情報数理演習 IIB 演習問題解答

木村泰紀 *

2019 年 10 月 21 日出題

問題 1.　X を距離空間とする．中心 $x \in X$, 半径 $r > 0$ の開球 $U_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ は開集合であることを示せ.

解答　$x \in X$, $r > 0$ に対して $\underline{U_r(x)} \supset U_r(x)$ を示す．$y \in U_r(x)$ とすると, 開球の定義より $d(x,y) < r$. ここで $s = r - d(x,y)$ とすると $s > 0$ である．このとき

$$U_s(y) \subset U_r(x)$$

が成り立つことを示そう．$z \in U_s(y)$ とすると, 開球の定義より

$$d(y,z) < s = r - d(x,y)$$

であり, これより $d(x,y) + d(y,z) < r$ が得られる．一方, 三角不等式より $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ であるから $d(x,z) < r$ となり, これは $z \in U_r(x)$ を意味する．したがって $U_s(y) \subset U_r(x)$ が示された．よって, y は $U_r(x)$ の内点, すなわち $y \in \underline{U_r(x)}$ である．したがって $\underline{U_r(x)} \supset U_r(x)$ となり $\underline{U_r(x)} = U_r(x)$, すなわち $U_r(x)$ は開集合であることが示された.

問題 2.　X を距離空間とし, $A, B \subset X$ とするとき, $\underline{A} \cap \underline{B} = \underline{A \cap B}$ が成り立つことを示せ.

解答　まず $A \supset A \cap B$ より $\underline{A} \supset \underline{A \cap B}$ が成り立ち, 同様に $B \supset A \cap B$ より $\underline{B} \supset \underline{A \cap B}$ も得られる．よって $\underline{A} \cap \underline{B} \supset \underline{A \cap B}$ である．次に $\underline{A} \cap \underline{B} \subset \underline{A \cap B}$ を示す．$x \in \underline{A} \cap \underline{B}$ とすると, $x \in \underline{A}$ なので, ある $r_1 > 0$ に対して $U_{r_1}(x) \subset A$ が成り立つ．同様に $x \in \underline{B}$ でもあるので, ある $r_2 > 0$ に対して $U_{r_2}(x) \subset B$ が成り立つ．このとき, $r = \min\{r_1, r_2\}$ とすると $U_r(x) \subset U_{r_1}(x)$ かつ $U_r(x) \subset U_{r_2}(x)$ より

$$U_r(x) \subset U_{r_1}(x) \cap U_{r_2}(x) \subset A \cap B.$$

よって x は $A \cap B$ の内点, すなわち $x \in \underline{A \cap B}$ が得られる．よって $\underline{A} \cap \underline{B} \subset \underline{A \cap B}$ であり, $\underline{A} \cap \underline{B} = \underline{A \cap B}$ が示された.

問題 3.　X を距離空間とするとき, 次の問いに答えよ.

(i) 空集合 $\emptyset$ と全体集合 X はともに開集合であることを示せ.
(ii) A, B がともに開集合のとき, $A \cap B$ も開集合であることを示せ.
(iii) $\{A_i : i \in I\}$ が開集合の族であるとき, $\bigcup_{i \in I} A_i$ も開集合であることを示せ.

* 東邦大学理学部情報科学科. https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/

解答　(i) 空集合はどのような集合に対してもその部分集合となるので $\emptyset \subset \underline{\emptyset}$. 一方, X の任意の部分集合 A に対して $\underline{A} \subset A$ が成り立つので $\underline{\emptyset} \subset \emptyset$ も成り立つ．したがって $\underline{\emptyset} = \emptyset$ となり, $\emptyset$ は開集合であることが示された．

一方, $\underline{X} \subset X$ も同様に成り立つので, $\underline{X} \supset X$ を示せば X は開集合であることがわかる．任意の $x \in X$ に対し, 全体集合の定義より $r > 0$ ならばつねに $U_r(x) \subset X$ である．よって, 例えば $r = 1$ としてもこの包含関係は成り立つので $U_r(x) \subset X$ をみたす $r > 0$ は必ず存在する．よって x は X の内点, すなわち $x \in \underline{X}$ である．よって示された．

(ii) $A \cap B$ が開集合となることを示すには, $\underline{A \cap B} \supset A \cap B$ を示せばよい．$x \in A \cap B$ とすると $x \in A$ かつ $x \in B$ である．ここで A, B はともに開集合なので, $x \in \underline{A}$ かつ $x \in \underline{B}$ でもある．よって, ある $r_1 > 0$ および $r_2 > 0$ が存在して

$$U_{r_1}(x) \subset A \text{ かつ } U_{r_2}(x) \subset B$$

が成り立つ．ここで $r_0 = \min\{r_1, r_2\} > 0$ とすると,

$$U_{r_0}(x) \subset U_{r_1}(x) \subset A \text{ かつ } U_{r_0}(x) \subset U_{r_2}(x) \subset B$$

が成り立ち, よって $U_{r_0}(x) \in A \cap B$ が得られる．したがって, x は $A \cap B$ の内点, すなわち $x \in \underline{A \cap B}$. これで $\underline{A \cap B} \supset A \cap B$ が示され, $A \cap B$ は開集合であることがわかった．

(iii) $\bigcup_{i \in I} A_i$ が開集合であることを示すには $\underline{\bigcup_{i \in I} A_i} \supset \bigcup_{i \in I} A_i$ を示せばよい．$\bigcup_{i \in I} A_i = B$ とすると, 各 $i \in I$ に対して $B \supset A_i$ であるから, $\underline{B} \supset \underline{A_i}$ が成り立つ．ここで A_i が開集合であることを用いると

$$\underline{B} \supset \underline{A_i} = A_i$$

が任意の $i \in I$ で成り立つ．よって

$$\underline{B} \supset \bigcup_{i \in I} A_i,$$

つまり $\underline{\bigcup_{i \in I} A_i} \supset \bigcup_{i \in I} A_i$ が示された．

問題 4.　X を距離空間とし, $A, B \subset X$ とする．次の問いに答えよ．

(i) $A \subset \overline{A}$ が成り立つことを示せ．

(ii) $A \subset B$ ならば $\overline{A} \subset \overline{B}$ となることを示せ．

解答　(i) $x \in A$ とする．このとき, 任意の $r > 0$ に対して $x \in U_r(x)$ が成り立つことから $x \in U_r(x) \cap A$ となり, $U_r(x) \cap A \neq \emptyset$ が得られる．よって x は A の触点, すなわち, $x \in \overline{A}$ が得られ, $A \subset \overline{A}$ が示された．

(ii) $A \subset B$ を仮定する．$x \in \overline{A}$ とすると, 触点の定義より任意の $r > 0$ に対して $U_r(x) \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ．このとき仮定より $\emptyset \neq U_r(x) \cap A \subset U_r(x) \cap B$ であることから, x は B の触点, すなわち $x \in \overline{B}$ を得る．したがって $\overline{A} \subset \overline{B}$ が得られる．

問題 5.　X を距離空間とし, $A \subset X$ とするとき, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ を示せ．

解答　X の任意の部分集合 B に対して $\overline{B} \supset B$ が成り立つので, $\overline{\overline{A}} \supset \overline{A}$ は成り立つことがわかる．$\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ を示そう．$x \in \overline{\overline{A}}$ とすると, 触点の定義より任意の $r > 0$ に対して $U_r(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ が成り立つ．このとき $y \in U_r(x) \cap \overline{A}$ とすると, $y \in U_r(x)$ かつ $y \in \overline{A}$ である．まず $y \in U_r(x)$ と $U_r(x)$ が開集合であることを用い

ると,

$$y \in U_r(x) = \underline{U_r(x)}$$

ある $s > 0$ が存在して $U_s(y) \subset U_r(x)$ が成り立つ. 一方, $y \in \overline{A}$ であることを用いると, 触点の定義より任意の $t > 0$ に対して $U_t(y) \cap A \neq \emptyset$ であるから, とくに $t = s$ として

$$U_s(y) \cap A \neq \emptyset$$

も成り立つ. よって

$$U_r(x) \cap A \supset U_s(y) \cap A \neq \emptyset$$

となり, x は A の触点, すなわち $x \in \overline{A}$ が示された. よって $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ が得られ, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ が示された.