

次数付き Artin Gorenstein 環の Lefschetz 性について

高橋 諒 (D2)

東北大学大学院理学研究科数学専攻

2025 年 10 月 18 日

はじめに

主な参考文献

- ① T. Harima, T. Maeno, H. Morita, Y. Numata, A. Wachi, and J. Watanabe. *The Lefschetz properties*. Vol. 2080. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2013, pp. xx+250.
- ② R. Takahashi. “Failure of the Lefschetz property for the Graphic Matroid”. arXiv preprint arXiv:2501.13348. 2025.

前半は (1) の教科書，後半は (2)+ α ．特に定理などの番号が記されている箇所は (1) を参照している．

- 1 次数付き Artin Gorenstein 環
- 2 Lefschetz 性
- 3 $\mathfrak{sl}_2$ 表現による特徴付け
- 4 高次ヘッセ行列による判定法
- 5 グラフの基底母関数
- 6 計算

- 1 次数付き Artin Gorenstein 環
- 2 Lefschetz 性
- 3 $\mathfrak{sl}_2$ 表現による特徴付け
- 4 高次ヘッセ行列による判定法
- 5 グラフの基底母関数
- 6 計算

次数付き Artin 環

定義：次数付き可換環

$A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$. ただし各 A_i はアーベル群で, $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ を満たす.

いくつか仮定する.

- $A_0 \cong \mathbb{K}$, ただし $\mathbb{K}$ は標数 0 の体 $\implies$ 各 A_i は $\mathbb{K}$ -ベクトル空間.
- すべての i で $\dim_{\mathbb{K}} A_i < \infty$.
- ある **top degree** d が存在し, $i > d$ なら $A_i = \{0\}$.
- A は A_1 の元で生成される (**standard grading**).

A が **Artin 環** であるとは, ベクトル空間として有限次元であること.

Poincaré 双対性

定義：Poincaré 双対性

- top degree d に対し $A_d \cong \mathbb{K}$. 同型写像を $[\bullet]: A_d \longrightarrow \mathbb{K}$ とする.
- すべての $k = 0, \dots, d$ で次の双線形形式が非退化.

$$\begin{array}{ccccc} A_k \times A_{d-k} & \longrightarrow & A_d & \cong & \mathbb{K} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha\beta & \xrightarrow{\cong} & [\alpha\beta] \end{array}$$

特に $\dim_{\mathbb{K}} A_k = \dim_{\mathbb{K}} A_{d-k}$.

次数付き Artin 環に対し, Poincaré 双対性を持つ $\iff$ **Gorenstein 環** [定理 2.79].

以降, 次数付き Artin Gorenstein 環のことを **AG 環** と書く.

Macaulay 双対

$\alpha \in Q := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ の $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ への作用を定める.

$$\alpha \cdot f := \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f.$$

$\text{Ann}(f) := \{\alpha \in Q \mid \alpha \cdot f = 0\}$ とおくと, f が斉次なら $\text{Ann}(f)$ は**斉次イデアル** $\implies Q/\text{Ann}(f)$ は次数付き環.

定義: Macaulay 双対生成元

斉次多項式 $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ に対し, $A(f) := Q/\text{Ann}(f)$.

$A(f)$ は top degree が $\deg f$ の次数付き Artin 環.

Macaulay 双対

定理 [定理 2.71, 補題 3.74]

A が AG 環 $\iff$ ある f が存在して $A = A(f)$.

($\Rightarrow$) A の top degree を d , A_1 の基底を $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ としたとき,

$$f = [(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)^d] \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

変数の数 n は $n \geq \dim_{\mathbb{K}} A_1$ ならよい.

$A = A(f)$ において, A_d から $\mathbb{K}$ への同型写像は $[\alpha] := \alpha \cdot f$.

- 1 次数付き Artin Gorenstein 環
- 2 Lefschetz 性
- 3 $\mathfrak{sl}_2$ 表現による特徴付け
- 4 高次ヘッセ行列による判定法
- 5 グラフの基底母関数
- 6 計算

Lefschetz 性

$$A = A(f) = \bigoplus_{i=0}^d A_i \text{ は AG 環.}$$

定義：強 Lefschetz 性 (Strong Lefschetz Property, SLP)

ある $\ell \in A_1$ が存在し,

$$\begin{array}{ccc} \times \ell^c: & A_k & \longrightarrow & A_{k+c} \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & a & \longmapsto & \ell^c a \end{array}$$

がすべての $c, k \geq 0$ でフルランクを持つこと.

$c = 1$ に限った場合を弱 Lefschetz 性 (Weak Lefschetz Property) と呼ぶ.

狭義の強 Lefschetz 性

Poincaré 双対性より $\dim_{\mathbb{K}} A_k = \dim_{\mathbb{K}} A_{d-k}$ のため、次の定義と同値.

定義：狭義の強 Lefschetz 性

ある $\ell \in A_1$ が存在し,

$$\times \ell^{d-2k}: A_k \longrightarrow A_{d-k}$$

がすべての $k = 0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$ で同型写像となること.

コンパクトケーラー多様体の強 Lefschetz 定理

$$L^k: H^{d-k}(X) \xrightarrow{\cong} H^{d+k}(X)$$

の環論的抽象化.

狭義の強 Lefschetz 性

Poincaré 双対性より $\dim_{\mathbb{K}} A_k = \dim_{\mathbb{K}} A_{d-k}$ のため, 次の定義と同値.

定義: 狭義の強 Lefschetz 性

ある $\ell \in A_1$ が存在し,

$$\times \ell^{d-2k}: A_k \longrightarrow A_{d-k}$$

がすべての $k = 0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$ で同型写像となること.

同値性は下図の通り.

$$\begin{array}{ccc} A_k & \xhookrightarrow{\times \ell^c} A_{k+c} & \xrightarrow{\times \ell^{d-2k-c}} A_{d-k} & (k+c \leq d-k) \\ A_{d-k-c} & \xhookrightarrow{\times \ell^{2k+c-d}} A_k & \xrightarrow{\times \ell^c} A_{k+c} & (k+c > d-k) \end{array}$$

狭義の強 Lefschetz 性

Poincaré 双対性より $\dim_{\mathbb{K}} A_k = \dim_{\mathbb{K}} A_{d-k}$ のため、次の定義と同値.

定義：狭義の強 Lefschetz 性

ある $\ell \in A_1$ が存在し,

$$\times \ell^{d-2k}: A_k \longrightarrow A_{d-k}$$

がすべての $k = 0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor$ で同型写像となること.

ℓ を **Lefschetz 元** と呼ぶ. また一つの k については SLP_k と書く.

ℓ を固定して, (A, ℓ) が SLP や SLP_k を持つとも言う.

A が SLP を持つ $\iff A$ が $\text{SLP}_0, \dots, \text{SLP}_{\lfloor d/2 \rfloor}$ を持つ.

($\Leftarrow$) ℓ は存在すれば一般的な元として取れるため, 特に共通のものが存在.

SLP の例

3 変数で $X = X_1, Y = X_2, Z = X_3$ とおく. $A = A(xyz^2)$ とする.

各 A_i は以下のような基底で張られるベクトル空間.

$$A_0 = \langle 1 \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$\dim_{\mathbb{K}} A_0 = 1,$$

$$A_1 = \langle X, Y, Z \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$\dim_{\mathbb{K}} A_1 = 3,$$

$$A_2 = \langle XY, XZ, YZ, Z^2 \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$\dim_{\mathbb{K}} A_2 = 4,$$

$$A_3 = \langle XYZ, XZ^2, YZ^2 \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$\dim_{\mathbb{K}} A_3 = 3,$$

$$A_4 = \langle XYZ^2 \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$\dim_{\mathbb{K}} A_4 = 1.$$

A は SLP を持つ. Lefschetz 元全体の集合は

$$\{aX + bY + cZ \mid a, b, c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}.$$

SLP の例

$\ell = X + Y + Z$ について SLP を持つことを, 次のようにして確認する.

- ① A をベクトル空間とみなし, 線形写像 $\times \ell$ を行列表示する.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ Y \\ Z \\ XY \\ XZ \\ YZ \\ Z^2 \\ XYZ \\ XZ^2 \\ YZ^2 \\ XYZ^2 \end{matrix}$$

SLP の例

$\ell = X + Y + Z$ について SLP を持つことを，次のようにして確認する．

② 基底変換して，行列をジョルダン標準形にする．

$$\begin{pmatrix}
 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \color{red}{1} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \color{red}{1} & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & | & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{array}{l}
 12XYZ^2 \\
 6XYZ + 3XZ^2 + 3YZ^2 \\
 2XY + 2XZ + 2YZ + Z^2 \\
 X + Y + Z \\
 1 =: \color{red}{v_1} \\
 XYZ - YZ^2 \\
 XY + \frac{1}{2}XZ - \frac{1}{2}YZ - \frac{1}{2}Z^2 \\
 X - \frac{1}{2}Z =: \color{red}{v_2} \\
 XYZ - XZ^2 \\
 XY - \frac{1}{2}XZ + \frac{1}{2}YZ - \frac{1}{2}Z^2 \\
 Y - \frac{1}{2}Z =: \color{red}{v_3} \\
 XY - \frac{1}{2}XZ - \frac{1}{2}YZ + \frac{1}{2}Z^2 =: \color{red}{v_4}
 \end{array}$$

SLP の例

$\ell = X + Y + Z$ について SLP を持つことを、次のようにして確認する.

③ 得られた基底が SLP の証拠になっている.

$$A_0 = \langle v_1 \rangle_{\mathbb{K}},$$

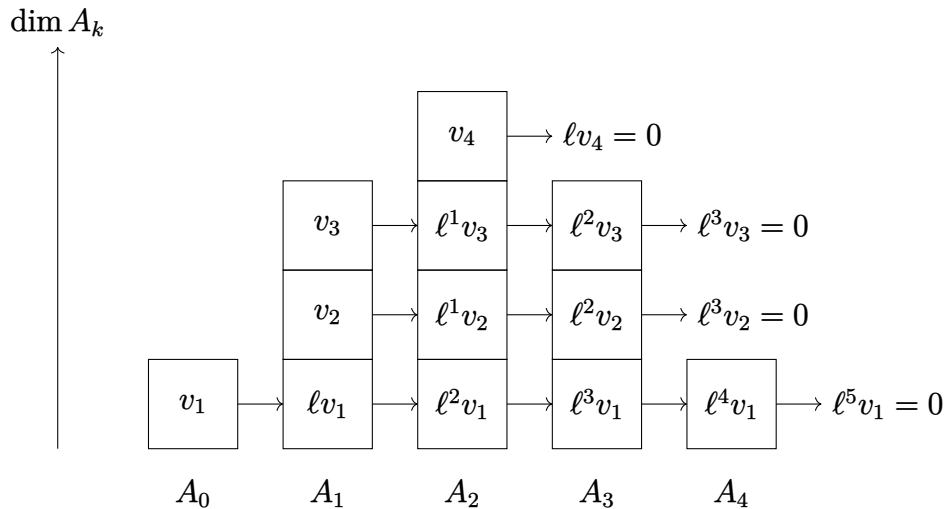
$$A_1 = \langle \ell v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$A_2 = \langle \ell^2 v_1, \ell v_2, \ell v_3, v_4 \rangle_{\mathbb{K}},$$

$$A_3 = \langle \ell^3 v_1, \ell^2 v_2, \ell^2 v_3 \rangle_{\mathbb{K}} = \ell^2 A_1,$$

$$A_4 = \langle \ell^4 v_1 \rangle_{\mathbb{K}} = \ell^4 A_0.$$

SLP の例



- 1 次数付き Artin Gorenstein 環
- 2 Lefschetz 性
- 3 $\mathfrak{sl}_2$ 表現による特徴付け
- 4 高次ヘッセ行列による判定法
- 5 グラフの基底母関数
- 6 計算

標数 0 の体 $\mathbb{K}$ 上で考える． $\mathbb{K}$ が代数閉であることは仮定しない．

定義： $\mathfrak{sl}_2$

Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ とは，3 次元ベクトル空間

$$\{M \in \text{Mat}_{2 \times 2} \mid \text{tr } M = 0\}$$

に $[x, y] = xy - yx$ として **Lie 括弧積**を入れたもの．

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

は $\mathfrak{sl}_2$ の基底．

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f.$$

$\mathfrak{sl}_2$ 表現

定義： $\mathfrak{sl}_2$ 表現

ベクトル空間 V について、線形写像 $\rho: \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \text{End}(V)$ が

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] := \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x)$$

を満たすとき、 ρ を $\mathfrak{sl}_2$ の V における表現と呼ぶ。

$\rho(e), \rho(h), \rho(f)$ を適切に定めれば ρ 全体が決まる。

定義：既約表現

$\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$ なる部分空間 W であって $\rho(\mathfrak{sl}_2)(W) \subset W$ となるものが存在しないとき、 ρ を既約表現と呼ぶ。

$\mathfrak{sl}_2$ 表現の例

n を非負整数, V を $n+1$ 次元ベクトル空間とする. ρ_n を

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad h \mapsto \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & n-4 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix}, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 \times n & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 \times (n-1) & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

と定めると, $\mathfrak{sl}_2$ の V における表現になっている.

事実：既約表現

ρ_n は $n+1$ 次元空間における, 同型を除いて唯一の既約表現である.

$\mathfrak{sl}_2$ 表現の weight

定義：weight

$\rho(h)$ の固有値を **weight**, 固有ベクトルを **weight vector** と呼ぶ.

先ほどの ρ_n の weight は $\{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$.

事実：既約表現への分解

V が有限次元なら, $\mathfrak{sl}_2$ の V における表現はいくつかの ρ_n の直和で表せる.
またその分解は, weight の分布を見れば一意に特定できる.

SLP の例 (再掲)

ジョルダン標準形を……

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc|ccc|c} 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

SLP の例 (再掲)

ジョルダン標準形を……こう見る

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c} & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2(e) & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2(e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_0(e) \end{array} \right)$$

SLP の例 (再掲)

$$\rho(\bullet) := \left(\begin{array}{c|c|c|c} \rho_4(\bullet) & & & \\ \hline & \rho_2(\bullet) & & \\ \hline & & \rho_2(\bullet) & \\ \hline & & & \rho_0(\bullet) \\ \hline \end{array} \right)$$

と定めると, $\mathfrak{sl}_2$ の $A(xyz^2)$ 上の表現 ρ が得られる. ρ は $\rho_4, \rho_2, \rho_2, \rho_0$ の直和.

事実: weight と次数

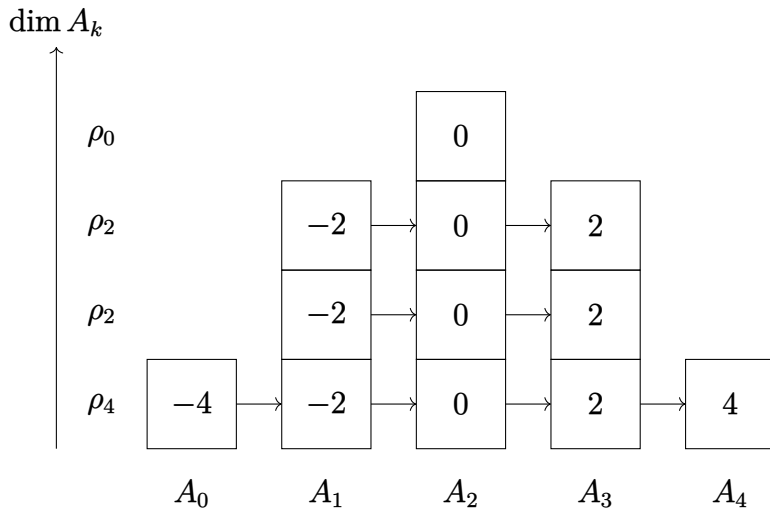
任意の k と $a \in A_k \setminus \{0\}$ について, a は weight $2k - d = 2k - 4$ の weight vector.

$d = 4$ は $A(xyz^2)$ の top degree だった.

SLP の例 (再掲)

$$\rho(h) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|cc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell^4 v_1 \\ 0 & \color{red}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{\ell^3 v_1} \in A_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell^2 v_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{\ell^2 v_2} \in A_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{2} & 0 & 0 & 0 & \color{red}{\ell^2 v_3} \in A_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_4 \end{array} \right)$$

SLP の例



定理 [定理 3.32]

AG 環 $A = \bigoplus_{i=0}^d A_i$ と $\ell \in A_1$ に対し、以下は同値.

- ① (A, ℓ) が SLP を持つ.
- ② $\mathfrak{sl}_2$ の A 上の表現 ρ が存在して以下の 2 条件を満たす.
 - $\rho(e) = (\times \ell: A \rightarrow A) \in \text{End}(A)$, かつ
 - すべての k で, weight $2k - d$ の weight vector と $A_k \setminus \{0\}$ が一致する.

(1) $\Rightarrow$ (2) は今まで見てきた通り. ℓ 倍写像はべき零なので固有値はすべて 0.

(2) $\Rightarrow$ (1) は, 既約表現に分解したときの基底が自動的に斉次の元になるのでうまくいく.

実際は Gorenstein 環でなくても $\dim_{\mathbb{K}} A_k = \dim_{\mathbb{K}} A_{d-k}$ ならよい.

環のテンソル積と SLP

系 [定理 3.34]

A, A' は AG 環.

(A, ℓ) と (A', ℓ') が SLP を持つ $\iff (A \otimes A', \ell \otimes 1 + 1 \otimes \ell')$ が SLP を持つ.

($\Rightarrow$) $\mathfrak{sl}_2$ 表現 $\rho: \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \text{End}(A)$ と $\rho': \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \text{End}(A')$ から

$$x \longmapsto \rho(x) \otimes 1 + 1 \otimes \rho'(x)$$

として $A \otimes A'$ における表現を構成する.

環のテンソル積とSLP

系

斉次多項式 f, g は変数を共有しないものとする.

$A(f)$ と $A(g)$ が SLP を持つ $\iff A(fg)$ が SLP を持つ.

$A(fg) = A(f) \otimes A(g)$ が成立する [命題 3.77(1)] ため.

$A(x^d)$ が $\ell = aX$ ($a \neq 0$) によって SLP を持つことから

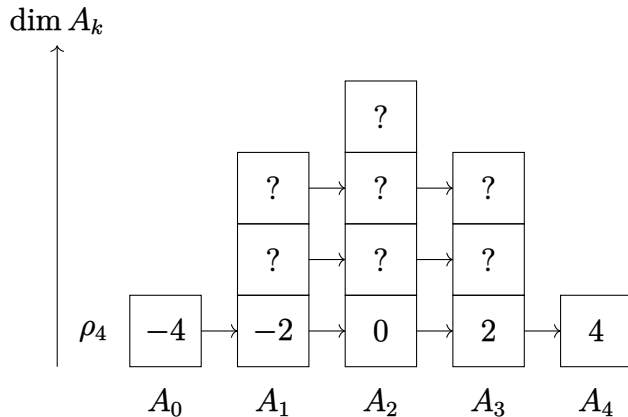
$$A(xyz^2) = A(x) \otimes A(y) \otimes A(z^2)$$

も SLP を持ち, Lefschetz 元は $\ell = aX + bY + cZ$ ($a, b, c \neq 0$) の形をしている.

個別の SLP_k について

SLP を $\text{SLP}_0 \wedge \cdots \wedge \text{SLP}_k$ に置き換えても成立.

たとえば $A(xyz^2)$ において, SLP_0 のみから以下の weight が確定.



- 1 次数付き Artin Gorenstein 環
- 2 Lefschetz 性
- 3 $\mathfrak{sl}_2$ 表現による特徴付け
- 4 高次ヘッセ行列による判定法
- 5 グラフの基底母関数
- 6 計算

SLP_k の判定

$$A(f) = \bigoplus_{i=0}^d A_i = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] / \text{Ann}(f).$$

$\times \ell^{d-2k} : A_k \rightarrow A_{d-k}$ が同型写像 $\iff$ 下の双線形形式が非退化.

$$\begin{array}{ccccc} A_k \times A_k & \longrightarrow & A_k \times A_{d-k} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ (\alpha, \beta) & \xrightarrow{\quad \text{片方を } \ell^{d-2k} \text{ 倍} \quad} & (\alpha, \ell^{d-2k} \beta) & \xrightarrow{\quad \text{非退化} \quad} & (\ell^{d-2k} \alpha \beta) \cdot f \end{array}$$

Remark

$A_d \ni \alpha \mapsto \alpha \cdot f = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f \in \mathbb{K}$ は同型写像.

SLP_k の判定

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ によって $\ell = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ と書ける. **オイラーの定理** より

$$(\ell^{d-2k} \alpha \beta) \cdot f = (d-2k)! ((\alpha \beta) \cdot f)(\mathbf{a}).$$

定理：(斉次関数についての) オイラーの定理

$g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ が斉次多項式なら,

$$\ell^{\deg g} \cdot g = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\deg g} g = (\deg g)! g(\mathbf{a}).$$

$g = (\alpha \beta) \cdot f$ とする. $\deg g = d - 2k$.

SLP_k の判定

$m := \dim_{\mathbb{K}} A_k$. A_k の基底 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ を任意に取る.

$$A_k \times A_k \ni (\alpha, \beta) \longmapsto \underbrace{(d-2k)!}_{\text{定数倍を無視}} ((\alpha\beta) \cdot f)(\mathbf{a})$$

の表現行列は

$$\mathbf{H}_k(\mathbf{a}) := \left(((\alpha_i \alpha_j) \cdot f)(\mathbf{a}) \right)_{i,j=1}^m \in \mathbb{K}^{m \times m}.$$

$\det \mathbf{H}_k(\mathbf{a}) \neq 0 \iff (A, a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)$ は SLP_k を持つ.

SLP_k の判定

$a_1, \dots, a_n$ を変数のままにしてもよい.

定義：高次ヘッセ行列

$$\mathbf{H}_k := \left((\alpha_i \alpha_j) \cdot f \right)_{i,j=1}^m \quad (\in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^{m \times m}, \text{ 多項式行列}).$$

$\{X_1, \dots, X_n\}$ が A_1 の基底なら $\mathbf{H}_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$ で通常のヘッセ行列.

定理 [定理 3.76]

$\det \mathbf{H}_k \neq 0 \iff A$ は SLP_k を持つ.

- 1 次数付き Artin Gorenstein 環
- 2 Lefschetz 性
- 3 $\mathfrak{sl}_2$ 表現による特徴付け
- 4 高次ヘッセ行列による判定法
- 5 グラフの基底母関数
- 6 計算

どんな f について $A(f)$ は SLP を持つか？

盛んに研究されているのは、 $\text{Ann}(f)$ がちょうど n 個の元から生成されるケース．このとき $A(f)$ は**完全交叉環**となる．

完全交叉環での結果 [3.4 章]

$n = 2$ なら SLP は常に成立． $n = 3$ なら弱 Lefschetz 性に限り示されている．

完全交叉環ならば SLP を持つと予想されている．

これから話す設定では、 n も $\text{Ann}(f)$ を生成する元の数の最小値も大きくなるため、状況はかなり離れている．

グラフの基底母関数

無向かつ連結なグラフ $G = (V, E)$ を考える．多重辺，自己ループは (一旦) 許す．さらに，辺に $1, \dots, n := |E|$ の番号がついているとする．すなわち $E = \{1, \dots, n\}$ ．

辺集合 $I \subset E$ が**独立集合** $\iff I$ は閉路を持たない

辺集合 $B \subset E$ が**基底** $\iff B$ は極大な独立集合

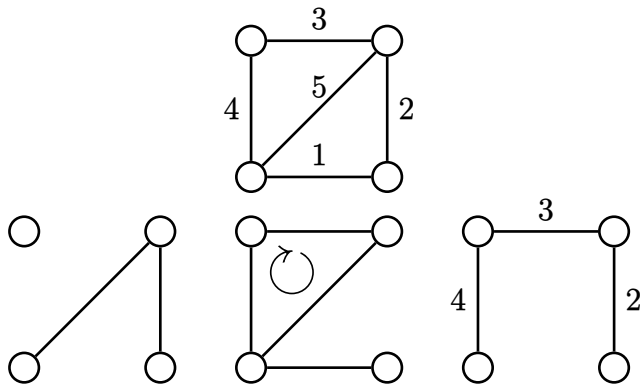
グラフ理論的には，基底とは**全域木**の辺集合のこと．

基底母関数

$$f_G := \sum_{B: \text{基底}} \prod_{e \in B} x_e \quad (\in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]).$$

常に $|B| = |V| - 1$ である．つまり f_G は $|V| - 1$ 次斉次．

グラフの基底母関数



- 左 独立集合だが、極大でないため基底ではない。
中央 独立集合でない。矢印は閉路。
右 基底の一つで、 $\prod_{e \in B} x_e = x_2 x_3 x_4$ に対応。

問題

本来はすべてマトロイドの話だが、今日はグラフのみ.

問題¹

$A = A(f_G)$ は常に SLP を持つか？

先行研究² では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ として SLP_1 が示された.

- $\{X_1, \dots, X_n\}$ が A_1 の基底になる ($\iff \mathbf{H}_1$ が通常のヘッセ行列と一致).
- $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ なら $\mathbf{H}_1(\mathbf{a})$ が正固有値を 1 個, 負固有値を $n - 1$ 個持つ.

¹T. Maeno and Y. Numata. “Sperner property and finite-dimensional Gorenstein algebras associated to matroids”. *J. Commut. Algebra* **8.4** (2016), pp. 549–570.

²S. Murai, T. Nagaoka, and A. Yazawa. “Strictness of the log-concavity of generating polynomials of matroids”. *J. Combin. Theory Ser. A* **181** (2021), Paper No. 105351, 22.

考えなくてよいグラフ

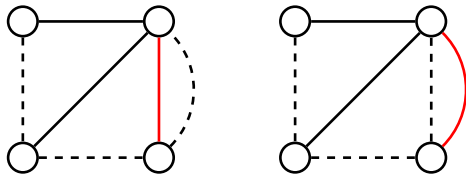
辺 e が自己ループなら，削除してよい．

辺 e は独立集合に決して含まれないため， $\frac{\partial}{\partial x_e} f_G = 0$ ．したがって $X_e \in \text{Ann}(f_G)$ ．

考えなくてよいグラフ

辺 i, j が多重辺なら，片方を削除してよい。

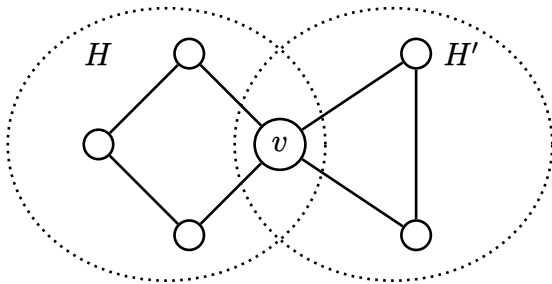
基底 $B \ni i$ に対して $(B \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ も基底． よって $\frac{\partial}{\partial x_i} f_G = \frac{\partial}{\partial x_j} f_G$ であり，
 $X_i - X_j \in \text{Ann}(f_G)$.



考えなくてよいグラフ

ある頂点 $v \in V$ を削除すると G が非連結になるとき, $A(f_G)$ の SLP はより小さなグラフいくつかの SLP と同値.

下図で $\{G \text{ の基底} \} = \{B \sqcup B' \mid B \text{ は } H \text{ の基底, } B' \text{ は } H' \text{ の基底} \}$. よって $f_G = f_H f_{H'}$, $A(f_G) = A(f_H) \otimes A(f_{H'})$.



計算の対象

以上をまとめると、**単純**かつ**2点連結**なグラフをチェックすればよい。

単純 自己ループ・多重辺を含まない。

2点連結 どの1点を削除しても非連結にならない。

数え上げは OEIS の A002218, 列挙は nauty³, 計算は SageMath と C++.

n	グラフの数 (同型を除く)	top degree
	$\vdots$	
7	468	6
8	7123	7
9	194066	8
10	9743542	9

³B. D. McKay and A. Piperno, “Practical graph isomorphism, II”. *J. Symbolic Comput.* **60** (2014), pp. 94–112.

- 1 次数付き Artin Gorenstein 環
- 2 Lefschetz 性
- 3 $\mathfrak{sl}_2$ 表現による特徴付け
- 4 高次ヘッセ行列による判定法
- 5 グラフの基底母関数
- 6 計算

計算結果

SLP_2 計算できている範囲 (9 頂点以下すべてと 10 頂点のグラフの半分ほど) では常に成立.

SLP_3 不成立の例が存在. 特に $n = 8$ なら弱 Lefschetz 性も不成立.

n	グラフの数	SLP_3 を持たない数	割合
8	7123	152	2.1%
9	194066	7949	4.1%

SLP_k の判定の手順

- ① A_k の基底 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ を求める.
- ② $\mathbf{H} := \mathbf{H}_k = \left((\alpha_i \alpha_j) \cdot f \right)_{i,j=1}^m$ を計算する.
- ③ $\det \mathbf{H} \neq 0$ か確認する.

難しいのは 3 番目.

Edmonds の問題

次の問題を解きたい.

$m \times m$ の n 変数多項式行列 H は正則か？

計算複雑性の分野で研究されている.

Edmonds の問題

多変数多項式行列のランクを求めよ／正則であるか判定せよ.

高速に判定できる確率的＝**乱択**アルゴリズムが知られている.⁴

⁴J. F. Buss, G. S. Frandsen, and J. O. Shallit. “The Computational Complexity of Some Problems of Linear Algebra”. *J. Comput. Syst. Sci.* **58** (1999), no. 3, pp. 572–596.

乱択アルゴリズム

乱択アルゴリズムとは、ランダムネスを用いたアルゴリズムのこと。

非正則 必ず **NO** を出力。

正則 ランダムに **YES** (確率 $\varepsilon > 0$ 以上) or **NO** を出力。

何度も繰り返し、一度でも **YES** が出力されたら正則。

具体的な手順

- ① $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ をランダムに決める。
- ② $\det \mathbf{H}(\mathbf{a})$ を計算。
- ③ $= 0$ なら **NO**, $\neq 0$ なら **YES** を出力。

(2) の計算は簡単。

乱択アルゴリズム

確率評価は次の補題による.

Schwartz-Zippel の補題⁵

n 変数多項式 $g \neq 0$ と $\mathbb{K}$ の任意の有限部分集合 S について,

$$\Pr[g(\mathbf{a}) = 0 \mid \mathbf{a} \in S^n] \leq \frac{\deg g}{|S|}.$$

$g = \det \mathbf{H}$ とすると $\varepsilon \geq 1 - \frac{\deg g}{|S|}$. $|S|$ は好きなだけ大きくできる.

$\mathbf{a} = (1, \dots, 1)$ と決め打って数え上げとして解く手法も考えられるが, これだと SLP_2 の判定に失敗するグラフが存在する.

⁵J. T. Schwartz. "Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities". *J. Assoc. Comput. Mach.* **27.4** (1980), pp. 701–717.

決定的アルゴリズム

H の非正則性を決定的に、つまりランダムネスを用いずに確認したい。

方針

$H\mathbf{F} = \mathbf{0}$ を満たす非ゼロベクトル $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^m$ を構成する。

$$\mathbf{F} \in \ker H \implies \mathbf{F}(\mathbf{a}) \in \ker H(\mathbf{a})$$

$\mathbf{F}(\mathbf{a})$ の値をたくさんの点 $\mathbf{a}$ で求め、復元。

注：求める手法は、今のところ確率保証のない運試し。

多項式補間

F_i に出現し得る単項式の係数をすべて変数において、連立方程式を解く。

$\deg F_i$ が大きいとそもそも不可能。

deg F_i の見積もり

$\mathbf{H}$ は斉次 $\Rightarrow \mathbf{F}$ も斉次にできる.

失敗した方法

$$\deg F_i = \log_t \frac{F_i(t\mathbf{a})}{F_i(\mathbf{a})}$$

$\ker \mathbf{H}(\mathbf{a}) = \ker \mathbf{H}(t\mathbf{a})$ なので, $F_i(\mathbf{a})$ と $F_i(t\mathbf{a})$ を区別できない.

ある程度成功した方法

$$\deg F_i = \sum_{j=1}^n x_j \times \frac{\partial \log |F_i|}{\partial x_j}$$

偏微分を差分に置き換えて近似値を求めた.

結果

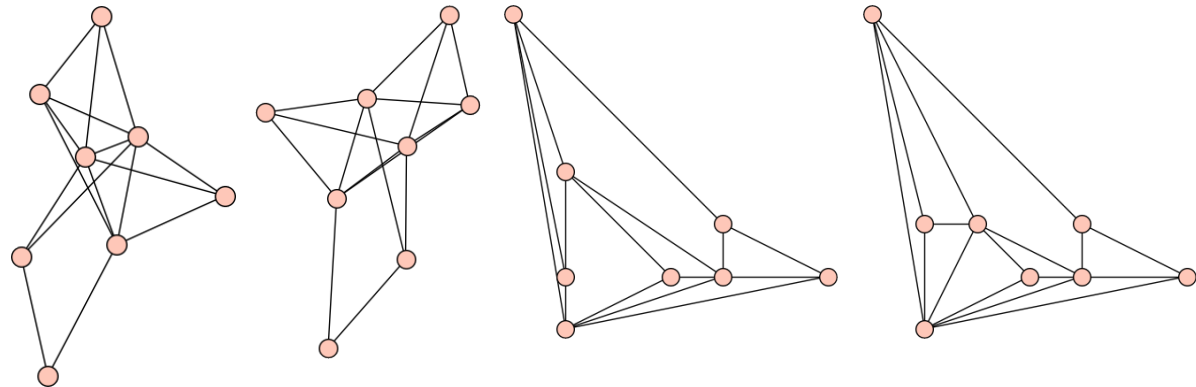
確率的アルゴリズムで SLP_3 を持たないと判定された 8 頂点のグラフ 152 個で計算.

$\deg F_i = 4$	45 個
$\deg F_i = 5$	4 個
$\deg F_i = 6$	32 個
$\deg F_i = 8$	4 個
計算失敗・不能	67 個

現状ではこのうち 31 個について, 具体的に F を構成することに成功している.

行列のサイズに比べてかなり小さい. 理由は不明で, Edmonds の問題の解法としては不十分.

$\deg F_i = 5$ のグラフ



まとめ

- AG 環 $A(f)$ と SLP の定義
- SLP の $\mathfrak{sl}_2$ による特徴付け
- SLP の高次ヘッセ行列による判定法
- グラフの基底母関数における状況
- $\det \mathbf{H} = 0$ の計算方法
 - 乱択アルゴリズム, $\det \mathbf{H}(\mathbf{a}) = 0$
 - 決定的アルゴリズム, $\mathbf{H}\mathbf{F} = 0$

問題

- $\mathbf{F}$ とグラフの構造の関係は？
- $A(f_G)$ の SLP_2 は必ず成立するか？