関数解析学 演習問題解答

木村泰紀 *

2019 年 10 月 17 日出題

問題 1. H を内積空間とし, $x, y \in H$ とする. このとき, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$$

が成り立つことを示せ.

解答 α は実数なので $\overline{\alpha} = \alpha$ であることに注意して,

$$\begin{aligned}
&\alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \\
&= \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)(\|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2) \\
&= (\alpha - \alpha(1-\alpha))\|x\|^2 + ((1-\alpha) - \alpha(1-\alpha))\|y\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \\
&= \alpha^2\|x\|^2 + (1-\alpha)^2\|y\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \\
&= \|\alpha x\|^2 + \|(1-\alpha)y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle \alpha x, (1-\alpha)y\rangle \\
&= \|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2.
\end{aligned}$$

よって示された.

問題 2. M をヒルベルト空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $x \in H$ とする. $u, v \in M$ がそれぞれ

$$\|x-u\| = \|x-v\| = d(x, M)$$

をみたすとき, $u = v$ であることを示せ. ただし, $d(x, M) = \inf_{y \in M}\|x-y\|$ である.

解答 $d = d(x, M)$ とし, $u, v \in M$ が $\|x-u\| = \|x-v\| = d$ をみたすと仮定する. このとき, 平行四辺形公式より

$$\begin{aligned}
\|u-v\|^2 &= \|(x-v) - (x-u)\|^2 \\
&= 2\|x-v\|^2 + 2\|x-u\|^2 - \|2x - (v+u)\|^2 \\
&= 2d^2 + 2d^2 - 4\left\|x - \left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}u\right)\right\|^2 \\
&= 4d^2 - 4\left\|x - \left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}u\right)\right\|^2.
\end{aligned}$$

ここで, M は凸なので

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}u \in M.$$

* 東邦大学理学部情報科学科. https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/

よって

$$\|u-v\|^2 = 2d^2 + 2d^2 - 4\left\|x - \left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}u\right)\right\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

したがって, $u = v$ が示された.

問題 3. M をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $x \in H$, $p \in M$ とする. このとき, 次は同値であることを示せ.

(i) $\|x-p\| = d(x, M)$;

(ii) 任意の $y \in M$ に対して $\mathrm{Re}\langle x-p, p-y\rangle \geq 0$.

解答 ((i) $\Rightarrow$ (ii)) $y \in M$ を任意に一つ固定すると, M が凸であることから, 任意の $0 < \alpha < 1$ に対して $\alpha y + (1-\alpha)p \in M$. ここで, $d(x, M)$ の定義より $d(x, M) \leq \|x - (\alpha y + (1-\alpha)p)\|$. よって

$$\begin{aligned}
\|x-p\|^2 &\leq \|x - (\alpha y + (1-\alpha)p)\|^2 \\
&= \|x - p + \alpha(p-y)\|^2 \\
&= \|x-p\|^2 + 2\alpha \,\mathrm{Re}\langle x-p, p-y\rangle + \alpha^2 \|p-y\|^2 .
\end{aligned}$$

整理して

$$2\alpha \,\mathrm{Re}\langle x-p, p-y\rangle \geq -\alpha^2 \|p-y\|^2$$

を得る. ここで, $\alpha > 0$ より, 両辺 2α で割ると

$$\mathrm{Re}\langle x-p, p-y\rangle \geq -\frac{\alpha}{2}\|p-y\|^2 .$$

$0 < \alpha < 1$ は任意なので, $\alpha \to 0$ として $\mathrm{Re}\langle x-p, p-y\rangle \geq 0$ を得る.

((ii) $\Rightarrow$ (i)) $x = p$ のときは明らかなので, $x \neq p$ のときを示す. 任意の $y \in M$ に対して $\mathrm{Re}\langle x-p, p-y\rangle \geq 0$ であるとすると,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathrm{Re}\langle x-p, p-y\rangle \\
&= \mathrm{Re}\langle x-p, p-x+x-y\rangle \\
&= -\|x-p\|^2 + \mathrm{Re}\langle x-p, x-y\rangle \\
&\leq -\|x-p\|^2 + |\langle x-p, x-y\rangle| \\
&\leq -\|x-p\|^2 + \|x-p\|\,\|x-y\|
\end{aligned}$$

が得られる. よって, $\|x-p\| > 0$ より

$$\|x-p\| \leq \|x-y\|$$

となり, $\|x-p\| = \inf_{y\in M}\|x-y\| = d(x, M)$ が示された.