

83 ページ	章末問題 4.5	解答	1/4
--------	----------	----	-----

$f'(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0$ に注意して, 公式 4.1 を用いると,

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \varepsilon_n$$

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \varepsilon_n$$

したがって、 $x \neq a$ において、

$$f(x) - f(a) = (x - a)^n \left\{ \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{\varepsilon_n}{(x - a)^n} \right\}$$

いま、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varepsilon_n}{(x - a)^n} = 0$ だから、 a に十分近い $x \neq a$ において、 $f(x) - f(a)$ の符号は、 $f^{(n)}(a)(x - a)^n$ と一致する。

(a) n が偶数のとき, $(x - a)^n > 0$ であるから, $f(x) - f(a)$ の符号は, $f^{(n)}(a)$ と一致する。したがって, $f^{(n)}(a) > 0$ のとき a に十分近い $x \neq a$ において $f(x) - f(a) > 0$. よって, (1) が成り立つ。同様に, $f^{(n)}(a) < 0$ のとき (2) が成り立つ。

(b) n が奇数のとき, $f(x) - f(a)$ の符号は, $x < a$ では $f^{(n)}(a)$ と異符号, $x > a$ では $f^{(n)}(a)$ と同符号である。よって, $f(x)$ と $f(a)$ の大小関係は, $x = a$ を境に入れ替わるから, $f(x)$ は点 a で極値をとらず, (3) が成り立つ。