数理統計学 演習問題解答

木村泰紀 *

2019 年 11 月 1 日出題

問題 1. さいころを繰り返し投げ, 2 以下の目が出るまで続ける試行を考える. 2 以下の目が出るまでに続いた, 2 より大きい目の出た回数を X とするとき, 次の問いに答えよ.

(i) $k+1$ 回目に 2 以下の目が出る確率 $P(X=k)$ を求めよ.

(ii) 同様の試行において, A, B の 2 人が交互にさいころを投げるとする. A が 2 以下の目を出す確率を求めよ.

解答 (i) 確率変数 X の分布は $p=1/3$ の幾何分布となる. よって

$$P(X=k)=p(1-p)^k=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{2^k}{3^{k+1}}.$$

(ii) 奇数回目に 2 以下の目が出る確率を求めればよいので

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}P(X=2j)&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2j}\\&=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^j\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-4/9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{9-4}=\frac{3}{9-4}\\&=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

問題 2. 確率変数 X の分布がパラメタ λ のポアソン分布のとき, 次の問いに答えよ.

(i) $k=2,3,4,\dots$ に対して

$$k^2P(X=k)=\lambda^2e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+kP(X=k)$$

が成り立つことを示せ.

(ii) X の期待値は $E(X)=\lambda$ である. 指数関数は

$$e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

とあらわせることを用いて, X の分散 $V(X)$ を求めよ.

* 東京農工大学工学部非常勤講師, 東邦大学理学部情報科学科. `https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/kimura/yasunori/`

解答　(i) ポアソン分布の定義より

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(k=0,1,2,\dots)$$

が成り立つので, 左辺と右辺の差を計算すると

$$\begin{aligned}
k^2P(X=k)-\lambda^2e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+kP(X=k)&=k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\lambda^2e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}-k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\
&=k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda}-k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\
&=\frac{k^2\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\frac{k(k-1)\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\frac{k\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\
&=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k^2-k(k-1)-k)\\
&=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k^2-k^2+k-k)\\
&=0.
\end{aligned}$$

よって示された.

(ii) 分散 $V(X)$ は $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ をみたすことを用いると, (i) より

$$\begin{aligned}
V(X)&=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P(X=k)-\lambda^2\\
&=0^2\cdot P(X=0)+1^2\cdot P(X=1)+\sum_{k=2}^{\infty}k^2P(X=k)-\lambda^2\\
&=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\lambda^2e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+kP(X=k)\right)-\lambda^2\\
&=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)-\lambda^2\\
&=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda-\lambda^2.
\end{aligned}$$

ここで, $n=k-2$ とすると

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=e^{\lambda}.$$

よって

$$V(X)=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$