情報数理演習 IIB 演習問題解答

木村泰紀 [*]

2019 年 9 月 23 日出題

問題 1. 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合を, それぞれ $A=[0,2]$, $B=]1,4[$, $C=[3,\infty[$ で定義するとき, 次の集合を求めよ.

(i) $A\cup B$, (ii) $B\cap C$, (iii) $A\cap C$, (iv) C^{C}, (v) $A\setminus B$.

解答 (i) $A\cup B=[0,4[$.

(ii) $B\cap C=[3,4[$.

(iii) $A\cap C=\emptyset$.

(iv) $C^{\mathsf{C}}=]-\infty,3[$.

(v) $A\setminus B=[0,1]$.

問題 2. $k\in\mathbb{N}$ に対して, 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 S_k を区間の記号を用いて

$$S_k=\left]1-\frac{1}{k},3-\frac{1}{k}\right]$$

と定義する. 次の実数の部分集合を区間の記号を用いてあらわせ.

(i) S_1, (ii) $S_1\cup S_3$, (iii) $S_1\cap S_2\cap S_3$, (iv) $\bigcap_{k=1}^{n}S_k$, (v) $\bigcup_{k=3}^{n+2}S_k$, (vi) $\bigcap_{k=1}^{\infty}S_k$, (vii) $\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$.

解答 (i) $1-1/1=0$ と $3-1/1=2$ より $S_1=]0,2]$.

(ii) $S_3=]1-1/3,3-1/3]=]2/3,8/3]$ なので, 合併の定義より

$$S_1\cup S_3=]0,2]\cup\left]\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right]=\left]0,\frac{8}{3}\right].$$

(iii) 共通部分の定義より

$$S_1\cap S_2\cap S_3=]0,2]\cap\left]\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]\cap\left]\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right]=\left]\frac{2}{3},2\right].$$

(iv) (iii) と同様にして S_k の定義を用いて計算すると

$$\bigcap_{k=1}^{n}S_k=\bigcap_{k=1}^{n}\left]1-\frac{1}{k},3-\frac{1}{k}\right]=\left]1-\frac{1}{n},2\right].$$

(v) $S_3=]2/3,8/3]$, $S_{n+2}=]1-1/(n+2),3-1/(n+2)]$ であることより

$$\bigcup_{k=3}^{n+2}S_k=\left]\frac{2}{3},3-\frac{1}{n+2}\right].$$

[*] 東邦大学理学部情報科学科. `https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/`

(vi) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $1 - 1/k < 1 \leq 3 - 1/k$ であることから, $1 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$ である．よって

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k = [1,2].$$

(vi) すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $3 - 1/k < 3$ であることから, $3 \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ である．よって

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k =]0,3[.$$

問題 3.　$S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ とし, S から自然数 $\mathbb{N}$ への写像 $f : S \to \mathbb{N}$ を, $x \in S$ に対して

$$f(x) = (x\ \text{を英単語で書いたときの文字数})$$

で定義する．次をそれぞれ具体的にあらわせ.

(i) $f(0)$,　(ii) $f(\{1,3\})$,　(iii) $f(\{2,4,5\})$,　(iv) $f^{-1}(\{5,6\})$,　(v) $f^{-1}(3)$,　(vi) $f^{-1}(2)$.

解答　(i) 0 は英語で ‘zero’ と 4 文字で綴れるので, $f(1) = 4$.

(ii) $f(1) = 3$, $f(3) = 5$ だから, $f(\{1,3\}) = \{3,5\}$.

(iii) $f(2) = 3$, $f(4) = 4$, $f(5) = 4$ より $f(\{2,4,5\}) = \{3,4\}$.

(iv) S に属する数のうち, 英単語の文字数が 5 となるのは ‘three’, ‘seven’, ‘eight’ の 3 つである．同様に, 英単語の文字数が 6 となるのは ‘eleven’, ‘twelve’ である．したがって $f^{-1}(\{5,6\}) = \{3,7,8,11,12\}$.

(v) (iv) と同様だが, $f^{-1}(3)$ は $f^{-1}(\{3\})$ と同じ意味であることに注意する．$f^{-1}(3) = f^{-1}(\{3\}) = \{1,2,6,10\}$.

(vi) 2 文字で綴れる英単語は S の中に存在しないので, $f^{-1}(2) = f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.

問題 4.　整数 $\mathbb{Z}$ から整数 $\mathbb{Z}$ への写像 f, g, h, k をそれぞれ

$$f(x) = x - 1, \quad g(x) = 2x, \quad h(x) = x^2, \quad k(x) = \begin{cases} x - 1, & (x > 0) \\ 0, & (x = 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$$

で定義する．次の問いに答えよ.

(i) 全射であるものをすべて挙げよ.
(ii) 単射であるものをすべて挙げよ.
(iii) 全単射であるものについて, 逆写像を求めよ.

解答　(ii) 定義より, 全射であるものは f, k である．g については $g(x) = 1$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在しないので全射でない．h については $h(x) = -1$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在しないので全射でない.

(ii) 定義より, 単射であるものは f と g である．h については $h(x) = 1$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が $x = 1$ と $x = -1$ のように複数あるので単射でない．k については $h(x) = 0$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ のように複数あるので単射でない.

(iii) 全単射であるのは f である．$y = f(x) = x - 1$ とすると $x = y + 1$ となるので, 逆写像 $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ は

$$f^{-1}(y) = y + 1$$

であらわせる.