

まず、対応する斉次方程式 $\frac{dx}{dt} + x = 0$ を解く.

1 階線形

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int dt$$

$$\log |x| = -t + C$$

$$x = \pm e^C e^{-t} = C e^{-t} \quad (1)$$

$\pm e^C$ を改めて C とおく

次に, (1) で C を u で置き換えて微分

$$x = u e^{-t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} e^{-t} - u e^{-t}$$

もとの方程式に代入

$$\frac{du}{dt}e^{-t} = 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{du}{dt} = 2e^t$$

$$u = \int 2e^t dt = 2e^t + C$$

$$\therefore x = (2e^t + C)e^{-t} = 2 + Ce^{-t}$$

(C は任意定数)