126ページ	章末問題6.4	解答	1/6

合成関数の微分公式

$$\begin{cases} z_u = z_x x_u + z_y y_u \\ z_v = z_x x_v + z_y y_v \end{cases}$$

112ページ 公式 6.2

を使って, u, v についての偏導関数を x, y についての偏導関数で表す.

$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha,\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$ より

$$x_u = \cos\alpha, \quad x_v = -\sin\alpha$$

$$y_u = \sin\alpha, \quad y_v = \cos\alpha$$

これを合成関数の微分公式に代入して,

$$\begin{aligned} z_u &= z_x\cos\alpha + z_y\sin\alpha \\ z_v &= -z_x\sin\alpha + z_y\cos\alpha \end{aligned}$$

z_x, z_y も合成関数として u, v の2変数関数とみなすことができるので,

$$
\begin{aligned}
(z_x)_u &= (z_x)_x x_u + (z_x)_y y_u &= \quad z_{xx}\cos\alpha + z_{xy}\sin\alpha \\
(z_x)_v &= (z_x)_x x_v + (z_x)_y y_v &= -z_{xx}\sin\alpha + z_{xy}\cos\alpha \\
(z_y)_u &= (z_y)_x x_u + (z_y)_y y_u &= \quad z_{yx}\cos\alpha + z_{yy}\sin\alpha \\
(z_y)_v &= (z_y)_x x_v + (z_y)_y y_v &= -z_{yx}\sin\alpha + z_{yy}\cos\alpha
\end{aligned}
$$

これを使うと，

$$
\begin{aligned}
z_{uu} &= (z_x)_u \cos\alpha + (z_y)_u \sin\alpha \\
&= z_{xx}\cos^2\alpha + 2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\sin^2\alpha \\
z_{vv} &= -(z_x)_v \sin\alpha + (z_y)_v \cos\alpha \\
&= z_{xx}\sin^2\alpha - 2z_{xy}\cos\alpha\sin\alpha + z_{yy}\cos^2\alpha
\end{aligned}
$$

⚠ $z_{xy} = z_{yx}$ であることを使って整理

以上より,

$$
\begin{aligned}
z_{uu} + z_{vv} &= z_{xx}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \\
&\qquad +2z_{xy}(\cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha) \\
&\qquad\qquad +z_{yy}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\
&= z_{xx} + z_{yy}
\end{aligned}
$$

参考.

関数 $f(x,\ y)$ に対して，この問題のように

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

で表される 2 変数関数を f の**ラプラシアン**とよび，記号 Δf で表す．