

数理統計学 演習問題解答

木村泰紀*

2019年10月25日出題

問題 1. ある薬品をマウスに投与する実験で、死亡率が 10% であったとする。無作為に選んだ 5 匹で実験をする場合の死亡数を X とする。 X が二項分布にしたがうと仮定するとき、次の問いに答えよ。

- (i) 確率変数 X の確率分布表を作成せよ。
- (ii) X の期待値と分散を求めよ。

解答 (i) 確率変数 X の確率分布は二項分布 $B(5, 1/10)$ となる。よって $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対して

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{5-k}$$

となる。したがって、確率分布表は次のようになる。

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{59049}{100000}$	$\frac{32805}{100000}$	$\frac{7290}{100000}$	$\frac{810}{100000}$	$\frac{45}{100000}$	$\frac{1}{100000}$

- (ii) 確率分布 $B(n, p)$ をもつ確率変数の期待値は np 、分散は $np(1-p)$ であるから、

$$E(X) = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2},$$
$$V(X) = 5 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{20}.$$

問題 2. ある工場で生産している部品は 0.5% の割合で不良品が含まれているとする。1000 個の部品から 3 個を無作為に選んだ場合に含まれる不良品の個数を X とする。 X が超幾何分布にしたがうと仮定するとき、次の問いに答えよ。

- (i) 選んだ中に不良品が k 個含まれる確率 $P(X = k)$ を k の式であらわせ。
- (ii) 選んだ 3 個すべてが不良品である確率を求めよ。
- (iii) 確率変数 X の確率分布表を作成せよ。

* 東京農工大学工学部非常勤講師, 東邦大学理学部情報科学科. <https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/>

解答 (i) 1000 個の部品のうち 0.5% にあたる 5 個が不良品であると考えられる。確率変数 X は超幾何分布にしたがうので

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{1000-3}{5-k}}{\binom{1000}{5}}.$$

(ii) $k = 3$ を (i) の式に代入して

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{\binom{3}{3} \binom{1000-3}{5-3}}{\binom{1000}{5}} = \frac{3!}{3!(3-3)!} \frac{997!}{2!(997-2)!} \frac{5!(1000-5)!}{1000!} \\ &= \frac{997!}{2!995!} \frac{5!995!}{1000!} = \frac{997!}{2!} \frac{5!}{1000!} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1000 \cdot 999 \cdot 998} \\ &= \frac{1}{50 \cdot 333 \cdot 998} = \frac{1}{16616700}. \end{aligned}$$

(iii) (ii) と同様にして $k = 0, 1, 2$ の場合も求めると

$$P(X = 0) = \frac{32736893}{33233400}, \quad P(X = 1) = \frac{98903}{6646680}, \quad P(X = 2) = \frac{199}{3323340}$$

となるので、確率分布表は次のようになる。

X	0	1	2	3
P	$\frac{32736893}{33233400}$	$\frac{98903}{6646680}$	$\frac{199}{3323340}$	$\frac{1}{16616700}$