| 126ページ | 章末問題6.8(1) | 解答 | 1/4 |
| --- | --- | --- | --- |

$f(x,y)=0$ の両辺を $x$ で微分して

$$f_x\frac{dx}{dx}+f_y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{[p.111 公式6.1]}$$

$$\therefore\quad \underbrace{f_x(x,y)}_{①}+\underbrace{f_y(x,y)}_{②}\underbrace{y'}_{③}=0 \qquad (*)$$

(∗)の両辺をさらに $x$ で微分して

$$\underbrace{f_{xx}\frac{dx}{dx}+f_{xy}\frac{dy}{dx}}_{\text{①}'} + \overbrace{\underbrace{\left(f_{yx}\frac{dx}{dx}+f_{yy}\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{②}'}\underbrace{y'}_{\text{③}} + \underbrace{f_y}_{\text{②}}\underbrace{\frac{dy'}{dx}}_{\text{③}'}}^{\text{積の微分公式}} = 0$$

$$f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}y'^2 + f_y y'' = 0 \ \ [\because\ f_{xy} = f_{yx}]$$

両辺に ${f_y}^2$ を掛けて，(*)から $f_y y' = -f_x$ であることを用いると

$$f_{xx}{f_y}^2 + 2f_{xy}f_y(f_y y') + f_{yy}(f_y y')^2 + {f_y}^3 y'' = 0$$

$$f_{xx}{f_y}^2 - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}{f_x}^2 + {f_y}^3 y'' = 0$$

$$\therefore \quad y'' = -\frac{f_{xx}{f_y}^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}{f_x}^2}{{f_y}^3}$$

[ ⚠ (*)を $y'$ について解くと

(6.21) 式 $y' = -\dfrac{f_x}{f_y}$ が得られる. ]