| 104 ページ | 章末問題 5.1(6) | 解答 | 1/3 |
| --- | --- | --- | --- |

まず，斉次方程式 $(t^2+1)\dfrac{dx}{dt}+2tx=0$ を解く．

1 階線形

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\frac{2t}{t^2+1}$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt$$

右辺では，$t^2+1=s$ の置換積分を用いる

$$\log|x| = -\log|t^2+1| + C$$

$$x(t^2+1) = \pm e^C e^{-t} = Ce^{-t} \tag{1}$$

$\pm e^C$ を改めて $C$ とおく

(1) の $C$ を関数 $u$ で置き換える.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dfrac{du}{dt}(t^2+1) - 2tu}{(t^2+1)^2}$$

元の方程式に代入

$$\frac{du}{dt} = e^{-t} \qquad u = \int e^{-t}\,dt = -e^{-t} + C$$

$$\therefore \quad x = \frac{-e^{-t}+C}{t^2+1} \qquad (C\text{ は任意定数})$$