

2重積分での積分領域 D は

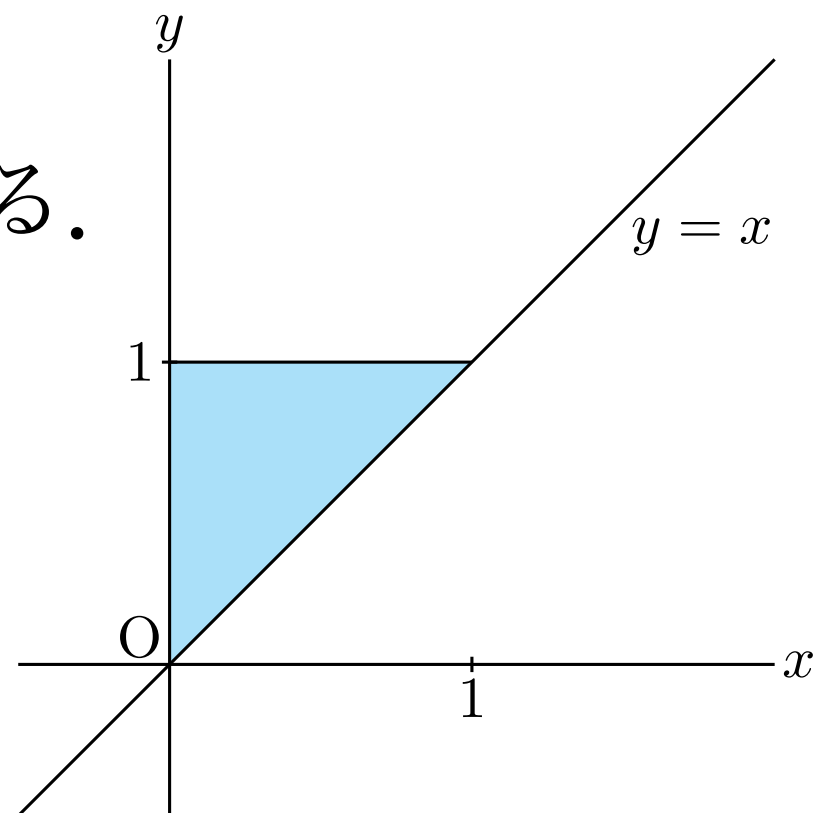
$$0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1$$

で表され、図のようになる.

これから、不等式

$$0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y$$

のようにも表される.



$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1-y^2} \, dx dy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^y \sqrt{1-y^2} \, dx \right\} dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \left[x \right]_0^y dy = \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} \, dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1-y^2 &= t \text{ とおくと} \\ -2y dy &= dt\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} y & 0 \rightarrow 1 \\ \hline t & 1 \rightarrow 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}\text{与式} &= -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$