46ページ	章末問題2.14	解答	1/3

数学的帰納法で証明する．$n=1$とすると

$$(fg)' = f'g + fg'$$

これより$n=1$で成立する．$n=k$で成立するとする．すなわち

$$\left(fg\right)^{(k)} = f^{(k)}g + {}_k\mathrm{C}_1 f^{(k-1)}g' + \cdots + fg^{(k)}$$

$n = k + 1$のとき

$$\bigl(fg\bigr)^{(k+1)} = \{\bigl(fg\bigr)'\}^{(k)}$$

$$= (f'g + fg')^{(k)} = (f'g)^{(k)} + (fg')^{(k)}$$

$$= (f')^{(k)}g + \cdots + {}_k\mathrm{C}_m(f')^{(k-m)}g^{(m)} + \cdots + f'g^{(k)}$$

$$+ f^{(k)}g' + \cdots + {}_k\mathrm{C}_m f^{(k-m)}(g')^{(m)} + \cdots + f(g')^{(k)}$$

$$= f^{(k+1)}g + \cdots + {}_k\mathrm{C}_m f^{(k+1-m)}g^{(m)}$$
$$+ {}_k\mathrm{C}_{m-1} f^{(k-(m-1))}g^{(m)} + \cdots + fg^{(k+1)}$$
$$= f^{(k+1)}g + \cdots + {}_{k+1}\mathrm{C}_m f^{(k+1-m)}g^{(m)} + \cdots + fg^{(k+1)}$$

よって$n = k + 1$で成立する．数学的帰納法により

この公式は任意の自然数について成立する．