(2) から引き続き $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 1$ とおく.

関数 $y = y(x)$ の極値の必要条件 $y'(x) = 0$ (公式 2.12) を $f_x + f_y y' = 0$ ((1) の解答例の (*)) に代入して，$f_x(x,y) = 0$.

また，定義から $f(x,y) = 0$.

これらを連立して

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x = y & \cdots\cdots ① \\ x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入すると

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x^2 + 3x^2 - 1 &= 0 \\
2x^2 &= 1 \\
x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

したがって，①より $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．

126 ページ	章末問題 6.8(3)	解答	4/9

導出した解が $y'(x)=0$ を満たすことを確認する．この解は $f_x=0$ を満たすから，$(*)$ より $f_y \fallingdotseq 0$ を確認すれば十分．実際，$x=y$ のとき $f_y=4x$ であるから，$x \fallingdotseq 0$ ならば $f_y \fallingdotseq 0$ となる．以上より，$x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において，$y'(x)=0$ であることが確認された．

(⚠ この時点では，あくまで極値の必要条件を満たす点$(x,\ y)$が得られただけである．この点で実際に極値をとるか，十分条件を確認する必要がある.)

以下では，例題4.1 (p.75) で与えられた極値の十分条件を用いる．まず，(2) の結果に①を代入して

$$y'' = \frac{2(x^2 - 2x^2 + 3x^2)}{(-2x)^3} = -\frac{1}{2x}$$

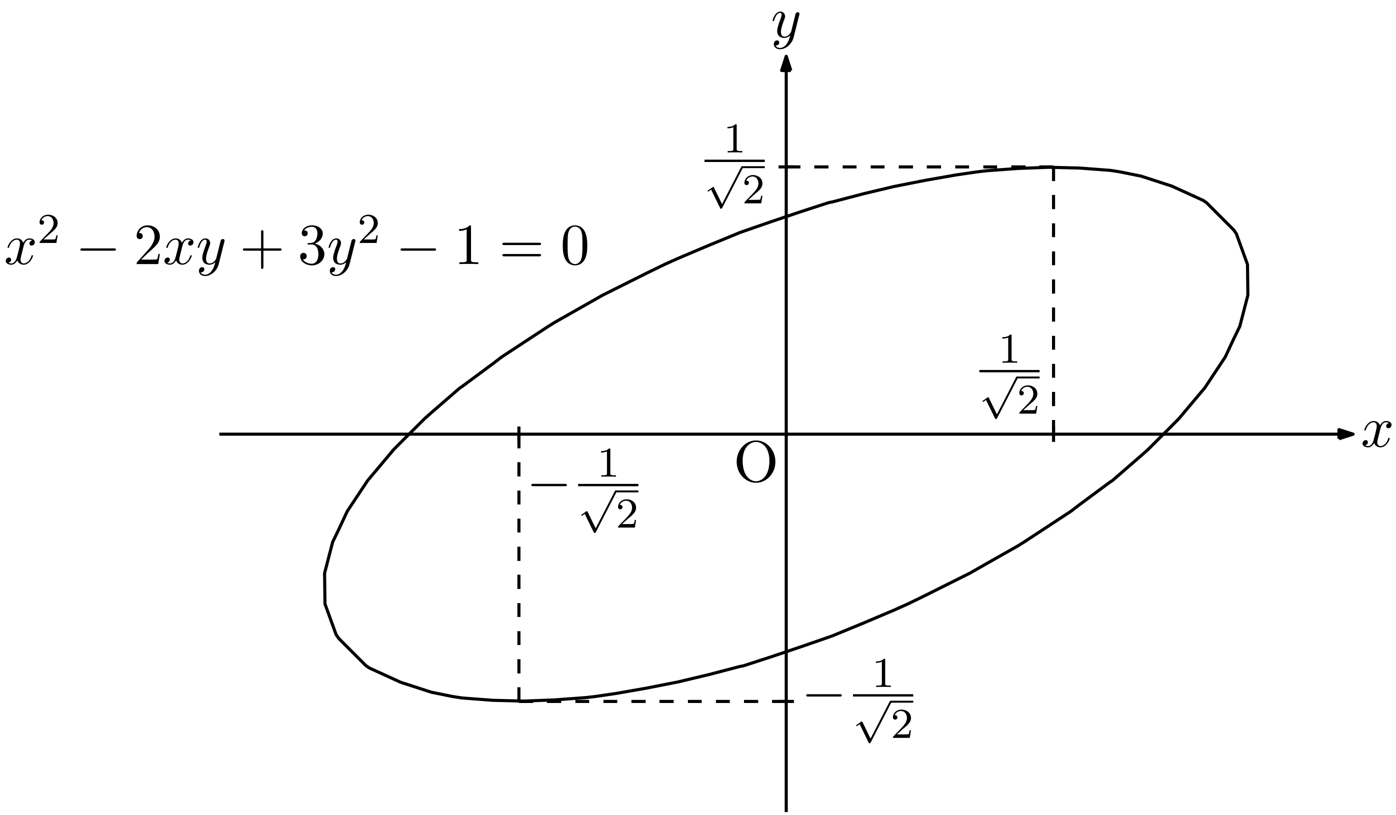
(i) $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$y'' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0$ だから，極値の十分条件（例題4.1）より，関数 $y = y(x)$ は極大値 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとる． （⚠ y の値は条件 $x = y$ より求めている.）

(ii) $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$y'' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$ だから，極値の十分条件より，関数 $y = y(x)$ は極小値 $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとる．

【参考】


y
x
O
$x^2 - 2xy + 3y^2 - 1 = 0$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$