1(t) + v_2(t) \end{cases}$$

を、初期値 $v_1(0) = v_2(0) = 1$ の場合について解け。

解答例　与えられた連立微分方程式を

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

と書き直す。前節の例題 1 より、行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ は

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

と対角化できる。

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

とおくと、与えられた微分方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となり、これは

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u_1(t) = \left(1-\sqrt{2}\right) u_1(t) \\ \dfrac{d}{dt}u_2(t) = \left(1+\sqrt{2}\right) u_2(t) \end{cases}$$

という独立な 2 つの線形分離形の微分方程式なので

$$\begin{cases} u_1(t) = C_1 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)t} \\ u_2(t) = C_2 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)t} \end{cases}$$

と解ける。ここで、C_1, C_2 はスカラーで、例えば初期値 $u_1(0), u_2(0)$ によって決まる。これを

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)t} \\ C_2 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)t} \end{bmatrix}$$

と書き直して、一方

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)t} \\ C_2 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)t} + C_2 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)t} \\ -\sqrt{2}C_1 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)t} + \sqrt{2}C_2 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

即ち、

$$\begin{cases} v_1(t) = C_1 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)t} + C_2 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)t} \\ v_2(t) = -\sqrt{2}C_1 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)t} + \sqrt{2}C_2 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)t} \end{cases}$$

となる。初期値 $v_1(0), v_2(0)$ が与えられていると、C_1, C_2 は次のように定まる。

$$\begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 \\ -\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 \end{bmatrix}$$

この問題では $v_1(0) = v_2(0) = 1$ であったから、連立方程式

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 = 1 \end{cases}$$

を C_1, C_2 について解いて、

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ C_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

を得る。

練習問題　線形微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_1(t) = v_2(t) \\ \dfrac{d}{dt}v_2(t) = v_1(t) \end{cases}$$

を、初期値 $v_1(0) = 1, v_2(0) = 2$ として解け。

練習問題　連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_1(t) = v_1(t) \\ \dfrac{d}{dt}v_2(t) = v_1(t) + 2v_2(t) \\ \dfrac{d}{dt}v_3(t) = v_1(t) - v_3(t) \end{cases}$$

を、初期値 $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 1$ の場合について解け。

例題 2　連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_1(t) = v_1(t) - v_2(t) \\ \dfrac{d}{dt}v_2(t) = v_1(t) + v_2(t) \end{cases}$$

を、初期値 $v_1(0) = v_2(0) = 2$ の場合について解け。

解答例　与えられた連立微分方程式を

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

と書き直す。前節の例題 4 より、行列 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は、

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$$

と対角化できる。例題 1 と同様に考えて (虚数単位 i はそのまま文字定数と考えて)

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{(1-i)t} \\ C_2 e^{(1+i)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{(1-i)t} + C_2 e^{(1+i)t} \\ iC_1 e^{(1-i)t} - iC_2 e^{(1+i)t} \end{bmatrix}$$

ここで、初期条件より

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 \\ iC_1 - iC_2 \end{bmatrix}$$

であり、これを解くと

$$\begin{cases} C_1 = 1 - i \\ C_2 = 1 + i \end{cases}$$

であるので、

$$\begin{cases} v_1(t) = (1-i)e^{(1-i)t} + (1+i)e^{(1+i)t} \\ v_2(t) = i(1-i)e^{(1-i)t} - i(1+i)e^{(1+i)t} \end{cases}$$

を得る。ここで、任意の実数 a, b に対して $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$ が成立することを用いて、

$$\begin{aligned} v_1(t) &= (1-i)e^t(\cos t - i \sin t) + (1+i)e^t(\cos t + i \sin t) \\ &= 2e(\cos t - \sin t) \\ v_2(t) &= (1+i)e^{(1-i)t} + (1-i)e^{(1+i)t} \\ &= (1+i)e^t(\cos t - i \sin t) + (1-i)e^t(\cos t + i \sin t) \\ &= 2e^t(\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

練習問題　連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} v_1(t) = v_1(t) \\ \dfrac{d}{dt} v_2(t) = 2v_2(t) - 3v_3(t) \\ \dfrac{d}{dt} v_3(t) = v_1(t) + 3v_2(t) + 2v_3(t) \end{cases}$$

を、初期値 $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 1$ の場合について解け。

16　内積を持つ有限次元線形空間

V を内積を持つ有限次元複素線形空間とする。V の次元を n とする。グラム・シュミットの直交化法 (線形代数の教科書を見よ) と呼ばれる方法で、V には

$$\left\langle e_i \mid e_j \right\rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たす基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ が必ず存在する (一意ではない)。ここで、δ_{ij} はクロネッカーのデルタと呼ばれるもので、

$$\delta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ 1, & \text{if } i = j \end{cases}$$

によって定義される。このような基底を V の正規直交基底と呼ぶ。即ち、正規直交基底とはすべてノルムが 1 のベクトルの集まりで、互いに直交していて、V 全体を張る。

任意の $x \in V$ は

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

と表現できる。このとき、

$$\left\langle e_i \mid x \right\rangle = \left\langle e_i \mid a_i e_i \right\rangle = a_i$$

なので、

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i \mid x \right\rangle e_i$$

と表現できる。これを、x のフーリエ展開と呼び、$\left\langle e_i \mid x \right\rangle$ をフーリエ係数と呼ぶ。簡単な計算から、任意の $x, y \in V$ に対して

$$\left\langle y \mid x \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle y \mid e_i \right\rangle \left\langle e_i \mid x \right\rangle$$

も言える。この式をパーセバルの等式という。この式の特別な場合として ($x = y$ と考えて)

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle e_i \mid x \right\rangle \right|^2$$

が言える。この式をリース・フィッシャーの等式という。

$f : V \to \mathbb{C}$ を線形写像とするとき (f を線形汎関数という言い方をする)、

$$y = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(e_i)} e_i$$

とおくと、任意の $x \in V$ に対して

$$\begin{aligned} \left\langle y \mid x \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle y \mid e_i \right\rangle \left\langle e_i \mid x \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \left\langle e_i \mid x \right\rangle \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i \mid x \right\rangle e_i \right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

を満たす。これをリースの表現定理という。

$A : V \to V$ を線形写像とする (A を線形作用素という言い方をする)。

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

と定義して、これを線形作用素 A の作用素ノルムとか一様ノルムと呼ぶ。実際、V が有限次元線形空間ならば必ず $\|A\|$ は有限の値をとり、しかも次の条件を満たす。

(1) 任意の線形作用素 $\|A\|$ に対して $\|A\| \geq 0$ であり、等号が成立する必要十分条件は A が零作用素 (すべてのベクトルを零ベクトルに写す) の場合である。

(2) 任意の線形作用素 $\|A\|$ および任意のスカラー α に対して、$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ を満たす。

(3) 任意の線形作用素 $\|A\|$ および $\|B\|$ に対して、$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ を満たす。

(4) 任意の線形作用素 $\|A\|$ および $x \in V$ に対して、$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ を満たす。

(5) 任意の線形作用素 $\|A\|$ および $\|B\|$ に対して、$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ を満たす。

V が有限次元線形空間ならば必ず $\|A\|$ は有限の値をとることを示すには、距離空間 (または位相空間) に関する知識が少し必要となる。その他の (1)〜(3) については、作用素ノルムの定義から殆ど自明のことである。(4) と (5) について証明しておこう。(4) は、$x = 0$ のときは $Ax = 0$ なので明らか。$x \neq 0$ とする。このとき、

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

なので、

$$\left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|A\|$$

であり、両辺に正の数 $\|x\|$ を掛ければ望みの不等式を得る。(5) は、$\|x\| \leq 1$ を満たすベクトルに対して、(4) を 2 回用いて

$$\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

から直ちに得られる。

任意の線形作用素 A に対して、A の共役作用素とよばれる線形作用素 A^* が必ず存在する。共役作用素 A^* は、任意の $x, y \in v$ に対して

$$\langle y \mid Ax \rangle = \langle A^* y \mid x \rangle$$

を満たす。正規直交基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ に関する作用素 A が

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

と表現されたとする。このとき

$$Ae_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

であるので

$$a_{ij} = \langle e_i \mid Ae_j \rangle \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たす。

$$\begin{aligned} \overline{a_{ij}} &= \overline{\langle e_i \mid Ae_j \rangle} \\ &= \langle Ae_j \mid e_i \rangle \\ &= \langle e_i \mid A^* e_j \rangle \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

であるので、A^* の表現は

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

となる (共役転置行列)。

共役作用素をとる * 演算子には以下の性質がある。

(1) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

(2) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

(3) $(AB)^* = B^* A^*$.

(4) $\|A^*\| = \|A\|$.

線形作用素 U が

$$U^* U = U U^* = I$$

を満たすとき、U はユニタリ作用素またはユニタリ変換であるいう。U がユニタリ作用素であるための必要十分条件は、任意の $x, y \in V$ に対して

$$\langle Uy \mid Ux \rangle = \langle y \mid x \rangle$$

を満たすことである。ユニタリ作用素によって引き起こされる変換では、ベクトルの長さ (ノルム) もベクトルとベクトルのなす角度 (内積) も変えない。従って、正規直交基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ に対して、$\{Ue_1, Ue_2, \ldots, Ue_n\}$ も正規直交基底となる。ユニタリ作用素をある正規直交基底で表現した行列のことを、ユニタリ行列という。ユニタリ行列の第 j 列を取りだして列ベクトルは、Ue_j の正規直交基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ による表現に他ならない。λ がユニタリ作用素の固有値であるとき、$|\lambda| = 1$ であることを示そう。x を U の固有値 λ に対する固有ベクトルであるとする。$\|x\| = 1$ としてよい。このとき

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= |\lambda|^2 \cdot \|x\|^2 \\ &= \langle \lambda x \mid \lambda x \rangle \\ &= \langle Ux \mid Ux \rangle \\ &= \langle U^* U x \mid x \rangle \\ &= \langle x \mid x \rangle \\ &= \|x\|^2 = 1 \end{aligned}$$

により示される。

線形作用素 A が

$$A^* = A$$

を満たすとき、A はエルミート作用素であるという。λ がエルミート作用素の固有値であるとき、λ が実数であることを示そう。x を A の固有値 λ に対する固有ベクトルであるとする。$\|x\| = 1$ としてよい。このとき

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda \cdot \|x\|^2 \\
&= \lambda \left\langle x \;\middle|\; x \right\rangle \\
&= \left\langle x \;\middle|\; \lambda x \right\rangle \\
&= \left\langle x \;\middle|\; Ax \right\rangle \\
&= \left\langle A^* x \;\middle|\; x \right\rangle \\
&= \left\langle Ax \;\middle|\; x \right\rangle \\
&= \left\langle \lambda x \;\middle|\; x \right\rangle \\
&= \overline{\lambda} \left\langle x \;\middle|\; x \right\rangle \\
&= \overline{\lambda} \cdot \|x\|^2 \\
&= \overline{\lambda}
\end{aligned}$$

により示される。

作用素 A が

$$A^* A = A A^*$$

を満たすとき、A は正規作用素であるという。ユニタリ作用素、エルミート作用素はいずれも正規作用素である。A が正規作用素であるとき、ある正規直交基底が存在して、A を対角行列として表現することができることが知られている。このことは、A を任意の正規直交基底によって表現した行列は必ず対角化可能であり、しかも

$$A = G^{-1} \Delta G \qquad (\Delta \text{ は対角行列})$$

と表現したとき、G はユニタリ行列であるということを言っている。特に、A がユニタリ行列ならば Δ の対角線には絶対値が 1 の複素数が並び、また A がエルミート行列の場合は Δ の対角線には絶対値が 1 の複素数が並ぶ。

任意のスカラー $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ に対して

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k$$

という多項式を考える。任意の作用素 A に対して

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_k A^k$$

と定義すると、$f(A)$ は線形作用素となる。特に、

$$A = G^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} G$$

と対角化可能であるならば、

$$f(A) = G^{-1}\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} G$$

である。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} +$$

とマクローリン展開できる。上と同様にして、作用素 A に対して

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} +$$

と定義したい。ここで、問題が生ずる。e^x のマクローリン展開を有限でうち切った

$$f_k(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{k^2}{k!}$$

に対しては、$f_k(A)$ は確かに定義できる。いま、$k < l$ とする。このとき、

$$\|f_l(A) - f_k(A)\| = \left\| \sum_{j=l+1}^{k} \frac{A^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=l+1}^{k} \frac{\|A\|^j}{j!} \to 0 \qquad (k, l \to \infty)$$

が言えるので、ある線形作用素 B が存在して

$$\|B - f_k(A)\| \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

が言える (完備性と呼ばれる性質)。この B のことを、e^A で表すことにする。

$$C = G^{-1}AG$$

であるとき、

$$\begin{aligned} f_k(C) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{(G^{-1}AG)^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{G^{-1}A^jG}{j!} \\ &= G^{-1}\sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!}G \\ &= G^{-1}f_k(A)G \end{aligned}$$

が言えるので、

$$\begin{aligned} \left\|e^C - G^{-1}e^AG\right\| &= \left\|e^C - f_k(C) + G^{-1}f_k(A)G - G^{-1}e^AG\right\| \\ &\leq \left\|e^C - f_k(C)\right\| + \left\|G^{-1}f_k(A)G - G^{-1}e^AG\right\| \\ &= \left\|e^C - f_k(C)\right\| + \left\|G^{-1}\left(f_k(A) - e^A\right)G\right\| \\ &\leq \left\|e^C - f_k(C)\right\| + \left\|G^{-1}\right\| \cdot \left\|f_k(A) - e^A\right\| \cdot \|G\| \\ &\to 0 \qquad (k \to \infty) \end{aligned}$$

であり、

$$e^C = G^{-1}e^A G$$

が示される。

指数法則

$$e^{A_1+A_2} = e^{A_1}\cdot e^{A_2}$$

は一般に成立しないが、A_1 と A_2 が可換、即ち

$$A_1A_2 = A_2A_1$$

を満たす場合は成立する。これを示すには

$$\|f_k(A_1+A_2) - f_k(A_1)f_k(A_2)\| \to 0 \qquad (k\to\infty)$$

を示せばよい。この証明の過程で式を展開して交換法則を用いるために、可換性が必要となる。これは各自確かめよ。また、容易に

$$e^O = I$$

がわかる。ここで、O は零作用素 (零行列)、I は恒等作用素 (単位行列) である。

次に、t, h を実数として

$$\left\| Ae^{tA} - \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \right\| \to 0 \qquad (h\to 0)$$

が成立することを証明しよう。

$$\begin{aligned}
\left\| Ae^{tA} - \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \right\| &= \left\| \left(A - \frac{e^{hA} - I}{h} \right) e^{tA} \right\| \\
&= \left\| A - \frac{e^{hA} - I}{h} \right\| \cdot \left\| e^{tA} \right\|
\end{aligned}$$

であるので、$t=0$ の場合、即ち

$$\left\| A - \frac{e^{hA} - I}{h} \right\| \to 0 \qquad (h\to 0)$$

を示せば十分。これは

$$\begin{aligned}
\left\| A - \frac{e^{hA} - I}{h} \right\| &= \left\| \frac{1}{h}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(hA)^j}{j!} \right\| \\
&\le \frac{1}{h}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\|hA\|^j}{j!} \\
&= \frac{e^{\|hA\|} - 1}{h} - \|A\| \\
&\to 0 \qquad (h\to 0)
\end{aligned}$$

によって示される。

任意の $x \in V$ に対して、

$$\begin{aligned} \left\| Ae^{tA}x_0 - \frac{e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0}{h} \right\| &\leq \left\| Ae^{tA} - \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \right\| \cdot \|x_0\| \\ &\to 0 \qquad (h \to 0) \end{aligned}$$

が言えるので、

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{tA}x_0$$

とおけば、微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \qquad (*)$$

を満たす。

A が対角化可能、即ち正則行列 G と対角行列 Δ によって

$$A = G^{-1}\Delta G$$

と表現されていれば、

$$e^{tA} = G^{-1}e^{t\Delta}G$$

であり、

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ならば

$$e^{\Delta} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

である。これは、前節までに我々が解い (*) の解と一致している。重要なことは、A が対角可能でない場合も、(*) の解は $e^{tA}x_0$ と表現できるということである。従って、対角可能でない場合は、e^{tA} をどう求めるかという問題に帰着される。

17　行列の基本分解

V を有限次元線形空間とし、$\{e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n\}$ を基底とする。V の次元は $m+n$ である。$\{e_1, \ldots, e_m\}$ が生成する線形部分空間を V_1 とし、$\{f_1, \ldots, f_n\}$ が生成する線形部分空間を V_2 とすると

$$V = V_1 \oplus V_2$$

と表現できる。線形写像 $B : V_1 \to V_1$ と $C : V_2 \to V_2$ を考える。任意の $x \in V$ は、ある $x_1 \in V_1$ と $x_2 \in V_2$ によって

$$x = x_1 + x_2$$

と一意に分解できるので、$A : V \to V$ を

$$Ax \stackrel{\text{def}}{=} Bx_1 + Cx_2$$

によって定義することができる。線形写像 B の基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ による表現を

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

として、線形写像 C の基底 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ による表現を

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

とする。このとき、線形写像 A の基底 $\{e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_n\}$ による表現は

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} & & & & \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} & & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} & & & & \\ & & & & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ & & 0 & & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

となる。線形写像 A を $B \oplus C$ と表すことにする。同様にして

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots V_k$$

と分解でき、$A_j : V_j \to V_j \quad (j = 1, \ldots, k)$ が与えられたとき、線形写像

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k : V \to V$$

が定義される。

線形写像 A の固有値 λ_j に対して

$$V_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Kernel}(A - \lambda_j I)$$

と定義して、これを固有値 λ_j の固有空間とよぶ。固有値 λ_j の固有空間の零ベクトル以外のベクトルはすべて、固有値 λ_j の固有値である。A の固有方程式が

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_k)$$

で相異なる k 個の解 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を持つならば、これらの固有値に対応する固有空間の次元は 1 であり

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

かつ

$$A = \lambda_1 I \oplus \lambda_2 I \oplus \cdots \oplus \lambda_k I$$

と表現できた (対角化可能)。

線形写像 A の固有方程式が重解を持つ場合、即ち

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

の形をしている場合を考える。n_j を固有値 λ_j の重複度と呼ぶ。この場合、

$$V_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Kernel}(A - \lambda_j I)^{n_j}$$

と定義して、これを固有値 λ_j の一般化固有空間とよぶ。このとき、V_j の次元は n_j であり

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$$

であることが知られている。これを基本定理と呼ぶことにする。基本定理からすぐわかることは、

$$f(A) = O$$

であり、これをケーリー・ハミルトンの定理と呼ぶ。基本定理を認めてしまえば、ケーリー・ハミルトンの定理を証明することは易しい。任意の $x_j \in V_j$ に対して

$$(A - \lambda_j I)^{n_j} x_j = 0$$

なので

$$f(A) x_j = 0$$

が言えることは明らか。基本定理から

$$x = x_1 + \cdots + x_k$$

と表現できるので

$$f(A)x = f(A)x_1 + \cdots + f(A)x_k = 0$$

となり、$f(A) = O$ が示される。基本定理の証明は、例えばスメール・ハッシュ「力学系入門」(岩波書店) などを参照せよ。

われわれの第一目標は

$$A = \lambda_1 I \oplus \lambda_2 I \oplus \cdots \oplus \lambda_k I$$

に代わる A の分解であり、最終目標はその分解によって e^{tA} を簡単に計算することである。固有空間 V_j を求めるには、連立方程式

$$(A - \lambda_j I)^{n_j} x = 0$$

を解く。基本定理から、この連立方程式の解空間は V_j であり、この空間から線形独立が n_j 個のベクトルを選ぶことができる。

線形写像 $N_j : V_j \to V_j$ を、

$$N_j x_j \stackrel{\text{def}}{=} (A - \lambda_j I) x_j \qquad (x_j \in V_j)$$

により定義する。このとき、${N_j}^{n_j} = O$ である。また、$S_j \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_j I$ とおくと、明らかに $N_j S_j = S_j N_j$ であり、任意の $x_j \in V_j$ に対して

$$(S_j + N_j) x_j = A x_j$$

を満たす。従って、$t \in \mathbb{R}$ に対して

$$e^{tA} x_j = e^{tS_j + tN_j} x_j = e^{tS_j} e^{tN_j} x_j = e^{t\lambda_j} \sum_{s=0}^{n_j - 1} \left(\frac{t^s {N_j}^s}{s!} \right) x_j$$

が無限級数を用いることなく計算できる。

例 1　2 次元線形空間 V 上の線形写像 $A : V \to V$ が、V の基底 $\{e_1, e_2\}$ によって行列表現で

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

によって表現されるとき、e^{tA} の基底 $\{e_1, e_2\}$ による行列表現を求めよ。

解答例　A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

即ち

$$(1 - \lambda)^2 = 0$$

で、A は重複度 2 の固有値 1 を持つ。固有値 1 の一般化固有空間は計算するまでもなく V 全体である。

$$N \stackrel{\text{def}}{=} A - 1I$$

とおくと、N の基底 $\{e_1, e_2\}$ による行列表現は

$$N = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

であり、$N^2 = O$ である。

$$S \stackrel{\text{def}}{=} 1I$$

とすると、$A = S + N$ であり

$$e^{tA} = e^t(I + tN)$$

となり、この行列表現は

$$e^{tA} = A = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix}$$

である。

上の例から、線形微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_1(t) = v_1(t) \\ \dfrac{d}{dt}v_2(t) = v_1(t) + v_2(t) \end{cases}$$

の解は、

$$\begin{cases} v_1(t) = v_1(0)e^t \\ v_2(t) = v_1(0)e^t + v_2(0)te^t \end{cases}$$

と表されることがわかる。

例 2　2 次元線形空間 V 上の線形写像 $A : V \to V$ が、V の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ によって行列表現で

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

によって表現されるとき、e^{tA} の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ による行列表現を求めよ。

解答例　A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即ち

$$(-1-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

で、A は重複度 2 の固有値 -1 と重複度 1 の固有値 1 を持つ。固有値 -1 の一般化固有空間を求める。

$$(A - (-1)I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

なので、

$$(A-(-1)I)^2 e_1 = (A-(-1)I)^2 e_2 = 0$$

であり、$\{e_1, e_2\}$ が張る空間が固有値 -1 の一般化固有空間である。固有値 1 の一般化固有空間は、固有値 1 の固有空間そのものなので、連立方程式

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

を解いて、例えば

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の解を得る。即ち、$2e_2 + e_3$ の生成する 1 次元空間が固有値 1 の一般化固有空間である。V の基底 $\{e_1, e_2, 2e_2 + e_3\}$ による A の表現は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。ここで

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1]$$

とおくと、e^{tA} の基底 $\{e_1, e_2, 2e_2 + e_3\}$ による表現は

$$\begin{bmatrix} e^{tB} & 0 \\ 0 & e^{tC} \end{bmatrix}$$

となるはずである。

$$N \stackrel{\text{def}}{=} B - (-1)I, \quad S = (-1)I$$

とすると、

$$e^{tB} = e^{tS} e^{tN} = e^{-t}(I + tN)$$

なので、

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

を得る。従って、e^{tA} の基底 $\{e_1, e_2, 2e_2 + e_3\}$ による表現は

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

となる。これを、基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ による表現に戻すには

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

を計算すればよく

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & -2e^{-t} + 2e^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

を得る。

上の例から、連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} v_1(t) = -v_1(t) + v_2(t) - v_3(t) \\ \dfrac{d}{dt} v_2(t) = -v_2(t) + 4v_3(t) \\ \dfrac{d}{dt} v_3(t) = -v_3(t) \end{cases}$$

の解は

$$\begin{cases} v_1(t) = v_1(0)e^{-t} + v_2(0)te^{-t} - 2v_3(0)te^{-t} \\ v_2(t) = v_2(0)e^{-t} + 2v_3(0)\left(e^{t} - e^{-t}\right) \\ v_3(t) = v_3(0)e^{t} \end{cases}$$

と解ける。

これで、

$$\frac{d}{dt} v(t) = Av(t)$$

の形の線形微分方程式は、原理的には A がいかなる行列であろうと解けることになった。実際に計算によってそれを解くには、固有方程式を解いたり連立方程式を解く作業があり、必ずしも容易に解ける訳ではない。コンピュータを用いれば、e^{tA} の無限級数を用いて

$$v(t) = e^{tA} v(0)$$

と近似的に計算できる。ただし、この場合は必ずうち切り誤差が生ずる。打ち切り誤差は A のノルムで評価できるので、この場合は予め A のノルムを評価しておく必要がある。