関数解析学 演習問題解答

木村泰紀 *

2019 年 9 月 26 日出題

問題 1. $\mathbb{C}$ を複素数の集合とし, $\mathbb{C}^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$ とする. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$ に対して

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$$

と定義する. ただし, $z \in \mathbb{C}$ に対して $\overline{z}$ は z の共役複素数をあらわす. このとき, 次に示す内積の公理をみたすことを証明せよ.

(i) 任意の $x \in \mathbb{C}^2$ に対して $\langle x, x\rangle \geq 0$ であり, $\langle x, x\rangle = 0$ は $x = 0$ と同値である;
(ii) 任意の $x, y \in \mathbb{C}^2$ に対して $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
(iii) 任意の $x, y \in \mathbb{C}^2$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;
(iv) 任意の $x, y, z \in \mathbb{C}^2$ に対して $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

解答 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}$ とする.

(i) 一般に, $z \in \mathbb{C}$ に対して $z\overline{z} = |z|^2$ であることを用いると,

$$\langle x, x\rangle = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0.$$

また, この式より, $\langle x, x\rangle = 0$ のときは $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 0$ となり, $x_1 = x_2 = 0$, すなわち $x = (x_1, x_2) = (0, 0) = 0$ が得られる. 逆に $x = (x_1, x_2) = 0$ のときは

$$\langle x, x\rangle = |0|^2 + |0|^2 = 0.$$

よって $\langle x, x\rangle = 0$ と $x = 0$ は同値となり, (i) が示された.

(ii) 一般に, 複素共役の性質より, $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w},\ \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w},\ \overline{\overline{z}} = z$$

がそれぞれ成り立つことを用いると

$$\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2}} = \overline{y_1\overline{x_1}} + \overline{y_2\overline{x_2}} = \overline{y_1}x_1 + \overline{y_2}x_2 = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = \langle x, y\rangle.$$

よって (ii) が示された.

(iii) $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ となるので,

$$\langle \alpha x, y\rangle = (\alpha x_1)\overline{y_1} + (\alpha x_2)\overline{y_2} = \alpha(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}) = \alpha\langle x, y\rangle.$$

* 東邦大学理学部情報科学科. https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/

よって (iii) が示された.

(iv) $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ とする. $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ より

$$\begin{aligned}
\langle x + y, z \rangle &= (x_1 + y_1)\overline{z_1} + (x_2 + y_2)\overline{z_2} \\
&= x_1\overline{z_1} + y_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + y_2\overline{z_2} \\
&= x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + y_1\overline{z_1} + y_2\overline{z_2} \\
&= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.
\end{aligned}$$

よって (iv) が示された.