情報数理演習 IIB 演習問題解答

木村泰紀 *

2019 年 10 月 28 日出題

問題 1.　X を距離空間, $x_0 \in X$ とし, $f : X \to \mathbb{R}$ が x_0 で連続であるとする．このとき $f(x_0) > 0$ ならば, ある $r > 0$ が存在して, f が $U_r(x_0)$ 上で常に正の値をとることを示せ.

解答　$\epsilon = f(x_0) > 0$ とすると, f の x_0 での連続性より, ある $\delta > 0$ が存在して $z \in U_\delta(x_0)$ ならば $f(z) \in U_\epsilon(f(x_0))$ が成り立つ．ここで, $r = \delta$ とすると, $z \in U_r(x_0)$ ならば $f(z) \in U_\epsilon(f(x_0))$, すなわち

$$d(f(z), f(x_0)) = |f(z) - f(x_0)| < \epsilon = f(x_0)$$

が成り立つ．このとき,

$$f(x_0) - f(z) \leq |f(z) - f(x_0)| < f(x_0)$$

より $f(z) > f(x_0) - f(x_0) = 0$ となり, $U_r(x_0)$ 上で f は常に正の値をとることが示された.

問題 2.　X, Y, Z をそれぞれ距離空間とし, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ がそれぞれ連続であるとする．合成写像 $g \circ f : X \to Z$ について, 次の問いに答えよ.

(i) $A \subset Z$ に対して $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ が成り立つことを示せ.
(ii) $g \circ f$ は連続であることを示せ.

解答　(i) $x \in (g \circ f)^{-1}(A)$ とすると, 逆像の定義より $(g \circ f)(x) \in A$. 合成写像の定義より $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ であるから,

$$g(f(x)) \in A$$

が得られる．よって $f(x) \in g^{-1}(A)$ であり, さらに $x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$ を得る．一方, $x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$ を仮定すると, 逆像の定義を順に用いて, $f(x) \in g^{-1}(A)$ となり, $g(f(x)) \in A$ を得る．よって $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in A$ となり,

$$x \in (g \circ f)^{-1}(A)$$

が得られる．したがって, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ が成り立つ.

(ii) $g \circ f$ が連続であることを示すには, Z の任意の開集合 G に対して $(g \circ f)^{-1}(G)$ が X の開集合となることを示せばよい．まず, g が連続であることから, G が開集合ならば $g^{-1}(G)$ も開集合となる．さらに f も連続なので $f^{-1}(g^{-1}(G))$ も開集合となる．ここで (i) より

$$f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G)$$

なので, $(g \circ f)^{-1}(G)$ は X の開集合となり, $g \circ f$ が連続であることが示された.

* 東邦大学理学部情報科学科. https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/

問題 3.　X を距離空間とする．$f : X \to X$ が連続のとき，

$$F = \{x \in X : x = f(x)\}$$

は閉集合であることを示せ．

解答　F が閉であることを示すにはその補集合 F^{C} が開であることを示せばよい．$x \in F^{\mathsf{C}}$ とすると，$x \neq f(x)$ である．ここで $\epsilon = d(x, f(x))/2$ とすると $\epsilon > 0$ であり，f の連続性を用いると，ある $\delta > 0$ が存在して $d(z, x) < \delta$ ならば $d(f(z), f(x)) < \epsilon$ が成り立つ．ここで

$$r = \min\{\delta, \epsilon\} > 0$$

とすると，$U_r(x) \subset F^{\mathsf{C}}$ であることが次のようにして示せる．$y \in U_r(x)$ とすると，$d(x, y) < r \leq \delta$ なので，上のことから $d(f(y), f(x)) < \epsilon$ が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned}
d(x, f(x)) &\leq d(x, y) + d(y, f(y)) + d(f(y), f(x)) \\
&< r + d(y, f(y)) + \epsilon \\
&\leq \epsilon + d(y, f(y)) + \epsilon \\
&= 2\epsilon + d(y, f(y))
\end{aligned}$$

より

$$d(y, f(y)) > d(x, f(x)) - 2\epsilon = d(x, f(x)) - d(x, f(x)) = 0.$$

よって $y \neq f(y)$ であり，$y \in F^{\mathsf{C}}$ である．したがって，$U_r(x) \subset F^{\mathsf{C}}$ であり，x は F^{C} の内点となる．つまり $x \in \underline{F^{\mathsf{C}}}$ が示され，F^{C} は開集合，すなわち F が閉集合であることが示された．