$$
\begin{aligned}
z_x &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
z_y &= \frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{xx} &= \frac{-2y(x^2+y^2)^2 - 2xy\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= -\frac{2y\{(x^2+y^2)-4x^2\}}{(x^2+y^2)^3} \\
&= -\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}
$$

126 ページ	章末問題 6.3(1)	解答	3/4

$$
\begin{aligned}
z_{yy} &= \frac{-2y(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= -\frac{2y\{(x^2+y^2)+2(x^2-y^2)\}}{(x^2+y^2)^3} \\
&= -\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}
$$

以上から，$z_{xx} = -z_{yy}$であるから，$z_{xx}+z_{yy} = 0$が得られる。