

ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルと Moreno-Socías 予想について

大阪大学 大学院情報科学研究科 情報基礎数学専攻
谷光一郎 (Koichiro TANI)

目次

1	グレブナー基底	2
1.1	単項式順序	2
1.2	イニシャルイデアル	2
1.3	グレブナー基底	3
2	Borel-fixed 単項式イデアル	3
2.1	Borel-fixed 単項式イデアル	3
2.2	ジェネリックイニシャルイデアル	4
2.3	lexsegment イデアル	4
3	ジェネリックイデアル	5
3.1	ジェネリックイデアル	5
4	自分の結果	6

Section1,2 についての参考文献

- Miller-Sturmfels, “Combinatorial Commutative Algebra”.
- Herzog-Hibi, “Monomial Ideals”.

Section3 についての参考文献

- Pardue, “Generic sequences of polynomials”.

Section4 についての参考文献

- T., “Initial ideals of generic ideals and variations of Moreno-Socías conjecture”.

1 グレブナー基底

1.1 単項式順序

- $\mathbb{k}$ を標数 0 の体.
- $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- $S = \mathbb{k}[\bar{x}] = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$.
- $\mathcal{M}(\bar{x})$ を $\bar{x}$ の変数からなる単項式全体の集合.
- $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ について, $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$.
- 基本的にイデアルは斉次イデアルを考える.

Definition 1.1 (単項式順序). $\preceq$ を $\mathcal{M}(\bar{x})$ 上で定義される全順序で以下の条件を満たすとする.

1. 単項式 m_1, m_2, m_3 について, $m_1 \preceq m_2$ ならば, $m_1 m_3 \preceq m_2 m_3$ を満たす;
2. $1 \in \mathcal{M}(\bar{x})$ が最小元である.

このような条件をみたす $\mathcal{M}(\bar{x})$ 上の順序を**単項式順序**という.

Remark 1.2. 以降は $x_1 \succeq \dots \succeq x_n$ を仮定する.

Definition 1.3 (辞書式順序). 以下のように定義される単項式順序を**辞書式順序 (lexicographic order, lex order)**と呼ぶ:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \preceq \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \stackrel{\text{def}}{\iff} a_i \neq b_i \text{ を満たす最小の } i \text{ について, } a_i < b_i \text{ が成り立つ.}$$

Definition 1.4 (次数付き逆辞書式順序). 以下のように定義される単項式順序を**次数付き逆辞書式順序 (degree reverse lexicographic order, revlex order)**と呼ぶ:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \preceq \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \stackrel{\text{def}}{\iff} (|\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|) \text{ または } (|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \text{ かつ } a_i \neq b_i \text{ を満たす最大の } i \text{ について, } a_i > b_i).$$

ただし, $|\mathbf{a}| = \sum a_i$.

Example 1.5. $S = \mathbb{k}[x_1, x_2, x_3]$. $u = x_1 x_2^2 x_3$ と $v = x_2^4$ を比べる.

辞書式順序: $u \succeq v$

次数付き逆辞書式順序: $u \preceq v$

1.2 イニシャルイデアル

Definition 1.6 (先頭項). 多項式 $f \in S$ について, f に出てくる項の中で単項式順序 $\preceq$ に関して最も大きい項を $\text{in}_{\preceq}(f)$ と書き, f の**先頭項**と呼ぶ.

Definition 1.7 (イニシャルイデアル). イデアル $I \subset S$ について,

$$\text{in}_{\preceq}(I) := (\text{in}_{\preceq}(f) \mid f \in I)$$

を I のイニシャルイデアルと呼ぶ.

1.3 グレブナー基底

Definition 1.8 (グレブナー基底). I : イデアル, $\preceq$: 単項式順序について,
 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ が

$$\text{in}_{\preceq}(I) = (\text{in}_{\preceq}(g_1), \dots, \text{in}_{\preceq}(g_t))$$

を満たすとき, $\mathcal{G}$ は I の $\preceq$ に関する**グレブナー基底**であるという.

Example 1.9.

$$I = (x_1x_3 - x_2^2, x_2x_3 - x_3^2).$$

$\preceq$: 辞書式順序.

$$\text{in}_{\preceq}(I) = (x_1x_3, x_2x_3, x_3^3).$$

グレブナー基底は

$$\mathcal{G} = \{x_1x_3 - x_2^2, x_2x_3 - x_3^2, x_2^3 - x_2^2x_3\}.$$

Proposition 1.10. I : イデアル, $\preceq$: 単項式順序.

$\text{in}_{\preceq}(I)$ に属さない単項式全体の集合は, $\mathbb{k}$ -ベクトル空間としての S/I の基底になる.

Proof. $\mathcal{G}$ を I のグレブナー基底.

(生成): $f + I$ について, division algorithm(軽く説明する) で f に $\text{in}_{\preceq}(I)$ の単項式が無いようにできる.

(1 次独立): 1 次結合が I に入るなら, $\text{in}_{\preceq}(I)$ の単項式が出てきて矛盾. □

剰余環 S/I のヒルベルト関数を

$$\text{HF}(S/I, d) = \dim_{\mathbb{k}}(S/I)_d$$

で定め, ヒルベルト級数を以下のように定める:

$$\text{HS}(S/I; t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \dim_{\mathbb{k}}(S/I)_i t^i.$$

Corollary 1.11. $\text{HS}(S/I; t) = \text{HS}(S/\text{in}_{\preceq}(I); t).$

2 Borel-fixed 単項式イデアル

2.1 Borel-fixed 単項式イデアル

- $\text{GL}_n(\mathbb{k})$: 可逆な $n \times n$ -行列全体 (一般線形群).
- $\text{B}_n(\mathbb{k})$: 可逆な上三角行列全体 (ボレル部分群).

$\alpha = (\alpha_{i,j}) \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$ と $f(x_1, \dots, x_n) \in S$ について,

$$\alpha \cdot f = f(\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n) \quad (\alpha \cdot x_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} x_i)$$

で $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ が S に作用しているとする.

$\alpha \in \text{GL}_n(\mathbb{k})$ と $I \subset S$ について,

$$\alpha \cdot I = \{\alpha \cdot f \mid f \in I\}$$

とする.

Definition 2.1 (Borel-fixed 単項式イデアル). 単項式イデアル I が **Borel-fixed** であるとはすべての $\alpha \in \text{B}_n(\mathbb{k})$ で, $\alpha \cdot I = I$ が成り立つことである.

Proposition 2.2. $J \subset S$: 単項式イデアル. J が Borel-fixed である $\iff J$ に属する単項式 m が x_j で割り切れるとき, 全ての $i < j$ で $(x_i/x_j)m \in J$ が成り立つことである.

Example 2.3. $J = (x_1^2, x_1x_2, x_2^3, x_1x_3^3)$.

2.2 ジェネリックイニシャルイデアル

Lemma 2.4. I : イデアル, $\preceq$: 単項式順序を固定. $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ を n^2 次元のアフィン空間だとみなす. あるザリスキ開集合 $U \subset \text{GL}_n(\mathbb{k})$ が存在して, 任意の $\alpha \in U$ で $\text{in}_{\preceq}(\alpha \cdot I)$ が同じになる.

Definition 2.5. あるザリスキ開集合 $U \subset \text{GL}_n(\mathbb{k})$ が存在して, $\text{in}_{\preceq}(\alpha \cdot I)$ が同じになるようなイニシャルイデアルをジェネリックイニシャルイデアルと呼び, $\text{gin}_{\preceq}(I)$ とかく.

Theorem 2.6 ([1]). $\text{gin}_{\preceq}(I)$ は Borel-fixed 単項式イデアルである.

2.3 lexsegment イデアル

Definition 2.7 (lexsegment イデアル). $\preceq$: 辞書式順序, J : 単項式イデアル. J に属する任意の単項式 m について, $\deg(m) = \deg(m')$ かつ $m \preceq m'$ が成り立つ全ての単項式 m' が再び J に属するとき, J を **lexsegment イデアル**と呼ぶ.

Example 2.8. $J = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3^2, x_2^4)$.

Remark 2.9. Lexsegment イデアルは Borel-fixed 単項式イデアルである.

Theorem 2.10 (Macaulay's Theorem). 任意の斉次イデアル I に対して, $\text{HS}(S/I; t) = \text{HS}(S/J; t)$ を満たす lexsegment イデアル J が一意に存在する. さらに, 任意の $d \geq 0$ に対して, J の次数 d の極小生成元の個数は他のどの単項式イデアルの次数 d の極小生成元の個数よりも等しいか多い.

sketch of proof. $L_d \subset S_d$ を $|L_d| = \text{HF}(S/I; d)$ となるように lexsegment にとる.

$$L = \bigoplus L_d.$$

$I \rightsquigarrow \text{gin}_{\preceq}(I)$ でヒルベルト級数を変えずに Borel-fixed 単項式イデアルに変換し, Borel-fixed 単項式イデアルの中で比較しながら I がイデアルであることとそれの極小生成元の数を考える. $\square$

3 ジェネリックイデアル

3.1 ジェネリックイデアル

- $I = (f_1, \dots, f_s)$.
- $\deg(f_i) = d_i \geq 1$.

生成系の各 f_i は次数 d_i の単項式の一次結合でかけるので, $a_{j,k} \in \mathbb{k}$ として

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{1,1}x_1^{d_1} + a_{1,2}x_1^{d_1-1}x_2 + \dots + a_{1,r_1}x_n^{d_1} \\ &\vdots \\ f_s &= a_{s,1}x_1^{d_s} + a_{s,2}x_1^{d_s-1}x_2 + \dots + a_{s,r_s}x_n^{d_s} \end{aligned}$$

という形でかける.

ここで $r_i = \binom{n+d_i-1}{d_i}$ は d_i 次単項式の個数であり, $N = \sum_{i=1}^s r_i$ とする.

係数 $a_{j,k}$ を並べて $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ の点と対応させることでイデアル I を点 $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ と対応させることができる.

$$I = (f_1, \dots, f_s) \leftrightarrow \mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N.$$

$\mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ のザリスキ開集合 U が存在して, U の点に対応するイデアル全てで同じ性質を共有するとき, その性質は**ジェネリック**なイデアルで成り立つといわれる. 例えば以下のような性質が知られている.

Lemma 3.1 ([3, Theorem 1]). $n, s, d_1, \dots, d_s$ を固定する. 稠密なザリスキ開集合 $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ が存在して, U の各点 $\mathbf{a}$ に対応するイデアル I でヒルベルト級数 $\text{HS}(S/I)$ が同じになる.

以下の予想は **Fröberg 予想**として知られている.

Conjecture 3.2 ([2]). $n, s, d_1, \dots, d_s$ を固定する. *Lemma 3.1* で記述されているジェネリックなイデアル I について, ヒルベルト級数 $\text{HS}(S/I; t)$ は $|\frac{\prod_{i=1}^s (1-t^{d_i})}{(1-t)^n}|$ になる. ここで, $|\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i|$ は b_i を以下のように定義された形式的冪級数 $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ である:

$$b_i = \begin{cases} a_i & (a_j > 0 \text{ for all } j \leq i) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

また, イニシャルイデアルに関しても *Lemma 3.1* と同じような補題がある.

Lemma 3.3 (See, e.g., [5]). 単項式順序 $\preceq$ を固定する. 稠密なザリスキ開集合 $V \subset \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^N$ が存在して, V の各点 $\mathbf{a}$ に対応するイデアル I でイニシャルイデアル $\text{in}_{\preceq}(I)$ が同じになる.

Definition 3.4. J を単項式イデアルとし, $\preceq$ を次数付き逆辞書式順序とする. J の極小生成系にある任意の単項式 m について, $\deg(m) = \deg(m')$ かつ $m \preceq m'$ が成り立つ全ての単項式 m' が再び J に属するとき, J は **weakly reverse lexicographic** であるという.

以下の予想は **Moreno-Socías 予想** として知られている.

Conjecture 3.5 ([4]). $n, s, d_1, \dots, d_s$ を固定する. *Lemma 3.3* で記述されているジェネリックなイデアル I について, 次数付き逆辞書式順序に関する I のイニシャルイデアルは *weakly reverse lexicographic* である.

Lemma 3.1 と *Lemma 3.3* で記述されている稠密なザリスキ開集合 U と V は $V \subset U$ であるが一般には等しくない. 今後, U の点に対応するイデアルを U -ジェネリックイデアルと呼び, V の点に対応するイデアルを V -ジェネリックイデアルと呼ぶことにする.

4 自分の結果

Moreno-Socías 予想を辞書式順序へ類推した場合を考えてみる. weakly reverse lexicographic イデアルの辞書式順序版として lexsegment イデアルを使う.

Theorem 4.1. $n, s, d_1, \dots, d_s$ を固定し, 単項式順序を辞書式順序とする. ある点 $\mathbf{a} \in U$ が存在して, $\mathbf{a}$ に対応する I のイニシャルイデアルが *lexsegment* ならば, V -ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルは *lexsegment* である.

Theorem 4.1 を使って, V -ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルが *lexsegment* になるような状況を見つけることができた.

Corollary 4.2. 体 $\mathbb{k}$ の標数を 0 とする. n, s と d_i が以下のうちのどれかひとつの条件を満たすならば, V -ジェネリックイデアルの辞書式順序に関するイニシャルイデアルは *lexsegment* である.

- $n = 3, s = 2$, and $2 \leq d_1, d_2 \leq 3$.
- $n = 3, s = 3$, and $2 \leq d_1, d_2, d_3 \leq 3$.
- $n = 4, s = 3$, and $2 \leq d_1, d_2, d_3 \leq 3$.

他にも V -ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルを計算する方法を考案した.

Definition 4.3. $\bar{t}$ を $\bar{x}$ とは共通部分を持たない別の変数の集合とする. $\preceq_{\bar{t}}$ と $\preceq$ をそれぞれ $\mathcal{M}(\bar{t})$ と $\mathcal{M}(\bar{x})$ 上の単項式順序とする. u_1, u_2 を $\mathcal{M}(\bar{t})$ の単項式とし, v_1, v_2 を $\mathcal{M}(\bar{x})$ の単項式とする. $\mathcal{M}(\bar{t} \cup \bar{x})$ 上の単項式順序 $\preceq'$ を以下のように定める:

$$u_1 v_1 \preceq' u_2 v_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} v_1 \preceq v_2 \text{ または } (v_1 = v_2, \text{ かつ } u_1 \preceq_{\bar{t}} u_2).$$

単項式順序 $\preceq'$ を $\mathcal{M}(\bar{t} \cup \bar{x})$ 上の**逆ブロック順序**と呼ぶ.

以降, $\mathcal{M}(\bar{t} \cup \bar{x})$ 上の単項式順序 $\preceq'$ は逆ブロック順序とし, $\preceq'$ を $\mathcal{M}(\bar{x})$ 上の単項式順序に制限した $\preceq$ は $\mathcal{M}(\bar{x})$ の単項式順序として考えていたもの (ここでは特に辞書式順序) とする. また, 多項式 $g \in \mathbb{k}[\bar{t}, \bar{x}]$ について, $\text{LM}_{\preceq}(g)$ は g を $\mathbb{k}[\bar{t}][\bar{x}]$ の元として見たときの, $\mathcal{M}(\bar{x})$ の単項式順序 $\preceq$ に関しての先頭単項式とする. つまり $\text{LM}_{\preceq}(g)$ は $\mathcal{M}(\bar{x})$ の単項式である.

Theorem 4.4. I' を $\mathbb{K}[\bar{t}, \bar{x}]$ のイデアルで

$$\begin{aligned} F_1 &= t_{1,1}x_1^{d_1} + t_{1,2}x_1^{d_1-1}x_2 + \cdots + t_{1,r_1}x_n^{d_1} \\ &\vdots \\ F_s &= t_{s,1}x_1^{d_s} + t_{s,2}x_1^{d_s-1}x_2 + \cdots + t_{s,r_s}x_n^{d_s}. \end{aligned}$$

で生成されているとする. $\mathcal{G}$ を逆ブロック順序 $\preceq'$ に関する I' のグレブナー基底とする. このとき, $\{\text{LM}_{\preceq}(g) \mid g \in \mathcal{G}\}$ で生成される $\mathbb{K}[\bar{x}]$ の単項式イデアルは V -ジェネリックイデアルの, 制限した単項式順序 $\preceq$ に関するイニシャルイデアルになっている.

Theorem 4.4 を使って, U -ジェネリックイデアルの中でイニシャルイデアルが *lexsegment* になるような例は存在しないことを特定の状況下で示した.

Corollary 4.5. 体 $\mathbb{K}$ の標数を 0 とする. $n = 4, s = 2, d_1 = d_2 = 2$ のとき, 点 $\mathbf{a} \in U$ で, 対応するイデアルの辞書式順序に関するイニシャルイデアルが *lexsegment* になるような $\mathbf{a}$ は存在しない.

参考文献

- [1] David Bayer and Michael Stillman, *A theorem on refining division orders by the reverse lexicographic order*, Duke Math. J. **55** (1987), no. 2, 321–328. MR 894583
- [2] Ralf Fröberg, *An inequality for Hilbert series of graded algebras*, Math. Scand. **56** (1985), no. 2, 117–144. MR 813632
- [3] Ralf Fröberg and Clas Löfwall, *On Hilbert series for commutative and noncommutative graded algebras*, J. Pure Appl. Algebra **76** (1991), no. 1, 33–38. MR 1140638
- [4] Guillermo Moreno-Socías, *Degrevlex Gröbner bases of generic complete intersections*, J. Pure Appl. Algebra **180** (2003), no. 3, 263–283. MR 1966660
- [5] Keith Pardue, *Generic sequences of polynomials*, J. Algebra **324** (2010), no. 4, 579–590. MR 2651558