

数理統計学 演習問題解答

木村泰紀*

2019年10月18日出題

問題1. 確率変数 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が有限個の値 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ をとると仮定する. a, b を定数とするととき, 次の問いに答えよ.

- (i) $E(aX + b) = aE(X) + b$ が成り立つことを示せ.
- (ii) $V(aX + b) = a^2V(X)$ が成り立つことを示せ.

解答 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $X = x_i$ となる確率を p_i とする.

(i) 期待値の定義より

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b)p_i \\ &= \sum_{i=1}^n ax_i p_i + \sum_{i=1}^n bp_i \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i p_i + b \sum_{i=1}^n p_i \\ &= aE(X) + b \cdot 1 \\ &= aE(X) + b. \end{aligned}$$

よって成り立つ.

(ii) (i) の結果と分散の定義より

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - E(aX + b))^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - aE(X) - b)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^n a^2 (x_i - E(X))^2 p_i \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i \\ &= a^2 V(X). \end{aligned}$$

よって成り立つ.

* 東京農工大学工学部非常勤講師, 東邦大学理学部情報科学科. <https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/>

問題 2. 立方体ではない 6 面体のさいころがあり、ふったときに 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が出る確率はそれぞれ $1/10, 3/10, 1/10, 1/10, 1/5, 1/5$ であるとする. このさいころを 2 回ふる試行において、確率変数 X を 1 回目に出た目と 2 回目に出た目の和で定義するとき、 X の確率分布表を求めよ.

解答 標本空間を $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$ のようにあらわすことにする. それぞれの目が出る確率を表であらわすと次のようになる.

	1	2	3	4	5	6
1	$1/100$	$3/100$	$1/100$	$1/100$	$2/100$	$2/100$
2	$3/100$	$9/100$	$3/100$	$3/100$	$6/100$	$6/100$
3	$1/100$	$3/100$	$1/100$	$1/100$	$2/100$	$2/100$
4	$1/100$	$3/100$	$1/100$	$1/100$	$2/100$	$2/100$
5	$2/100$	$6/100$	$2/100$	$2/100$	$4/100$	$4/100$
6	$2/100$	$6/100$	$2/100$	$2/100$	$4/100$	$4/100$

X のとりうる値は 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 の 11 通りである. 例えば $X = 4$ となる確率は事象 $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ の確率であるから

$$\frac{1}{100} + \frac{9}{100} + \frac{1}{100} = \frac{11}{100}.$$

同様の計算をとりうるそれぞれの値に対して計算をすると、 X の確率分布表は次のようになる.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{4}{100}$

問題 3. コインを 2 回投げる試行を考える. 確率変数 X を、表が出る回数によって、0 回ならば 0, 1 回ならば 10, 2 回ならば 50 を値としてとるとする. 次の問いに答えよ.

- (i) X の確率分布表を求めよ.
- (ii) X の期待値 $E(X)$ および分散 $V(X)$ を求めよ.

解答 (i) 表が 1 回だけ出るのは、1 回目が表で 2 回目が裏という場合と 1 回目が裏で 2 回目が表という場合の 2 通りであるから、表が 1 回だけ出る事象の確率は $2/4 = 1/2$ である. 一方、表が 0 回出る確率と表が 2 回出る確率はともに $1/4$ であるから、確率分布表は次の通りとなる.

X	0	10	50
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

- (ii) 期待値と分散の定義によって計算すると、

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{1}{2} + 50 \cdot \frac{1}{4} = 0 + 5 + \frac{25}{2} = \frac{35}{2}.$$

また,

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(0 - \frac{35}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(10 - \frac{35}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(50 - \frac{35}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1225}{16} + \frac{225}{8} + \frac{4225}{16} \\ &= \frac{1225 + 450 + 4225}{16} \\ &= \frac{5900}{16} = \frac{1475}{4}. \end{aligned}$$