情報数理演習 IIB 演習問題解答

木村泰紀 *

2019 年 10 月 7 日出題

問題 1. $X = \mathbb{R}^2$ とする. $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ および $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ を, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対してそれぞれ

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \\ d_2(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

と定義する. 次の問いに答えよ.

(i) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とするとき, $d_1(x, y)$ および $d_2(x, y)$ の値を求めよ.

(ii) d_1 は X 上の距離となることを示せ.

(iii) d_2 は X 上の距離となることを示せ.

解答 (i) d_1, d_2 の定義より

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |1 - (-2)| + |2 - 3| = 3 + 1 = 4, \\ d_2(x, y) &= \sqrt{(1 - (-2))^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

(ii) 絶対値は非負の値を取るので, 明らかに $d_1(x, y) \geq 0$ が任意の $x, y \in X$ で成り立つ. また, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in X$ とするとき, $d_1(x, y) = 0$ ならば

$$\begin{aligned} 0 &\leq |x_1 - y_1| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0, \\ 0 &\leq |x_2 - y_2| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \end{aligned}$$

となり, ここから $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$, つまり $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ が得られる. よって $x = y$ が成り立つ. 逆に $x = y$ のときは $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ であるから

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 + 0 = 0.$$

また,

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_1(y, x)$$

も成り立つ. 最後に三角不等式

$$d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y)$$

* 東邦大学理学部情報科学科. `https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/`

を示す. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in X$ とするとき,

$$\begin{aligned} d_1(x,z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\ &= |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\ &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\ &= d_1(x,y) + d_1(y,z) \end{aligned}$$

よって三角不等式が示された. 以上より, d_1 は X 上の距離である.

(iii) 定義より明らかに $d_2(x,y) \geq 0$ が任意の $x, y \in X$ で成り立つ. また, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in X$ とするとき, $d_2(x,y) = 0$ ならば両辺 2 乗すると $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$ となる. 左辺は 2 項とも非負なので, $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2 = 0$ となり, ここから $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ が得られる. よって $x = y$ が成り立つ. 逆に $x = y$ のときは $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ であるから

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2} = 0.$$

また,

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d_2(y,x)$$

も成り立つ. 最後に三角不等式

$$d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$$

を示す. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in X$ とするとき, 辺々 2 乗して差を計算すると

$$\begin{aligned} &(d_2(x,z) + d_2(z,y))^2 - d_2(x,y)^2 \\ &\qquad = \left(\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2} \right)^2 - \left((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right) \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} p &= x_1 - z_1, \quad q = x_2 - z_2, \\ r &= z_1 - y_1, \quad s = z_2 - y_2 \end{aligned}$$

とすると

$$x_1 - y_1 = p + r, \quad x_2 - y_2 = q + s$$

となる. 上の式に代入して計算すると

$$\begin{aligned} &(d_2(x,z) + d_2(z,y))^2 - d_2(x,y)^2 \\ &= \left(\sqrt{p^2 + q^2} + \sqrt{r^2 + s^2} \right)^2 - ((p + r)^2 + (q + s)^2) \\ &= p^2 + q^2 + 2\sqrt{(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)} + r^2 + s^2 - (p^2 + 2pr + r^2 + q^2 + 2qs + s^2) \\ &= 2\sqrt{(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)} - 2(pr + qs). \end{aligned}$$

これが非負になることを示すには $\sqrt{(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)} \geq pr + qs$, すなわち, 両辺 2 乗して

$$(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) \geq (pr + qs)^2$$

を示せばよい．再び両辺の差を計算すると

$$
\begin{aligned}
(p^2+q^2)(r^2+s^2)-(pr+qs)^2 &= p^2r^2+p^2s^2+q^2r^2+q^2s^2-(p^2r^2+2pqrs+q^2s^2)\\
&= p^2s^2+q^2r^2-2pqrs\\
&= (ps-qr)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

よって $(d_2(x,z)+d_2(z,y))^2-d_2(x,y)^2 \geq 0$ となり, 三角不等式が示された．以上より, d_2 は X 上の距離である．

問題 2.　(X,d) を距離空間とするとき, 任意の $x,y,z \in X$ に対して

$$|d(x,y)-d(y,z)| \leq d(x,z)$$

が成り立つことを示せ．

解答　絶対値の定義より

$$-d(x,z) \leq d(x,y)-d(y,z) \leq d(x,z)$$

を示せばよいことがわかる．三角不等式より

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(y,z)$$

が成り立つことから, 移項して

$$d(x,y)-d(y,z) \leq d(x,z)$$

が得られる．同様に

$$d(y,z) \leq d(y,x)+d(x,z) = d(x,y)+d(x,z)$$

から

$$-d(x,z) \leq d(x,y)-d(y,z)$$

も得られる．したがって, $|d(x,y)-d(y,z)| \leq d(x,z)$ が成り立つことが示された．