関数解析学 演習問題解答

木村泰紀 *

2019 年 11 月 7 日出題

問題 1. H_1, H_2 をそれぞれスカラーを $\mathbb{K}$ とする内積空間とし, H_1 から H_2 への有界線形作用素の全体を $B(H_1, H_2)$ であらわす. $S, T \in B(H_1, H_2)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ とするとき, 各 $x \in H_1$ に対して

$$\begin{aligned}(S+T)(x) &= S(x) + T(x),\\ (\alpha T)(x) &= \alpha T(x)\end{aligned}$$

によって作用素 $S + T : H_1 \to H_2$ および $\alpha T : H_1 \to H_2$ を定義する. 次の問いに答えよ.

(i) $S + T \in B(H_1, H_2)$ を示せ.
(ii) $\alpha T \in B(H_1, H_2)$ を示せ.

解答 (i) $\beta, \gamma \in \mathbb{K}$ と $x, y \in H_1$ に対して

$$\begin{aligned}(S+T)(\beta x + \gamma y) &= S(\beta x + \gamma y) + T(\beta x + \gamma y)\\ &= \beta S(x) + \gamma S(y) + \beta T(x) + \gamma T(y)\\ &= \beta(S(x) + T(x)) + \gamma(S(y) + T(y))\\ &= \beta(S+T)(x) + \gamma(S+T)(y).\end{aligned}$$

よって $S + T$ は線形である. また, S, T は有界なので, ある $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\|S(x)\| \le K_1\|x\|,\ \|T(x)\| \le K_2\|x\|$$

が任意の $x \in H_1$ について成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned}\|(S+T)(x)\| &= \|S(x) + T(x)\|\\ &\le \|S(x)\| + \|T(x)\|\\ &\le K_1\|x\| + K_2\|x\|\\ &\le (K_1 + K_2)\|x\|\end{aligned}$$

が任意の $x \in H_1$ について成り立つので, $S + T$ は有界である. したがって $S + T \in B(H_1, H_2)$ が示された.

(ii) $\beta, \gamma \in \mathbb{K}$ と $x, y \in H_1$ に対して

$$\begin{aligned}(\alpha T)(\beta x + \gamma y) &= \alpha T(\beta x + \gamma y)\\ &= \alpha(\beta T(x) + \gamma T(y))\\ &= \beta\alpha T(x) + \gamma\alpha T(y)\\ &= \beta(\alpha T)(x) + \gamma(\alpha T)(y).\end{aligned}$$

* 東邦大学理学部情報科学科. https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/

よって αT は線形である. また, T が有界であることを用いて,

$$\|(\alpha T)(x)\| = \|\alpha T(x)\| \leq |\alpha|\|T(x)\| \leq |\alpha|K_2\|x\|$$

が任意の $x \in H_1$ について成り立つので, αT は有界である. したがって $\alpha T \in B(H_1, H_2)$ が示された.

問題 2. H_1, H_2, H_3 をそれぞれスカラーを $\mathbb{K}$ とする内積空間とし, 作用素の列 $\{S_n\} \subset B(H_1, H_2)$, $\{T_n\} \subset B(H_2, H_3)$ がそれぞれ $S_n \to S_0 \in B(H_1, H_2)$, $T_n \to T_0 \in B(H_2, H_3)$ をみたすとする. 次の問いに答えよ.

(i) $S \in B(H_1, H_2)$ と $T_1, T_2 \in B(H_2, H_3)$ に対して $(T_1 - T_2) \circ S = T_1 \circ S - T_2 \circ S$ が成り立つことを示せ.

(ii) $S_1, S_2 \in B(H_1, H_2)$ と $T \in B(H_2, H_3)$ に対して $T \circ (S_1 - S_2) = T \circ S_1 - T \circ S_2$ が成り立つことを示せ.

(iii) 合成作用素の列 $\{T_n \circ S_n\} \subset B(H_1, H_3)$ について

$$T_n \circ S_n \to T_0 \circ S_0$$

が成り立つことを示せ.

解答 (i) 合成写像の定義等を用いると, 任意の $x \in H_1$ に対して

$$\begin{aligned}((T_1 - T_2) \circ S)(x) &= (T_1 - T_2)(S(x)) \\ &= T_1(S(x)) - T_2(S(x)) \\ &= (T_1 \circ S)(x) - (T_2 \circ S)(x) \\ &= (T_1 \circ S - T_2 \circ S)(x)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $(T_1 - T_2) \circ S = T_1 \circ S - T_2 \circ S$ である.

(ii) 合成写像の定義と T の線形性等を用いると, 任意の $x \in H_1$ に対して

$$\begin{aligned}(T \circ (S_1 - S_2))(x) &= T((S_1 - S_2)(x)) \\ &= T(S_1(x) - S_2(x)) \\ &= T(S_1(x)) - T(S_2(x)) \\ &= (T \circ S_1)(x) - (T \circ S_2)(x) \\ &= (T \circ S_1 - T \circ S_2)(x)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $T \circ (S_1 - S_2) = T \circ S_1 - T \circ S_2$ である.

(iii) 合成作用素について $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$ が成り立つことを用いると,

$$\begin{aligned}\|T_n \circ S_n - T_0 \circ S_0\| &\leq \|T_n \circ S_n - T_n \circ S_0\| + \|T_n \circ S_0 - T_0 \circ S_0\| \\ &\leq \|T_n \circ (S_n - S_0)\| + \|(T_n - T_0) \circ S_0\| \\ &\leq \|T_n\|\|S_n - S_0\| + \|T_n - T_0\|\|S_0\|\end{aligned}$$

ここで, $\{T_n\}$ は T_0 に収束することから, $\{\|T_n\|\}$ は有界, すなわち, ある $M \geq 0$ が存在して $\|T_n\| \leq M$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ. よって

$$\|T_n \circ S_n - T_0 \circ S_0\| \leq M\|S_n - S_0\| + \|T_n - T_0\|\|S_0\| \to 0. \ (n \to \infty)$$

したがって $T_n \circ S_n \to T_0 \circ S_0$ が示された.