東邦大学理学部情報科学科

2014 年度

卒業研究論文

コラッツ予想の変形について

提出日　2015 年 1 月 30 日（金）

指導教員　白柳　潔

提出者　　山中　陽子

2014 年度　東邦大学理学部情報科学科　卒業研究

コラッツ予想の変形について

学籍番号　5511104
氏名　山中　陽子

要旨

　コラッツ予想というのは、任意の 0 でない自然数 n をとり、n が偶数の場合 n を 2 で割り、n が奇数の場合 n を 3 倍して 1 を加えるという操作を繰り返していくと、必ず有限回で 1 に到達するであろうという予想である。この予想は 1937 年にローター・コラッツが提示したことから、コラッツ予想と呼ばれている。未だこの主張が真かどうかは証明されていない。よって、数学の未解決問題とされている。

　本研究では、前述のコラッツ予想の定義式を一般化し、3 以上の自然数 m に対して、n が m の倍数の場合 n を m で割り、そうでない場合 n を(m+1)倍して m−(n mod m)を加えるという操作を考える。Maple による計算機実験を行った結果、従来のコラッツ予想と似たような法則が確認された。

目次

第1章　　序論

１－１　　序論

　コラッツ予想というのは、任意の 0 でない自然数 n をとり
n が偶数の場合 n を 2 で割り、n が奇数の場合 n を 3 倍して 1 を 1 加えるという操作を繰り返していくと、必ず有限回で 1 に到達するであろうという予想である。
これを式で表すと以下のようになる。

$$
\begin{cases}
\text{(奇数の場合)}\,3n+1 & (if\ n\,mod\,2 \equiv 1) \\
\text{(偶数の場合)}\ \dfrac{n}{2} & (if\ n\,mod\,2 \equiv 0)
\end{cases}
$$

　この予想は 1937 年にローター・コラッツが提示したことから、コラッツ予想と呼ばれている。未だにこの主張が真かどうかは証明されていない。よって、数学の未解決問題とされている。コンピュータを用いた計算より、3×2^{53} まで反例がないことが確かめられている。

計算例

n　=　10　(偶数)
10 ÷ 2 = 5
5 × 3 + 1 = 16
16 ÷ 2 = 8
8 ÷ 2 = 4
4 ÷ 2 = 2
2 ÷ 2 = 1

n　=　11　(奇数)
11 × 3 + 1 = 34
28 ÷ 2 = 17
17 × 3 + 1 = 52
52 ÷ 2 = 26
26 ÷ 2 = 13
13 × 3 + 1 = 40
40 ÷ 2 = 20
20 ÷ 2 = 10
10 ÷ 2 = 5
5 × 3 + 1 = 16
16 ÷ 2 = 8
8 ÷ 2 = 4
4 ÷ 2 = 2
2 ÷ 2 = 1

１－２　これまでの研究

コラッツ問題を解決する糸口を見つけるために、本研究室は過去 2 年以上に渡って先輩方が研究を行った。
飯塚先輩の研究は、奇数の場合、3 倍して 1 を引く操作を 3x−1 問題、また、3x−r 問題として、r に様々な数を代入していき法則を見つけ出した。(2013 年度卒業論文)
峰岸先輩の研究は、1 やある値に収束するような組み合わせのデータをできる限り集めて統計し、そこから(p,q,r)に関する法則性を見つけ出した。(2013 年度卒業論文)

１－３　研究目的

コラッツ予想の式を変形して、以下のような式を作った。

$$
\begin{cases}
\dfrac{n}{m} & if\ \ m|n \\[2ex]
(m+1)n + \{m - (n \bmod m)\} & if\ \ m \nmid n
\end{cases}
$$

n が m の倍数の時、n を m で割る。
n が m の倍数でない時、n を(m+1)倍より大きな最小の m の倍数にする。

この式を用いて、計算機ソフト Maple 使用してコラッツ予想の解決の糸口を探る。
また、結果だけではなく法則や特徴にも注目し研究を進める。

第２章　　従来のコラッツ予想

２－１　Maple によるプログラム

　従来のコラッツ予想を計算処理システム Maple で計算をすると以下のようになる。

コラッツ予想の Maple プログラム

$$
\begin{array}{l}
collatz := \mathbf{proc}(n) \\
\mathbf{if}\ n = 1\ \mathbf{then} \\
print(1); \\
\mathbf{else} \\
\mathbf{if}\ type(n, even)\ \mathbf{then} \\
print\left(\dfrac{n}{2}\right); \\
collatz\left(\dfrac{n}{2}\right); \\
\mathbf{elif}\ type(n, odd)\ \mathbf{then} \\
print(3\,n + 1); \\
collatz(3\,n + 1); \\
\mathbf{end\ if}; \\
\mathbf{end\ if}; \\
\mathbf{end\ proc};
\end{array}
$$

２－２　実行結果

任意の 0 でない自然数 n が 30(偶数)の場合

> $collatz(30);$

$$15$$
$$46$$
$$23$$
$$70$$
$$35$$
$$106$$
$$53$$
$$160$$
$$80$$
$$40$$
$$20$$
$$10$$
$$5$$
$$16$$
$$8$$
$$4$$
$$2$$
$$1$$

任意の 0 でない自然数 n が 11(奇数)の場合

```
> collatz(11);
```

34

17

52

26

13

40

20

10

5

16

8

4

2

1

このように計算を繰り返すと有限回で 1 に到達するであろうという予想がコラッツ予想である。

第３章　コラッツ予想の式変形

３－１　コラッツ予想の式変形

　従来のコラッツ予想は n が偶数か奇数、つまり n mod 2 の値によって次に行う操作を変えていた。n が奇数の際に行う操作の式を 2 を用いて表すと、以下のようになると気づいた。

$$3n+1=(2+1)n+\{2-1\}$$

また､3 倍した後 1 を加える操作は 3 倍した後その数以上の最小の偶数にする操作である。よって以下の式に書き換えることができる。

$$(2+1)n+\{2-1\}=(2+1)n+\{2-(n \bmod 2)\}$$

 つまり､2 以外の自然数 m を法とした変形コラッツ予想は以下の式で表すことができる。

$$\begin{cases} \dfrac{n}{m} & (\mathit{if}\ m \mid n) \\ (m+1)n+\{m-(n \bmod m)\} & (\mathit{if}\ m \nmid n) \end{cases}$$

　この変形したコラッツ予想のプログラムを実装して、新たな法則や従来のコラッツ予想の解決の糸口を探していく。

３－２　変形したコラッツ予想のプログラム

$$
\begin{aligned}
&\mathit{collatz} := \mathbf{proc}(n, m)\\
&\ \mathbf{if}\ n = 1\ \mathbf{then}\\
&\ \mathit{print}(1);\\
&\\
&\mathbf{else}\\
&\mathbf{if}\ (n\ \mathbf{mod}\ m = 0)\ \mathbf{then}\\
&\ \mathit{print}\left(\frac{n}{m}\right);\\
&\ \mathit{collatz}\left(\frac{n}{m}, m\right);\\
&\ \mathbf{else}\\
&\ \mathit{print}((m+1)n + (m - (n\ \mathbf{mod}\ m)));\\
&\ \mathit{collatz}((m+1)n + (m - (n\ \mathbf{mod}\ m)), m);\\
&\ \mathbf{end\ if};\\
&\ \mathbf{end\ if};\\
&\ \mathbf{end\ proc};
\end{aligned}
$$

３－３　実行結果

m の値が 3 の時（mod 3 コラッツ）

> $collatz(36, 3)$

$$12$$
$$4$$
$$18$$
$$6$$
$$2$$
$$9$$
$$3$$
$$1$$

計算例

36÷3 = 12
12÷3 = 4
(3+1)4+{3-(4 mod 3)} = 18
18÷3 = 6
6÷3 = 2
(3+1)2+{3-(2 mod 3)} = 9
9÷3 = 3
3÷3 = 1

> $collatz(21, 3)$

$$7$$

$$30$$

$$10$$

$$42$$

$$14$$

$$57$$

$$19$$

$$78$$

$$26$$

$$105$$

$$35$$

$$141$$

$$47$$

$$189$$

$$63$$

$$21$$

$$7$$

最小値が 7 の無限ループになった。
mod 3 コラッツの場合、全て 1 に到達するとは限らない。
1 に到達する場合と、最小値が 7 になる場合の 2 通りになることが分かった。

m の値が 4 の時（**mod 4** コラッツ）

> $collatz(10, 4)$

52

13

68

17

88

22

112

28

7

36

9

48

12

3

16

4

1

> $collatz(37, 4)$

188

47

236

59

296

74

372

93

468

117

588

147

736

184

46

232

58

292

73

368

92

23

最小値が 23 の無限ループになった。
mod4 コラッツの場合、全て 1 に到達するとは限らない。
1 に到達する場合と、最小値が 23 になる場合の 2 通りになることが分かった。

m の値が５の時（**mod 5** コラッツ）

> $collatz(34, 5)$

$$205$$

$$41$$

$$250$$

$$50$$

$$10$$

$$2$$

$$15$$

$$3$$

$$20$$

$$4$$

$$25$$

$$5$$

$$1$$

> $collatz(30, 5)$

$$6$$
$$40$$
$$8$$
$$50$$
$$10$$
$$2$$
$$15$$
$$3$$
$$20$$
$$4$$
$$25$$
$$5$$
$$1$$

mod 5 コラッツの場合、全て1に到達することが確認できた。

m の値が 6 の時（**mod 6** コラッツ）

> $collatz(17, 6)$

$$120$$
$$20$$
$$144$$
$$24$$
$$4$$
$$30$$
$$5$$
$$36$$
$$6$$
$$1$$

> $collatz(54, 6)$

$$9$$
$$66$$
$$11$$
$$78$$
$$13$$
$$96$$
$$16$$
$$114$$
$$19$$
$$138$$
$$23$$

最小値が 23 の無限ループになった。

> $collatz(81, 6)$

$$570$$

$$95$$

$$666$$

$$111$$

$$780$$

$$130$$

$$912$$

$$152$$

$$1068$$

$$178$$

$$1248$$

$$208$$

$$1458$$

$$243$$

$$1704$$

$$284$$

$$1992$$

$$332$$

$$2328$$

$$388$$

$$2718$$

$$453$$

$$3174$$

$$529$$

$$3708$$

$$618$$

$$103$$

726

121

852

142

996

166

1164

194

1362

227

1590

265

1860

310

2172

362

2538

423

2964

494

3462

577

4044

674

4722

787

5514

919

6438

1073

7512

1252

8766

1461

10230

1705

11940

1990

13932

2322

387

2712

452

3168

528

88

最小値が 88 の無限ループになった。

mod6 コラッツの場合、全て 1 に到達するとは限らない。
1 に到達する場合と、最小値が 23、88 になる場合の 3 通りになることが分かった。

m の値が 7 の時（mod 7　コラッツ）

> $collatz(12, 7)$

98

14

2

21

3

28

4

35

5

42

6

49

7

1

1

mod 7　コラッツの場合、全て1に到達することが確認できた。

m の値が 8 の時（mod 8 コラッツ）

> $collatz(540, 8)$

$$4864$$
$$608$$
$$76$$
$$688$$
$$86$$
$$776$$
$$97$$
$$880$$
$$110$$
$$992$$
$$124$$
$$1120$$
$$140$$
$$1264$$
$$158$$
$$1424$$
$$178$$
$$1608$$
$$201$$
$$1816$$
$$227$$
$$2048$$
$$256$$
$$32$$
$$4$$
$$40$$

5

48

6

56

7

64

8

1

mod 8 コラッツの場合、全て1に到達することが確認できた。

m の値が 9 の時（mod 9　コラッツ）

> $collatz(2, 9)$

27

3

36

4

45

5

54

6

63

7

72

8

81

9

1

> $collatz(451, 9)$

$$4518$$

$$502$$

$$5022$$

$$558$$

$$62$$

$$621$$

$$69$$

$$693$$

$$77$$

$$774$$

$$86$$

$$864$$

$$96$$

$$963$$

$$107$$

$$1071$$

$$119$$

$$1197$$

$$133$$

$$1332$$

$$148$$

$$1485$$

$$165$$

$$1656$$

$$184$$

$$1845$$

$$205$$

2052

228

2286

254

2547

283

2835

315

35

最小値が 35 の無限ループになった。

mod 9 コラッツの場合、全て 1 に到達するとは限らない。
1 に到達する場合と、最小値が 35 になる場合の 2 通りになることが分かった。

上記の結果のまとめ

mod 3 コラッツ $\begin{cases}\textbf{1に到達}\\ \textbf{最小値 7}\end{cases}$

mod 4 コラッツ $\begin{cases}\textbf{1に到達}\\ \textbf{最小値 23}\end{cases}$

mod 5 コラッツ—1 に到達

mod 6 コラッツ $\begin{cases}\textbf{1に到達}\\ \textbf{最小値 23}\\ \textbf{最小値 88}\end{cases}$

mod 7 コラッツ—1 に到達

mod 8 コラッツ—1 に到達

mod 9 コラッツ $\begin{cases}\textbf{1に到達}\\ \textbf{最小値 35}\end{cases}$

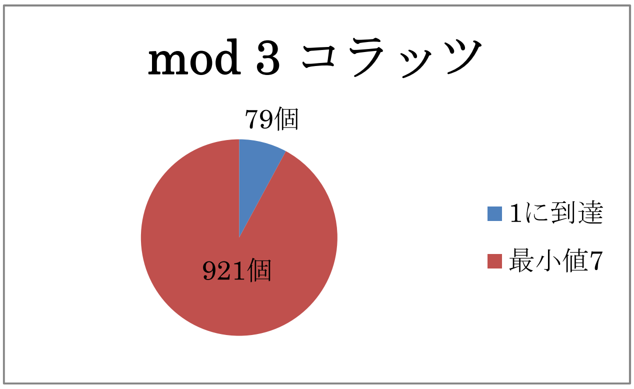
第４章　１に到達する個数と割合を調べる

４－１　１～１０００の範囲

1~1000までの数で1に到達する回数を調べるプログラム(mod 3コラッツの場合)

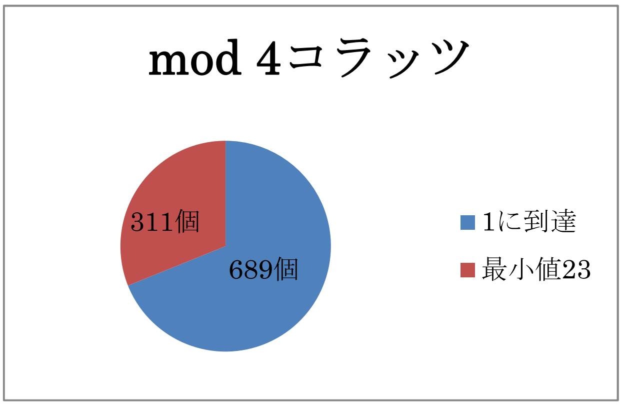
```
count := 0;
for i from 1 to 1000 do
if collatz(i, 3) = 1 then
#print(i);
count := count + 1;
end if;
end do;
print("count:", count);
```

上記の結果をmod 3コラッツ～mod 9コラッツまでを円グラフにまとめた。



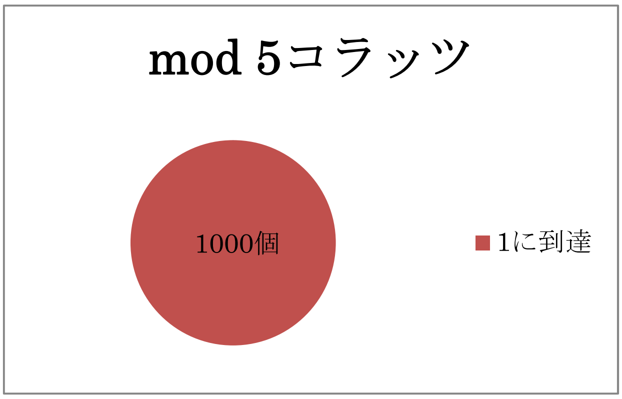
mod 3 コラッツ	数の個数	割合
1 に到達	79	7.9%
最小値 7	921	92.1%

mod 3コラッツは、ほぼ最小値7のループになることがいえる。



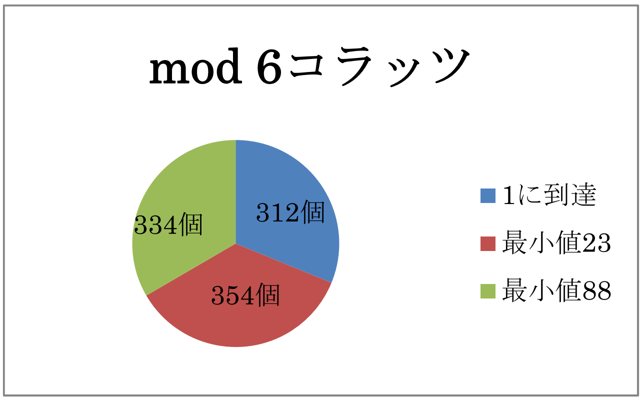
mod 4 コラッツ	数の個数	割合
1 に到達	689	68.9%
最小値 23	311	31.1%

mod 4コラッツは、最小値23のループになる割合のほうが高いことがいえる。



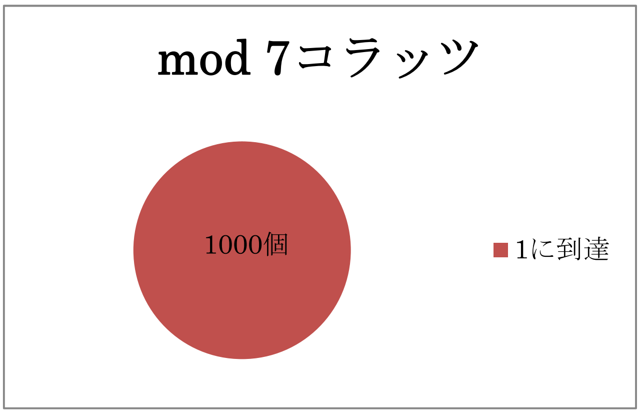
mod 5 コラッツ	数の個数	割合
1 に到達	1000	100%

mod 5コラッツは全て1に到達するといえる。



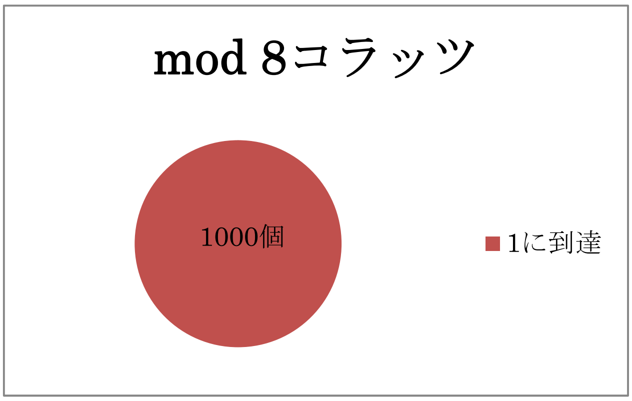
mod 6 コラッツ	数の個数	割合
1 に到達	312	31.2%
最小値 23	354	35.4%
最小値 88	334	33.4%

mod 6コラッツは1、最小値23のループ、最小値のループ88のいずれかになることがいえる。



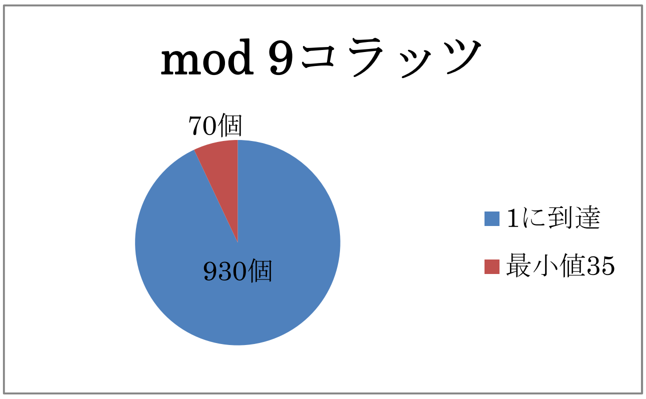
mod 7 コラッツ	回数	割合
1 に到達	1000	100%

mod 7コラッツは、全て1に到達するといえる。



mod 8 コラッツ	数の個数	割合
1 に到達	1000	100%

mod 8コラッツは、全て1に到達するといえる。



mod 9 コラッツ	数の個数	割合
1 に到達	930	93.0%
最小値 35	70	7.0%

mod 9コラッツは、ほぼ1に到達するといえる。

全ての円グラフより、どの値も1に到達する場合もあるが無限ループになる可能性も低くはないことが分かる。

４－２　１～１００００の範囲

先ほどの結果数を増やして、1に到達する回数を調べる。

1~10000までの数で、1に到達する個数と割合を調べるプログラム
(mod 3コラッツの場合)

```
collatz := proc(n, m, stnum)
 local stnumc, i;
 stnumc := nops(stnum);
 for i from 1 to stnumc do
    if n = stnum[i] then
       return (n);
    end if;
 od:

 if n mod m = 0 then
    collatz(n/m, m, stnum);
 else
    collatz((m + 1)·n + (m − (n mod m)), m, stnum);
 end if;
 end proc;
```

```
m := 3 :
stnum := [1, 7] :
stnumc := nops(stnum) :
for i from 1 to stnumc do
   ansc[i] := 0;
od:
for n from 1 to 10000 do
    ans := collatz(n, m, stnum);
   for i from 1 to stnumc do
      if ans = stnum[i] then
         ansc[i] := ansc[i] + 1;
      end if
   od:
   if n mod 1000 = 0 then
      print("n=", n);
      for i from 1 to stnumc do
         print(stnum[i], ":", ansc[i], "(", evalf(ansc[i]/n · 100), "%)");
      od:
      print("--------------------");
   end if;
 od:
```

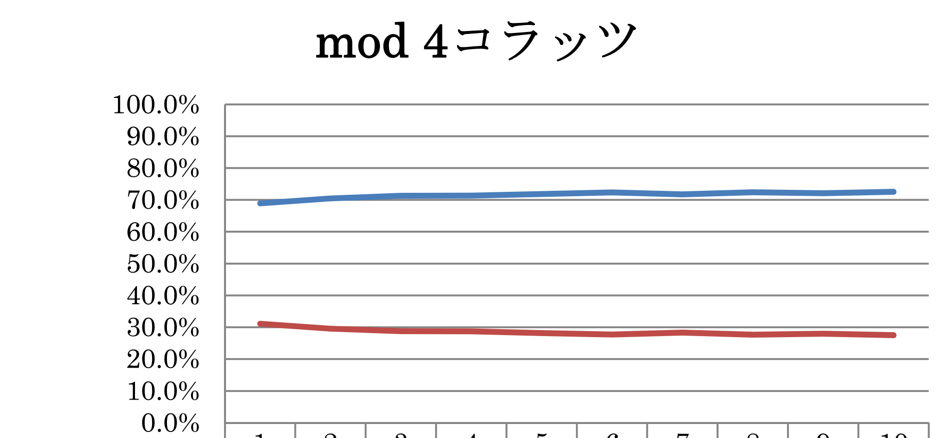
上記のプログラムの結果の割合を折れ線グラフにすると

以下のようになった。※横軸の値は1/1000で記載する。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1に到達	7.9%	6.2%	5.5%	5.1%	4.7%	4.6%	4.4%	4.4%	4.3%	4.2%
最小値7	92.1%	93.9%	94.5%	95.0%	95.3%	95.4%	95.6%	95.7%	95.7%	95.8%

1に到達する割合・・・・・・・・・・・・約4.2%

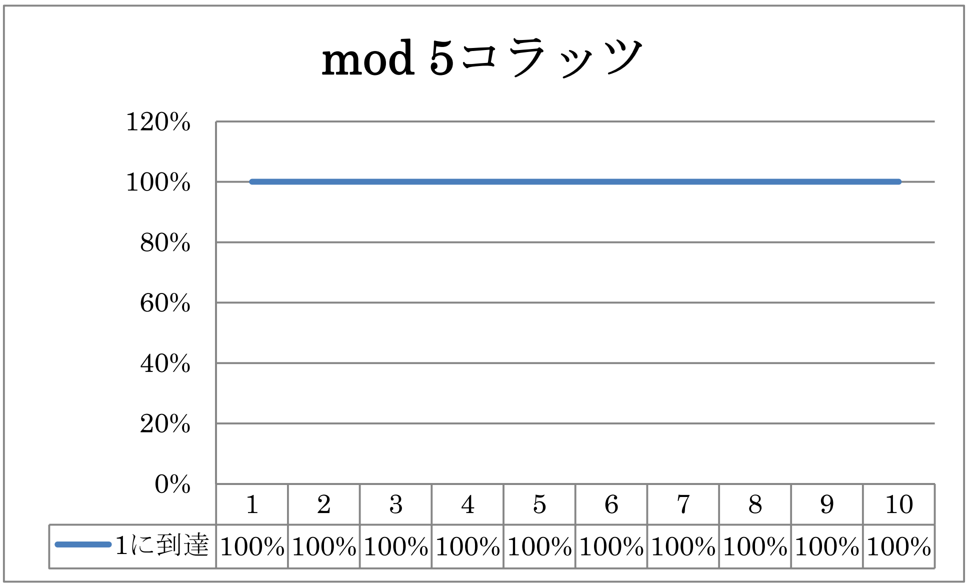
最小値7のループに到達する割合　・・・約95.8%



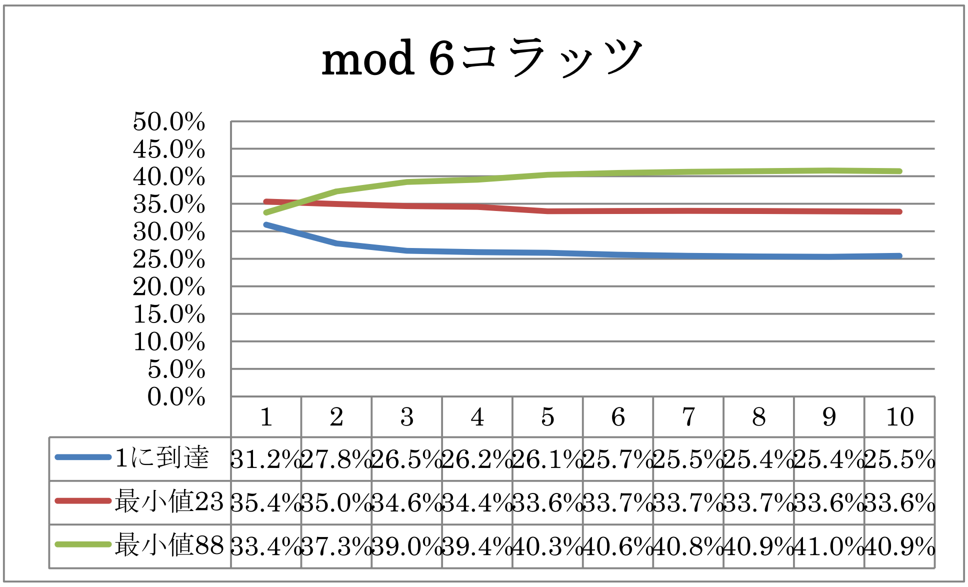
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1に到達	68.9%	70.5%	71.3%	71.3%	71.8%	72.3%	71.7%	72.4%	72.0%	72.5%
最小値23	31.1%	29.6%	28.7%	28.7%	28.2%	27.7%	28.3%	27.7%	28.0%	27.5%

1に到達する割合　・・・・・・・・・・約72.5%

最小値23のループに到達する割合・・・約27.5%



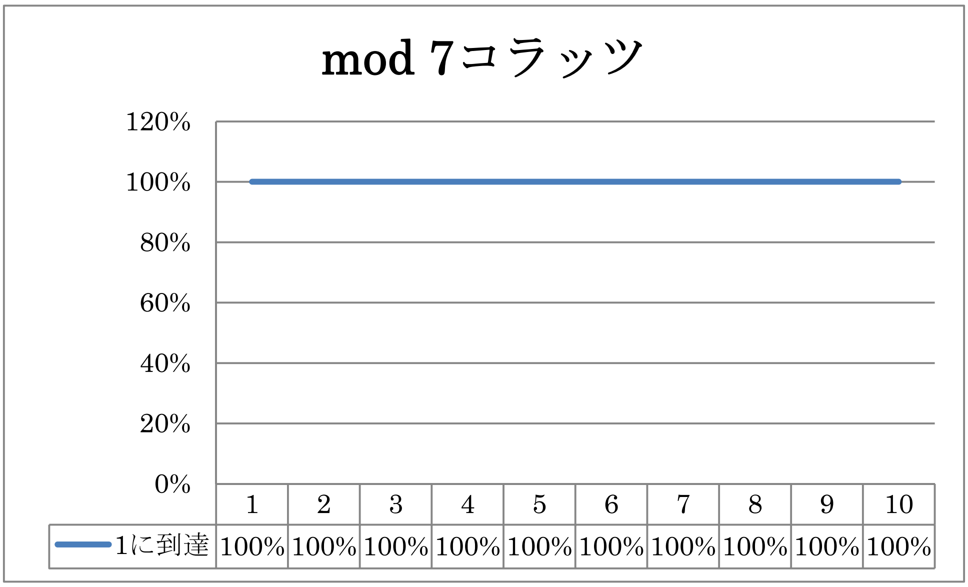
1に到達する割合・・・100%



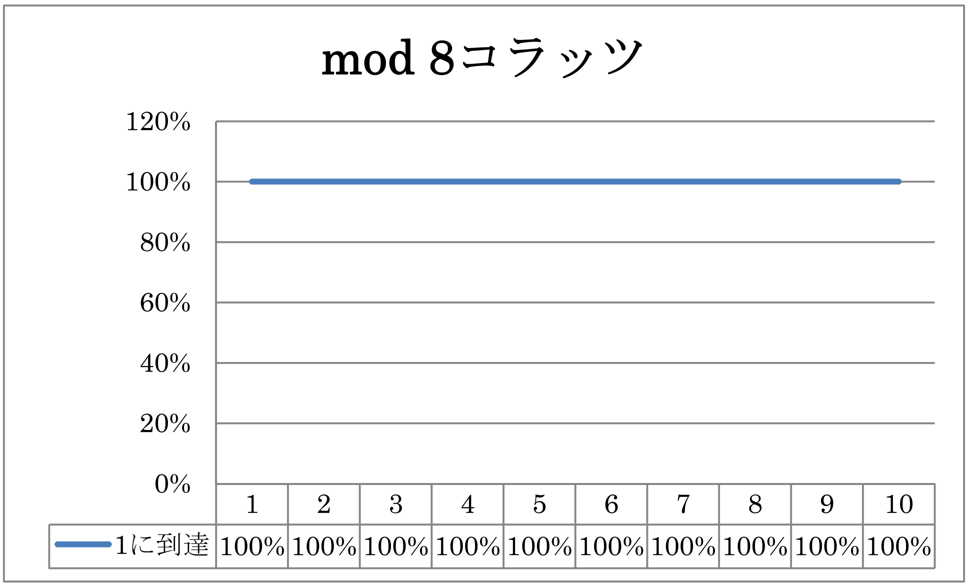
1に到達する割合　・・・・・・・・・・約25.4%

最小値23のループに到達する割合・・・約33.7%

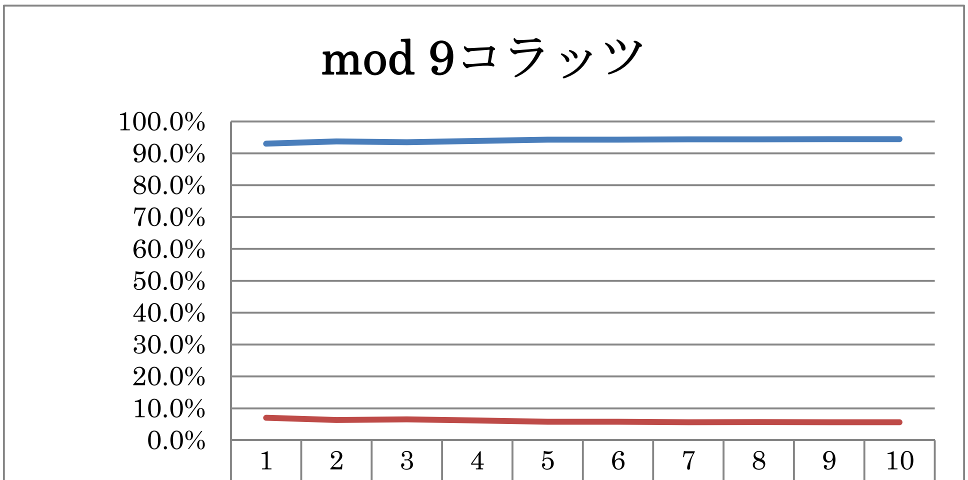
最小値88のループに到達する割合・・・約40.8%



1に到達する割合・・・100%



1に到達する割合・・・100%



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1に到達	93.0%	93.7%	93.5%	93.9%	94.3%	94.3%	94.4%	94.4%	94.4%	94.4%
最小値35	7.0%	6.3%	6.5%	6.2%	5.7%	5.8%	5.6%	5.7%	5.6%	5.6%

1に到達する割合　・・・・・・・・・・約94.4%

最小値35のループに到達する割合・・・約5.6%

第５章　考察

５－１　考察

　本研究により、コラッツ予想の式を一般化して自然数mが1に到達するかどうかをMapleのプログラムを用いて実験した結果、1に到達する場合と、1に到達せず無限ループに入る場合を発見した。

mod 3 コラッツの場合、1に到達あるいは最小値7の無限ループの2通り

1に到達する割合・・・約4.2%

最小値7の割合　・・・約95.8%

mod 4 コラッツの場合、1に到達あるいは最小値23の無限ループの2通り

1に到達する割合・・・約72.5%

最小値23の割合・・・約27.5%

mod 5 コラッツの場合、全ての数が1に到達

1に到達する割合・・・100%

mod 6 コラッツの場合、1に到達あるいは最小値23あるいは最小値88の無限ループの3通り

1に到達する割合・・・約25.4%

最小値23の割合・・・約33.7%

最小値88の割合・・・約40.8%

mod 7 コラッツの場合、全ての数が1に到達

1に到達する割合・・・100%

mod 8 コラッツの場合、全ての数が1に到達

1に到達する割合・・・100%

mod 9 コラッツの場合、1に到達あるいは最小値35の無限ループの2通り

1に到達する割合・・・約94.4%

最小値35の割合・・・約5.6%

結果より、コラッツ予想と同様に

mod 5、mod 7、mod 8は全て1に到達しているといえる。

５－２　今後の課題

　出発点であるnの値の範囲を広げたり、(mod m)の自然数mの桁数を増やしたりして、新たな計算をして1に到達するかどうかや最小値を調べる。

謝辞

　本研究を進めるにあたり、ご指導いただいた研究室指導教員の白柳教授、研究室の皆様に感謝致します。

参考文献

数論＜未解決問題＞の事典　リチャード・ガイ著(発行　朝倉出版　2011年)

飯塚晃世　情報科学科2013年度卒業論文「3x+1問題の変形～3x-1問題について～」

峯岸広大　情報科学科2013年度卒業論文「コラッツ予想の変形について」