関数解析学 演習問題解答

木村泰紀 *

2019 年 10 月 24 日出題

問題 1. $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ をヒルベルト空間 H の正規直交系とし, $x \in H$ とする. 点列 $\{s_n\}$ を, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $s_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ で定義するとき, 次の問いに答えよ.

(i) 任意の $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して $x - s_n \perp e_j$ が成り立つことを示せ.

(ii) $\{s_n\}$ はコーシー列であることを示せ.

(iii) 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して $x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \perp e_j$ が成り立つことを示せ.

(iv) 任意の e_j に直交するようなベクトルは 0 以外にないと仮定する. このとき $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ が成り立つことを示せ.

解答 (i) $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ は正規直交系であるから,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

よって $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned} \langle x - s_n, e_j \rangle &= \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

つまり $x - s_n \perp e_j$ が成り立つ.

(ii) $\{e_i\}$ が正規直交系であることを用いると, $m > n$ をみたす m, n に対して

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

一方, ベッセルの不等式を用いて

$$\sum_{i=n+1}^{m} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

* 東邦大学理学部情報科学科. `https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/`

よって, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$ として数列 $\{\alpha_n\}$ を定義すると $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ である. また

$$\|s_m - s_n\|^2 \leq \alpha_n$$

が $m > n$ をみたす m, n に対して成り立つことから, $\{s_n\}$ はコーシー列であることが示された.

(iii) ヒルベルト空間は完備であるから, (ii) より

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = \lim_{n\to\infty} s_n \in H$$

である. よって (i) より

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle = \left\langle x - \lim_{n\to\infty} s_n, e_j \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x - s_n, e_j \rangle = 0.$$

すなわち $x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i \perp e_j$ が成り立つ.

(iv) (iii) より $x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ は任意の e_j に直交しているので

$$x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i = 0,$$

すなわち $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$ である.

問題 2. H をヒルベルト空間とする. H の有限個の元 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ に対し, これらの元から生成される複素線形空間を $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ であらわすものとする. すなわち,

$$\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x \in H : x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \ (\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

次の問いに答えよ.

(i) $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \mathrm{span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ と仮定する. $z, w \in H$ に対し, $z \in \mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n, w\}$ かつ $w \in \mathrm{span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n, z\}$ ならば $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n, w\} = \mathrm{span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n, z\}$ が成り立つことを示せ.

(ii) $\{x_1, x_2\} \subset H$ が一次独立であると仮定する. このとき H の元 e_1, e_2 を $e_1 = x_1/\|x_1\|$, $e_2 = (x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1)/\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|$ と定義できることを示せ.

(iii) この e_1, e_2 に対して, $\{e_1, e_2\}$ は $\mathrm{span}\{x_1, x_2\} = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ をみたす正規直交系であることを示せ.

(iv) $\{x_n\}$ を H の一次独立な列とする. このときある正規直交系 $\{e_n\} \subset H$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ が成り立つことを示せ.

解答 (i) 任意の $u \in \mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n, w\}$ に対して, ある $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_0 \in \mathbb{C}$ が存在して

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_n + \alpha_0 w$$

とあらわせる. このとき, $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \mathrm{span}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ より, ある $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_n y_n$$

とあらわせる．また, $w \in \mathrm{span}\{y_1, y_2, \dots, y_n, z\}$ よりある $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \gamma_0 \in \mathbb{C}$ が存在して $w = \sum_{i=1}^n \gamma_n x_n + \gamma_0 z$ とあらわせるので,

$$u = \sum_{i=1}^n \beta_n y_n + \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^n \gamma_n y_n + \gamma_0 z \right) = \sum_{i=1}^n (\beta_n + \alpha_0 \gamma_n) y_n + \alpha_0 \gamma_0 z$$

となり, $u \in \mathrm{span}\{y_1, y_2, \dots, y_n, z\}$ が成り立つ．よって, $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n, w\} \subset \mathrm{span}\{y_1, y_2, \dots, y_n, z\}$. 逆も同様にして示されるので, $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n, w\} = \mathrm{span}\{y_1, y_2, \dots, y_n, z\}$ が成り立つことがわかる．

(ii) x_1, x_2 が一次独立なのでどちらも 0 でない．よってとくに $x_1 \neq 0$ なので $e_1 = x_1 / \|x_1\|$ は H の元として定義できる．一方, $y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1$ とすると,

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, e_1 \rangle}{\|x_1\|} x_1$$

より y_2 は x_1 と x_2 の線形結合であらわされる．このとき x_2 の係数は 0 でないので, x_1, x_2 が一次独立であることより, $y_2 \neq 0$ であることがわかる．したがって $e_2 = (x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1) / \|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|$ も H の元として定義される．

(iii) 定義より

$$\begin{aligned} \|e_1\| &= \left\| \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\| = \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|} = 1, \\ \|e_2\| &= \left\| \frac{x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|} \right\| = \frac{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|} = 1. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \langle e_2, e_1 \rangle &= \left\langle \frac{x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|}, e_1 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|} \langle x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1, e_1 \rangle \\ &= \frac{1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|} (\langle x_2, e_1 \rangle - \langle x_2, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle) \\ &= \frac{1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|} (\langle x_2, e_1 \rangle - \langle x_2, e_1 \rangle) = 0. \end{aligned}$$

さらに, 定義より明らかに $\mathrm{span}\{e_1\} = \mathrm{span}\{x_1\}$ であり,

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|} = -\frac{\langle x_2, e_1 \rangle / \|x_1\|}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|} x_1 + \frac{1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\|} x_2 \in \mathrm{span}\{x_1, x_2\}, \\ x_2 &= \|x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1\| e_2 + \langle x_2, e_1 \rangle e_1 \in \mathrm{span}\{e_1, e_2\} \end{aligned}$$

であるから, (i) より $\mathrm{span}\{x_1, x_2\} = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$ が成り立つ．

(iv) $\{x_n\}$ は一次独立なので, とくに $x_1 \neq 0$. よって $n = 1$ のとき, $e_1 = x_1 / \|x_1\|$ とすると $\{e_1\}$ は正規直交系で $\mathrm{span}\{x_1\} = \mathrm{span}\{e_1\}$ をみたす．次に, $n = k$ のとき, $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ をみたす正規直交系 $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ が存在すると仮定し, $n = k + 1$ のときにもこれらをみたすように e_{k+1} がとれることを示そう．y_{k+1} を

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

と定義する．このとき, もし $y_{k+1}=0$ ならば $x_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\langle x_{k+1},e_i\rangle e_i$ となり, $x_{k+1}\in\operatorname{span}\{e_1,e_2,\dots,e_k\}=\operatorname{span}\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ となるので, $\{x_n\}$ の一次独立性に矛盾する．したがって $y_{k+1}\neq 0$ である．ここで e_{k+1} を

$$e_{k+1}=\frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$$

と定義する．このとき,

$$\|e_{k+1}\|=\left\|\frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}\right\|=\frac{\|y_{k+1}\|}{\|y_{k+1}\|}=1$$

であり, さらに $j<k+1$ をみたす $j\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle e_{k+1},e_j\rangle &= \frac{1}{\|y_{k+1}\|}\langle y_{k+1},e_j\rangle\\
&= \frac{1}{\|y_{k+1}\|}\left\langle x_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\langle x_{k+1},e_i\rangle e_i, e_j\right\rangle\\
&= \frac{1}{\|y_{k+1}\|}\left(\langle x_{k+1},e_j\rangle-\sum_{i=1}^{k}\langle x_{k+1},e_i\rangle\langle e_i,e_j\rangle\right)\\
&= \frac{1}{\|y_{k+1}\|}(\langle x_{k+1},e_j\rangle-\langle x_{k+1},e_j\rangle)\\
&= 0
\end{aligned}$$

より $\langle e_{k+1},e_j\rangle=\langle e_j,e_{k+1}\rangle=0$ を得る． さらに, 帰納法の仮定より $i=1,2,\dots,k$ に対して $e_i\in\operatorname{span}\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ であるから, e_{k+1} の定義より

$$e_{k+1}\in\operatorname{span}\{x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1}\}$$

であり, また

$$x_{k+1}=y_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\langle x_{k+1},e_i\rangle e_i=\|y_{k+1}\|e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\langle x_{k+1},e_i\rangle e_i$$

であることから $x_{k+1}\in\operatorname{span}\{e_1,e_2,\dots,e_k,e_{k+1}\}$ である．したがって, (i) より

$$\operatorname{span}\{x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1}\}=\operatorname{span}\{e_1,e_2,\dots,e_k,e_{k+1}\}$$

が成り立つ．したがって, $n=k+1$ のときも成り立つことが示された．