関数解析学 演習問題解答

木村泰紀 [*]

2019 年 10 月 31 日出題

問題 1. H_1, H_2 を同一のスカラーをもつ内積空間とし, $T : H_1 \to H_2$ を有界線形作用素とする. T の作用素ノルムを $\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|T(x)\|$ で定義するとき, 次の問いに答えよ.

(i) $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ が成り立つことを示せ.

(ii) $\|T\| = \inf\{K \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \le K\|x\|,\ \forall x \in H_1\}$ が成り立つことを示せ.

解答 (i) 作用素ノルムの定義より, $\|T\| \ge \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ が成り立つことは明らか. 逆の不等式が成り立つことを示す. $\|z\| \le 1$ をみたす $z \in H_1$ を任意にとる. $z \ne 0$ のとき,

$$y = \frac{1}{\|z\|} z$$

とすると $\|y\| = 1$ で, さらに $z = \|z\|y$ より

$$\|T(z)\| = \big\|T(\|z\|y)\big\| = \big\|\|z\|T(y)\big\| = \|z\|\|T(y)\| \le \|T(y)\| \le \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

一方, $z = 0$ のときは明らかに

$$\|T(z)\| = \|T(0)\| = 0 \le \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

以上より, $\|z\| \le 1$ をみたす任意の $z \in H_1$ に対して $\|T(z)\| \le \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ が成り立つ. したがって

$$\|T\| = \sup_{\|z\| \le 1} \|T(z)\| \le \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

以上より $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$ が示された.

(ii) 作用素ノルムの性質より, 任意の $x \in H_1$ に対して $\|T(x)\| \le \|T\|\|x\|$ が成り立つ. よって

$$\|T\| \in \{K \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \le K\|x\|,\ \forall x \in H_1\}$$

であり, このことと下限の定義から

$$\|T\| \ge \inf\{K \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \le K\|x\|,\ \forall x \in H_1\}$$

が導かれる.

逆の不等式が成り立つことを示す. 下限の定義より, 実数列 $\{K_n\} \subset \{K \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \le K\|x\|,\ \forall x \in H_1\}$ で $\lim_{n\to\infty} K_n = \inf\{K \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \le K\|x\|,\ \forall x \in H_1\}$ をみたすものがとれる. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $x \in H_1$ に対して,

$$\|T(x)\| \le K_n\|x\|$$

[*] 東邦大学理学部情報科学科. https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/

が成り立つ．とくに, $\|x\| \leq 1$ をみたす任意の $x \in H_1$ に対して

$$\|T(x)\| \leq K_n\|x\| \leq K_n$$

となる．よって

$$\|T\| \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| \leq K_n$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ について成り立つ．ここで $n \to \infty$ とすると

$$\|T\| \leq \lim_{n\to\infty} K_n = \inf\{K \in \mathbb{R} : \|T(x)\| \leq K\|x\|,\ \forall x \in H_1\}$$

となり, 示された.

問題 2.　H_1, H_2, H_3 を同一のスカラーをもつ内積空間とし, $S : H_1 \to H_2$, $T : H_2 \to H_3$ をそれぞれ有界線形作用素とする．次の問いに答えよ.

(i) $T \circ S$ も有界線形作用素であることを示せ.
(ii) $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$ が成り立つこと示せ.

解答　(i) 任意のスカラー α, β と $x, y \in H_1$ に対し,

$$\begin{aligned}(T \circ S)(\alpha x + \beta y) &= T(S(\alpha x + \beta y)) \\ &= T(\alpha S(x) + \beta S(y)) \\ &= \alpha T(S(x)) + \beta T(S(y)) \\ &= \alpha(T \circ S)(x) + \beta(T \circ S)(y).\end{aligned}$$

よって $T \circ S$ は線形である．また, S, T はともに有界なので, ある実数 K_1, K_2 が存在して, 任意の $x \in H_1$ および任意の $y \in H_2$ に対して

$$\|S(x)\| \leq K_1\|x\|,\ \|T(y)\| \leq K_2\|y\|$$

がそれぞれ成り立つ．よって, 任意の $x \in H_1$ に対して

$$\|(T \circ S)(x)\| = \|T(S(x))\| \leq K_2\|S(x)\| \leq K_2K_1\|x\|.$$

よって, $T \circ S$ は有界である.

(ii) 作用素ノルムの定義より,

$$\begin{aligned}\|T \circ S\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(T \circ S)(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(S(x))\| \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|T\|\|S(x)\| \\ &= \|T\| \sup_{\|x\|\leq 1} \|S(x)\| \\ &= \|T\|\|S\|.\end{aligned}$$

よって示された.