126 ページ	章末問題 6.2(4)	解答	1/7

$$
\begin{cases}
z_x & = 4xe^{-x^2-y^2} + (2x^2+y^2)(-2x)e^{-x^2-y^2} \\
 & = -2x(2x^2+y^2-2)e^{-x^2-y^2} & = 0 \\
z_y & = 2ye^{-x^2-y^2} + (2x^2+y^2)(-2y)e^{-x^2-y^2} \\
 & = -2y(2x^2+y^2-1)e^{-x^2-y^2} & = 0
\end{cases}
$$

第 2 式より $y = 0$ または $y^2 = 1 - 2x^2$. 第 1 式に $y = 0$ を代入すれば $x(2x^2 - 2) = 0$. したがって，$x = 0$ または $x = \pm 1$. また，第 1 式に $y^2 = 1 - 2x^2$ を代入すれば $x = 0$. したがって，$y = \pm 1$. 以上から，極値の必要条件を満たす点は，$(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ である。

第 2 次偏導関数を求めると，

$$\begin{aligned} z_{xx} &= -2(2x^2+y^2-2)e^{-x^2-y^2} - 2x(-4x)e^{-x^2-y^2} \\ &\qquad -2x(2x^2+y^2-2)(-2x)e^{-x^2-y^2} \\ &= 2(4x^4-10x^2+2x^2y^2-y^2+2)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

126ページ	章末問題6.2(4)	解答	4/7

$$
\begin{aligned}
z_{yy} &= -2(2x^2+y^2-1)e^{-x^2-y^2} - 2y(-2y)e^{-x^2-y^2} \\
&\qquad -2y(2x^2+y^2-1)(-2y)e^{-x^2-y^2} \\
&= 2(2y^4-5y^2+4x^2y^2-2x^2+1)e^{-x^2-y^2} \\
z_{xy} &= -4xye^{-x^2-y^2} - 2x(2x^2+y^2-2)(-2y)e^{-x^2-y^2} \\
&= 4xy(2x^2+y^2-3)e^{-x^2-y^2}
\end{aligned}
$$

(i) $(0,0)$ のとき

$z_{xx}=4,\ z_{yy}=2,\ z_{xy}=0$ より,

$$\begin{aligned} D &= 4\cdot 2-0^2=8>0 \\ z_{xx} &> 0 \end{aligned}$$

したがって，点 $(0,0)$ で極小値 0 をとる。

(ii) $(\pm 1, 0)$ のとき

$z_{xx} = -8e^{-1}$, $z_{yy} = -2e^{-1}$, $z_{xy} = 0$ より，

$$D = -8e^{-1}(-2e^{-1}) - 0^2 = 16e^{-2} > 0$$

$$z_{xx} < 0$$

したがって，点 $(\pm 1, 0)$ で極大値 $2e^{-1}$ をとる。

(iii) $(0, \pm 1)$ のとき

$z_{xx} = 2e^{-1}$, $z_{yy} = -4e^{-1}$, $z_{xy} = 0$ より，

$$D = 2e^{-1}(-4e^{-1}) - 0^2 = -8e^{-2} < 0$$

したがって，極値をとらない。