

問 6.13(2) より, $z_{rr} + r^{-2}z_{\theta\theta} + r^{-1}z_r = z_{xx} + z_{yy}$ であるから, この式の左辺が 0 であることを示せばよい。

まず, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと,

$$z = \frac{r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r^{-1} \sin \theta.$$

$$z_r = -r^{-2} \sin \theta,$$

$$z_\theta = r^{-1} \cos \theta,$$

$$z_{rr} = 2r^{-3} \sin \theta,$$

$$z_{\theta\theta} = -r^{-1} \sin \theta.$$

$$\begin{aligned}\therefore z_{rr} + r^{-2}z_{\theta\theta} + r^{-1}z_r \\ = 2r^{-3}\sin\theta - r^{-3}\sin\theta - r^{-3}\sin\theta = 0\end{aligned}$$

以上から, $z_{xx} + z_{yy} = 0$ が得られる。