先端科学技術総論 演習問題解答

木村泰紀 *

2016 年 9 月 8 日・9 日出題

問題 1. H をヒルベルト空間とする. $x, y \in H$ と実数 α に対し, ノルムと内積の性質を用いて, 等式

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$$

が成り立つことを示せ.

解答 右辺を計算すると

$$\begin{aligned}
&\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \\
&= \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)(\|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2) \\
&= \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha(1-\alpha)(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle) - \alpha(1-\alpha)\|y\|^2 \\
&= (\alpha - \alpha(1-\alpha))\|x\|^2 + ((1-\alpha) - \alpha(1-\alpha))\|y\|^2 + \alpha(1-\alpha)(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle) \\
&= \alpha^2\|x\|^2 + (1-\alpha)^2\|y\|^2 + \alpha(1-\alpha)(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle) \\
&= \|\alpha x\|^2 + \|(1-\alpha)y\|^2 + \langle \alpha x, (1-\alpha)y\rangle + \langle (1-\alpha)y, \alpha x\rangle \\
&= \|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2
\end{aligned}$$

となり, 左辺と等しいことが得られる.

問題 2. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ をヒルベルト空間 H の点列で, $x_n \to x_0 \in H$, $y_n \rightharpoonup y_0 \in H$ をそれぞれみたすとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$$

となることを示せ.

解答 $\{y_n\}$ は弱収束列なので, 有界であるから, ある $M \geq 0$ に対して $\|y_n\| \leq M$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ. よって内積の性質を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_n\rangle + \langle x_0, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \\
&= |\langle x_n - x_0, y_n\rangle + \langle x_0, y_n - y_0\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x_0, y_n\rangle| + |\langle x_0, y_n - y_0\rangle| \\
&\leq \|x_n - x_0\|\|y_n\| + |\langle x_0, y_n - y_0\rangle| \\
&\leq M\|x_n - x_0\| + |\langle x_0, y_n - y_0\rangle| \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

したがって $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$ が成り立つ.

---

* 東邦大学理学部情報科学科. `http://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/`

問題 3.　$\{x_n\}$ をヒルベルト空間 H の点列で $x_n \rightharpoonup x_0 \in H$ をみたすものとする．このとき $y \neq x_0$ をみたす $y \in H$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が成り立つことを示せ.

解答　内積の性質を用いて計算すると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\|x_n - y\|^2 &= \|x_n - x_0 + x_0 - y\|^2 \\ &= \|x_n - x_0\|^2 + 2\langle x_n - x_0, x_0 - y\rangle + \|x_0 - y\|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．$x_n \rightharpoonup x_0$ より $\langle x_n - x_0, x_0 - y\rangle \to 0$ なので, 両辺 $n \in \mathbb{N}$ について上極限をとると

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2.$$

ここで, 弱収束列 $\{x_n\}$ は有界であることを用いると, 両辺ともに上極限の値は ∞ とならないので

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|^2 < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 < \infty$$

となる．したがって

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

を得る.

問題 4.　ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合 C を考える．$x \in H$ と $y_0 \in C$ に対して, 以下の条件が同値になることを示せ.

(i) $\|x - y_0\| = \inf_{z\in C} \|x - z\|$;
(ii) 任意の $z \in C$ に対して $\langle x - y_0, z - y_0\rangle \leq 0$.

解答　(i) を仮定する．このとき, 任意の $z \in C$ と $0 < t < 1$ に対して $tz + (1-t)y_0 \in C$ より

$$\|x - y_0\| \leq \|x - (tz + (1-t)y_0)\|.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\|x - y_0\|^2 &\leq \|x - (tz + (1-t)y_0)\|^2 \\ &= \|x - y + t(y_0 - z)\|^2 \\ &= \|x - y_0\|^2 + 2t\langle x - y_0, y_0 - z\rangle + t^2\|y_0 - z\|^2.\end{aligned}$$

したがって, $2t\langle x - y_0, y_0 - z\rangle \geq t^2\|y_0 - z\|^2$. $t > 0$ より,

$$\langle x - y_0, y_0 - z\rangle \geq \frac{t}{2}\|y_0 - z\|^2.$$

$t \to 0$ とすると $\langle x - y_0, y_0 - z\rangle \geq 0$, すなわち $\langle x - y_0, z - y_0\rangle \leq 0$ を得る.

逆に (ii) を仮定すると, 任意の $z \in C$ に対して

$$\begin{aligned}\|x-y_0\|^2 &= \langle x-y_0, x-y_0\rangle \\ &= \langle x-y_0, x-y_0\rangle \\ &= \langle x-y_0, (x-z)+(z-y_0)\rangle \\ &= \langle x-y_0, x-z\rangle + \langle x-y_0, z-y_0\rangle \\ &\le \|x-y_0\|\|x-z\| - \langle x-y_0, y_0-z\rangle \\ &\le \|x-y_0\|\|x-z\|.\end{aligned}$$

したがって, $\|x-y_0\| \le \|x-z\|$ が任意の $z \in C$ で成り立つ. よって $\|x-y_0\| = \inf_{z\in C}\|x-z\|$ である.

問題 5. C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とする. $S : C \to C$ と $T : C \to C$ をそれぞれ非拡大写像とし,

$$U = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}S$$

とする. S, T, U の不動点全体からなる集合をそれぞれ $F(S), F(T), F(U)$ とするとき, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ ならば

$$F(S) \cap F(T) = F(U)$$

が成り立つことを示せ.

解答 $F(S) \cap F(T) \subset F(U)$ は明らか. 逆の包含関係を示す. $z \in F(U)$ とし, $y \in F(S) \cap F(T)$ とすると,

$$z = Uz, \quad y = Sy, \quad y = Ty$$

が成り立つ. (i) を用いて

$$\begin{aligned}\|z-y\|^2 &= \|Uz-y\|^2 \\ &= \left\|\frac{1}{2}Sz + \frac{1}{2}Tz - y\right\|^2 \\ &= \left\|\frac{1}{2}(Sz-y) + \frac{1}{2}(Tz-y)\right\|^2 \\ &= 2\left\|\frac{1}{2}(Sz-y)\right\|^2 + 2\left\|\frac{1}{2}(Tz-y)\right\|^2 - \left\|\frac{1}{2}(Sz-y) - \frac{1}{2}(Tz-y)\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|Sz-y\|^2 + \frac{1}{2}\|Tz-y\|^2 - \frac{1}{4}\|Sz-Tz\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|Sz-Sy\|^2 + \frac{1}{2}\|Tz-Ty\|^2 - \frac{1}{4}\|Sz-Tz\|^2 \\ &\le \frac{1}{2}\|z-y\|^2 + \frac{1}{2}\|z-y\|^2 - \frac{1}{4}\|Sz-Tz\|^2 \\ &= \|z-y\|^2 - \frac{1}{4}\|Sz-Tz\|^2.\end{aligned}$$

移項して整理すると $\|Sz-Tz\|^2 \le 4(\|z-y\|^2 - \|z-y\|^2) = 0$, すなわち $Sz = Tz$ を得る. よって

$$z = Uz = \frac{1}{2}Tz + \frac{1}{2}Sz = \frac{1}{2}Tz + \frac{1}{2}Tz = Tz = Sz$$

となり, $z \in F(S) \cap F(U)$ を得る. したがって $F(U) \subset F(S) \cap F(T)$ も得られ, $F(U) = F(S) \cap F(T)$ が示された.