数理統計学 演習問題解答

木村泰紀 *

2019 年 10 月 4 日出題

問題 1. 事象 E の確率 $P(E)$ に対し, E の余事象 E^{C} の確率は $1 - P(E)$ であらわされることを証明せよ.

解答 余事象の定義より $E \cap E^{\mathsf{C}} = \emptyset$ であり, さらに $E \cup E^{\mathsf{C}} = \Omega$ である. したがって, 確率の性質から

$$1 = P(\Omega) = P(E \cup E^{\mathsf{C}}) = P(E) + P(E^{\mathsf{C}}).$$

よって

$$P(E^{\mathsf{C}}) = 1 - P(E)$$

が得られる.

問題 2. 立方体ではない 6 面体のさいころに $1, 2, 3, 4, 5, 6$ の目がふられており, さいころを 1 回ふる試行に対して次のような確率をもっているとする.

$$P(\{1,2,3\}) = \frac{2}{5}, \quad P(\{2,3,4\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{5,6\}) = \frac{2}{5}, \quad P(\{3\}) = \frac{1}{10}, \quad P(\{1,2,3,5\}) = \frac{7}{10}.$$

それぞれの目が出る確率 $P(\{1\}), P(\{2\}), P(\{3\}), P(\{4\}), P(\{5\}), P(\{6\})$ を求めよ.

解答 まず

$$\frac{7}{10} = P(\{1,2,3,5\}) = P(\{1,2,3\}) + P(\{5\}) = \frac{2}{5} + P(\{5\})$$

より $P(\{5\}) = 7/10 - 2/5 = 7/10 - 4/10 = 3/10$. さらに

$$\frac{2}{5} = P(\{5,6\}) = P(\{5\} + P(\{6\}) = \frac{3}{10} + P(\{6\})$$

から $P(\{6\}) = 2/5 - 3/10 = 4/10 - 3/10 = 1/10$. 次に

$$\begin{aligned}
1 = P(\Omega) &= P(\{1,2,3,4,5,6\}) \\
&= P(\{1,2,3\}) + P(\{4,5,6\}) \\
&= P(\{1,2,3\}) + P(\{4\}) + P(\{5,6\}) \\
&= \frac{2}{5} + P(\{4\}) + \frac{2}{5} \\
&= \frac{4}{5} + P(\{4\}).
\end{aligned}$$

* 東京農工大学工学部非常勤講師, 東邦大学理学部情報科学科. https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/

よって $P(\{4\}) = 1 - 4/5 = 1/5$. 同様にして

$$\begin{aligned}
1 = P(\Omega) &= P(\{1,2,3,4,5,6\}) \\
&= P(\{1,2,3,4\}) + P(\{5,6\}) \\
&= P(\{1\}) + P(\{2,3,4\}) + P(\{5,6\}) \\
&= P(\{1\}) + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \\
&= P(\{1\}) + \frac{5}{10} + \frac{4}{10} \\
&= P(\{1\}) + \frac{9}{10}.
\end{aligned}$$

よって $P(\{1\}) = 1 - 9/10 = 1/10$. 一方, $P(\{3\}) = 1/10$ であることから

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5} &= P(\{1,2,3\}) \\
&= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) \\
&= \frac{1}{10} + P(\{2\}) + \frac{1}{10} \\
&= P(\{2\}) + \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

より $P(\{2\}) = 2/5 - 1/5 = 1/5$. 以上より,

$$P(\{1\}) = \frac{1}{10}, \quad P(\{2\}) = \frac{1}{5}, \quad P(\{3\}) = \frac{1}{10}, \quad P(\{4\}) = \frac{1}{5}, \quad P(\{5\}) = \frac{3}{10}, \quad P(\{6\}) = \frac{1}{10}.$$