関数解析学 演習問題解答

木村泰紀 [*]

2019 年 10 月 3 日出題

問題 1. H を内積空間とする. $x \in H$ に対して

$$\langle 0, x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$$

が成り立つことを示せ.

解答 内積の公理の一つである等式

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$$

において $\alpha = 0$, $x = y$ とすると, $\alpha x = 0x = 0$ より

$$\langle 0, x\rangle = \langle 0x, x\rangle = 0\langle x, x\rangle = 0.$$

一方, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ を用いて

$$\langle x, 0\rangle = \overline{\langle 0, x\rangle} = \overline{0} = 0.$$

よって示された.

問題 2. 複素内積空間 H の点 $x, y, z \in H$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$$

が成り立つことを示せ.

解答 内積の公理を用いて計算すると

$$\begin{aligned}\langle x, \alpha y + \beta z\rangle &= \overline{\langle \alpha y + \beta z, x\rangle} \\ &= \overline{\alpha\langle y, x\rangle + \beta\langle z, x\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\beta}\,\overline{\langle z, x\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle.\end{aligned}$$

よって示された.

問題 3. H を内積空間とし, $\{x_n\}, \{y_n\}$ をそれぞれ $x_0 \in H$, $y_0 \in H$ に収束する H の点列とする. このとき次の問いに答えよ.

(i) $x, y \in H$ に対して $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ が成り立つことを示せ.
(ii) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$ が成り立つことを示せ.
(iii) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$ が成り立つことを示せ.

[*] 東邦大学理学部情報科学科. http://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/

解答　(i) 三角不等式を用いて

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

よって

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

が得られる．一方,

$$\|y\| = \|x + y - x\| \leq \|x\| + \|y - x\| = \|x\| + \|x - y\|$$

より

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

も成り立つ．したがって

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

が得られる．

(ii) (i) を用いて

$$0 \leq |\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\|.$$

ここで $\{x_n\}$ は x_0 に収束するので $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$．よって $\lim_{n\to\infty} |\|x_n\| - \|x_0\|| = 0$ となり, $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$ が得られる．

(iii) シュワルツの不等式を用いて

$$\begin{aligned} 0 \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y_0\rangle + \langle x_n, y_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y_0\rangle| + |\langle x_n, y_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0\rangle| \\ &\leq \|x_n\|\|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\|\|y_0\|. \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(\|x_n\|\|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\|\|y_0\|) &= \lim_{n\to\infty}\|x_n\| \lim_{n\to\infty}\|y_n - y_0\| + \|y_0\| \lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| \\ &= \|x_0\| \cdot 0 + \|y_0\| \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| = 0$$

となり, $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$ が示された．