§1. q-deformed rationals and fence posets

$n \in \mathbb{Z}$ の q-変形 $[n]_q = \dfrac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} 1+q+\cdots+q^{n-1} & (n>0) \\ 0 & (n=0) \\ -q^{-1}-q^{-2}\cdots-q^{n} & (n<0) \end{cases}$

Mourier-Genoud & Ovsienko (2020) は有理数（既約分数 $\frac{r}{s}$, $s>0$）の q-変形

$$\left[\frac{r}{s}\right]_q = \frac{R_{\frac{r}{s}}(q)}{S_{\frac{r}{s}}(q)} \quad (R_{\frac{r}{s}}(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm1}],\ S_{\frac{r}{s}}(q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q])$$ を導入

ある種の 2-Calabi-Yau 圏の球面対象、団代数、有理絡み目のジョーンズ多項式
fence poset の組合せ論、… 等々とつながり有り。

Exmp. $\left[\frac{n}{1}\right]_q = \frac{[n]_q}{1}$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$\left[\frac{7}{5}\right]_q = \frac{q^4+2q^3+2q^2+q+1}{q^3+2q^2+q+1}, \quad \left[\frac{8}{5}\right]_q = \frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^3+q^2+2q+1}$$

一般に次が成立

- $R_{\frac{r}{s}}(1) = r$, $S_{\frac{r}{s}}(1) = s$
- $R_{\frac{r}{s}}(q)$ と $S_{\frac{r}{s}}(q)$ は互いに素
- $S_{\frac{r}{s}}(q)$ は monic で $S_{\frac{r}{s}}(0)=1$. さらに unimodal (Kantarci-Oğuz & Ravichandran)
  $\frac{r}{s}>1$ なら $R_{\frac{r}{s}}(q)$ も同様　　一段非自明

$\left[\frac{r}{s}\right]_q$ の構成法はいくらでもあるが、一番シンプルな「連分数と fence poset」を使うものから紹介

$\frac{r}{s}>1$ の連分数展開 $\dfrac{r}{s} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}$ $(a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{Z}_{>0})$

を $\frac{r}{s} = [a_1, a_2, \cdots, a_k]$ と記す

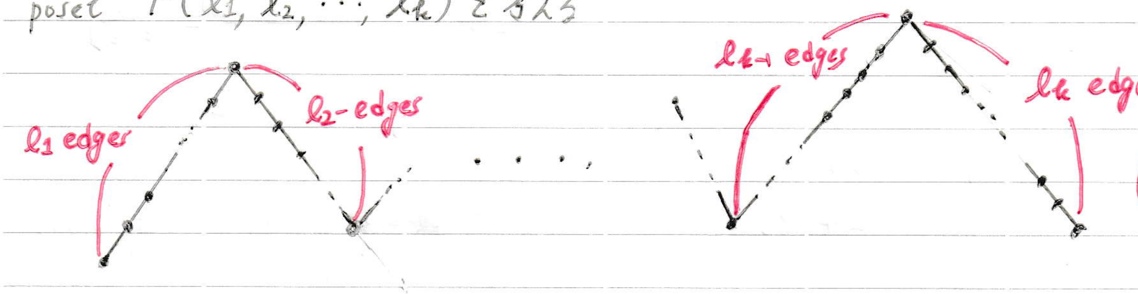
$\dfrac{7}{5} = 1+\dfrac{2}{5} = 1+\cfrac{1}{\frac{5}{2}} = 1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$ より $\frac{7}{5} = [1,2,2]$

$\dfrac{8}{5} = 1+\cfrac{1}{\frac{5}{3}} = 1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$ より $\frac{8}{5} = [1,1,1,2]$

$\frac{r}{s} = [a_1, a_2, \cdots, a_k]$ with $a_k \geq 2$ に対し　$[a_1, a_2, \cdots, a_k] = [a_1, a_2, \cdots, a_k - 1, 1]$
なので k の偶奇を調整可

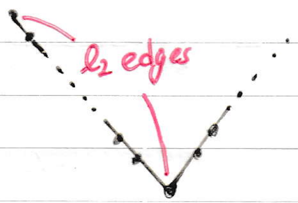
例　$\frac{7}{5} = [1.2.2] = [1.2.1.1]$

Def. 整数 $l_1, l_k \geq 0$, $l_2, l_3, \cdots, l_{k-1} \geq 1$ に対し次のようなHasse図を持つ poset $F(l_1, l_2, \cdots, l_k)$ を考える



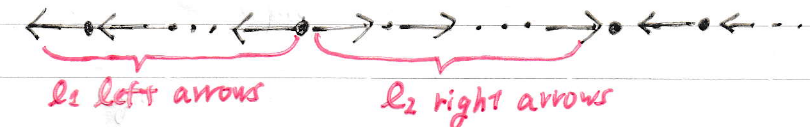
(図は k を偶としている)

$l_1 = 0$ のとき



から始める.　$l_k = 0$ のときも同様

このような poset を fence と言う　ただし ここでは都合により $F(l_1, l_2, \cdots, l_k)$ を quiver とみなす



つまり Hasse図で x ／ y であるとき quiver では $x \longleftarrow y$ とする

Def. Q を quiver, $V(Q)$ をその頂点集合とする. $C \subset V(Q)$ が closure とは C の内部から外部に向かう矢印が存在しないこと

Rem　$F(a_1, \cdots, a_k)$ を poset とみたとき closure は lower ideal に対応

Def. finite quiver Q に対し

$$Cl(Q, x) := \sum_{C:\, Q \text{の closure}} x^{|C|}$$

とおく

つまり $Cl(Q.x)$ は closure の母関数

Def 1 (MG-Ov) $\frac{r}{s}=[a_1, a_2, \cdots, a_k]>1$ に対し
$$R_{\frac{r}{s}}(q) = Cl(F(\underline{a_1-1}, a_2, \cdots, a_{k-1}, \underline{a_k-1}), q)$$
$$S_{\frac{r}{s}}(q) = Cl(F(0, a_2-1, a_3, \cdots, a_{k-1}, \underline{a_k-1}), q)$$

- 分母の quiver $F(0, a_2-1, a_3, \cdots)$ は分子の quiver $F(a_1-1, a_2, \cdots)$ の左から a_1 個の arrow を除いたもの

- $a_1=1$, $a_k=1$ のとき、Def 中の — 部は 0 となるが、$F(l_1, \cdots, l_k)$ は $l_1=0, l_k=0$ を許す仕様。下の方の quiver は $a_2=1$ のとき $F(0, 0, a_3 \cdots)$ だが、これは $F(a_3, a_4, \cdots)$ と解釈する

- 連分数展開は $a_k \geq 2$ のとき $[a_1, a_2, \cdots, a_k]=[a_1, a_2, \cdots, a_k-1, 1]$ と言う「表記のゆれ」が有るが $F(a_1-1, a_2, \cdots, a_k-1)=F(a_1-1, a_2, \cdots, a_k-1, 1-1)$ であり、quiver は変わらない

- 本講演では触れられなかったが後述の多項式 $J_{\frac{r}{s}}(q)$ は poset でない quiver の closure polynomial として与えられる

Exmp $\frac{7}{3}=[1, 2, 2]$ だが $F(0, 2, 1) = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4$ より
($0 = 1-1$, $1 = 2-1$)

closure の size	closure	個数
0	ϕ	1
1	$\{3\}$	1
2	$\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$	2
3	$\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$	2
4	$\{1, 2, 3, 4\}$	1

$$R_{\frac{7}{3}}(q) = Cl(F(0, 2, 1), q) = 1+q+2q^2+2q^3+q^4$$

$F(0, 1, 1) = 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$ より

closure の size	closure	個数
0	ϕ	1
1	$\{2\}$	1
2	$\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$	2
3	$\{1, 2, 3\}$	1

$$S_{\frac{7}{3}}(q) = Cl(F(0, 1, 1), q) = 1+q+2q^2+q^3$$

- 構成より $\frac{r}{s}>1$ のとき $S_{\frac{r}{s}}(q)$ は $\frac{r}{s}$ の「小数部分」のみで決まる
  実はこの仮定いらない

以下の式で $\frac{r}{s} \leq 1$ に $[\frac{r}{s}]_q$ を拡張する（そのように拡張できる）

Prop. 2 (MG-Ov)

(1) $[\frac{r}{s}+n]_q = q^n[\frac{r}{s}]_q + [n]_q \quad (n \in \mathbb{Z})$

(2) $[-\frac{r}{s}]_q = -q^{-1}[\frac{r}{s}]_{q^{-1}}$

(3) $[-\frac{s}{r}]_q = \dfrac{1}{[\frac{r}{s}]_{q^{-1}}}$

(1) より　$r \equiv r' \pmod s \Longrightarrow \mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q) = \mathcal{S}_{\frac{r'}{s}}(q) \cdots (*)$

Convention & Definition

$f(q), g(q) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ に対し　$f(q) \equiv g(q) \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f(q) = q^n g(q) \quad ({}^\exists n \in \mathbb{Z})$

$\mathbb{Z}[q] \ni f(q) = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n \quad (a_n \neq 0)$ に対し

$f(q)^\vee := q^n f(q^{-1}) = a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_0 q^n$

$f(q) \in \mathbb{Z}[q]$ は palindromic $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(q) = f(q)^\vee$

(2) は　$\mathcal{S}_{-\frac{r}{s}}(q) = \mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q)^\vee, \quad \mathcal{R}_{-\frac{r}{s}}(q) \equiv -\mathcal{R}_{\frac{r}{s}}(q^{-1})$

(3) は　$\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q) \equiv \pm \mathcal{R}_{\frac{s}{r}}(q^{-1})$　（$\pm$ は r の符号と同じ）

$\mathcal{R}_{\frac{r}{s}}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ とは限らないので $\mathcal{R}_{\frac{r}{s}}(q)^\vee$ は定義されない

Thm 3 (Kogiso-Miyamoto-Ren-Wakui-Y.)

(1) $r + r' \equiv 0 \pmod s \Longrightarrow \mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q) = \mathcal{S}_{\frac{r'}{s}}(q)^\vee \cdots (a)$

$rr' \equiv 1 \pmod s \Longrightarrow \mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q) = \mathcal{S}_{\frac{r'}{s}}(q)^\vee \cdots (b)$

$rr' \equiv -1 \pmod s \Longrightarrow \mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q) = \mathcal{S}_{\frac{r'}{s}}(q) \cdots (c)$

(2) $r^2 \equiv 1 \pmod s \Longleftrightarrow \mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q)$ は palindromic

分子多項式 $\mathcal{R}_{\frac{r}{s}}(q)$ についても Prop 2 (3) より同様のことが言えるが、ここでは略

∵ (2) はやや難しい。(1) のみ示す。

(1) (a) は Prop 2 (2) と (*)（つまり Prop 2 (1)）から従う。(b)と同様 quiver からも従う

(b) を示す。(*) より $\frac{r}{s}, \frac{r'}{s} > 1$ としてよい　よって Thm 1 が使える

$rr' \equiv 1 \pmod{s}$ とする。 連分数の一般論から

$\frac{r}{s} = [a_1, a_2, \cdots, a_{2m}]$ とすると $\frac{r'}{s} = [a_1', a_{2m}, a_{2m-1}, \cdots, a_2]$

今回は偶数であることが重要。　ここは $\frac{r'}{s}$ の整数部分

(例 $\frac{7}{5} = [1, 2, 1, 1]$, $\frac{8}{5} = [1, 1, 1, 2]$)

このとき $F(0, a_2-1, a_3, \cdots, a_{2m}-1) = F(0, a_{2m}-1, a_{2m-1}, \cdots, a_2-1)^{op}$

ここで opは quiver で言えば 矢印の反転、poset で言えば 順序の反転

(例 $\frac{7}{5} = [1.2.1.1]$ の 分母 quiver は $F(0, \underset{2-1}{1}, 1, \underset{1-1}{0}) = \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$

$\frac{8}{5} = [1.1.1.2]$ のそれは $F(0, \underset{1-1}{0}, 1, \underset{2-1}{1}) = F(1.1) = \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$ で互いに op)

一般に finite quiver Q と $C \subset V(Q)$ に対し

C は Q の closure $\iff$ $V(Q) \setminus C$ は Q^{op} の closure

よって $cl(Q, q) = cl(Q^{op}, q)^{\vee}$.

上の考察から

$$\begin{aligned} S_{\frac{r}{s}}(q) &= cl(F(0, a_2-1, a_3, \cdots, a_{2m}-1), q) \\ &= cl(F(0, a_{2m}-1, a_{2m-1}, \cdots, a_2-1)^{op}, q) \\ &= cl(F(0, a_{2m}-1, a_{2m-1}, \cdots, a_2-1), q)^{\vee} = S_{\frac{r'}{s}}(q)^{\vee} \end{aligned}$$

(c) は (a) と (b) から従う。 □

Conj. A (KMRWY)　sが素数のとき

$S_{\frac{r}{s}}(q) = S_{\frac{r'}{s}}(q) \iff r \equiv r' \pmod{s}$ または $rr' \equiv -1 \pmod{s}$

- $\Leftarrow$ は常に(sが合成数でも)正しい。 $\Rightarrow$ が問題。
- 「sは素数」と言う仮定は本当に必要。 たとえば $S_{\frac{5}{24}}(q) = S_{\frac{11}{24}}(q)$
  この他 $s = 51, 57, 60, 63 \cdots$ 等で「反例」アリ。

以下は、後述の「PSL(2, $\mathbb{Z}$) と q-deformed rational」のあとで述べた方が理論的には自然だが、ここで話す。$\mathcal{R}_{\frac{r}{s}}(q)$ でも同様だが、ここでは $\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q)$ のみで話す。

Prop 5 (MG-Ov)

$$\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(-1) = \begin{cases} 0 & (s:\text{偶}) \\ \pm 1 & (s:\text{奇}) \end{cases}$$

これを一般化する

Thm 6 (KMWRY)

(1) $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とすると

$$\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(\omega) = \begin{cases} 0 & (s \equiv 0 \pmod 3) \\ 1,\ \omega,\ \omega^2 & (s \equiv 1 \pmod 3) \\ -1,\ -\omega,\ -\omega^2 & (s \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}$$

(2) $i = \sqrt{-1}$ とすると

$$\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(i) = \begin{cases} 0 & (s \equiv 0 \pmod 4) \\ \pm 1 \pm i \ (\text{複号任意}) & (s \equiv 2 \pmod 4) \\ \pm 1,\ \pm i & (s \equiv 1 \pmod 2) \end{cases}$$

同様のことは $n \geq 5$ に対する 1 の原始 n 乗根に対しては不成立

Conj. B. s が素数なら $\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約

Prop 5. Thm 6 および「$\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q)$ は正係数なので、正の実数解を持たない」から次が言える

- s が素数のとき、$\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q)$ が $\mathbb{Q}$ 上可約ならば、各因子の次数は 7 以上

§2 q-deformed rationals of the modular group

$R := \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $L := \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ は $SL(2,\mathbb{Z})$ を生成

$PSL(2,\mathbb{Z}) := SL(2,\mathbb{Z})/\underbrace{\{\pm E_2\}}_{SL(2,\mathbb{Z})\text{ の中心}}$: modular group

$R_q := \begin{pmatrix}q&1\\0&1\end{pmatrix}$, $L_q := \begin{pmatrix}q&0\\q&1\end{pmatrix}$: R, L の q-deformation

$G_q := \langle R_q, L_q\rangle \subset GL(2,\mathbb{Z}[q^{\pm1}])$ は $\{\pm q^n E_2 \mid n\in\mathbb{Z}\}$ を中心として含む

($S = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ も $SL(2,\mathbb{Z})$ の元として有名だが これの q-deformation は $S_q = \begin{pmatrix}0&-q^{-1}\\1&0\end{pmatrix}$
これも重要だが、今回は略.

$PSL_q(2,\mathbb{Z}) := G_q/\langle \pm q E_2\rangle$: modular group の q-変形

Thm 7 (Leclere-MG)
$\varphi: \underset{\langle R_q, L_q\rangle}{\underset{\parallel}{G_q}} \ni A \longmapsto A_q|_{q=1} \in SL(2,\mathbb{Z})$ は、同型 $PSL_q(2,\mathbb{Z}) \cong PSL(2,\mathbb{Z})$ を与える

Thm 8 (MG-Ov)
$\begin{pmatrix}\mathcal{R}(q)&\mathcal{T}(q)\\ \mathcal{S}(q)&\mathcal{U}(q)\end{pmatrix} \in PSL_q(2,\mathbb{Z})$ with $\begin{pmatrix}\mathcal{R}(1)&\mathcal{T}(1)\\ \mathcal{S}(1)&\mathcal{U}(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r&t\\s&u\end{pmatrix}\in PSL(2,\mathbb{Z})$
に対し $\left[\frac{r}{s}\right]_q = \frac{\mathcal{R}(q)}{\mathcal{S}(q)}$, $\left[\frac{t}{u}\right]_q = \frac{\mathcal{T}(q)}{\mathcal{U}(q)}$ (ただし $\left[\frac{1}{0}\right]_q = \frac{1}{0}$ とする).

2026/1/28 追記. 2025/12/13 当日の発表では $\zeta=\zeta_5$ の場合を見落としておりました. ここではお詫びの上、訂正させて頂きます

以下, 1の原始 n 乗根を ζ_n と記す.

Thm 9 $\zeta\in\mathbb{C}^*$ に対し $G_q(\zeta) := \{A|_{q=\zeta} \mid A\in G_q\} \subset GL(2,\mathbb{C})$ とおくて
$|G_q(\zeta)| < \infty \iff \zeta = \zeta_n$ for $n=2,3,4,5$
さらに $G_q(\overset{=-1}{\zeta_2}) \cap SL(2,\mathbb{Z}) \cong C_6$,
$G_q(\zeta_3)\cap SL(2,\mathbb{C}) \cong G_q(\underset{i}{\zeta_4})\cap SL(2,\mathbb{C}) \cong SL(2,\mathbb{F}_3)$, $G_q(\zeta_5)\cap SL(2,\mathbb{C})\cong SL(2,\mathbb{F}_5)$

・$SL(2,\mathbb{F}_3)$ は binary tetrahedral group と呼ばれる 位数24の群.
・$SL(2,\mathbb{F}_5)$ は binary icosahedral group —— 位数120 ——

∵ $H := G_q(\omega) \cap SL(2,\mathbb{C}) \cong SL(2,\mathbb{F}_3)$ の証明のみ解説

H は $\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{i} := \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{j} := \begin{pmatrix} -\omega^2 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{k} := \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ \omega & -\omega \end{pmatrix}$

の4元を持つが $\mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = \mathbb{i}\mathbb{j}\mathbb{k} = -\mathbb{1}$ をみたし

$\{a\mathbb{1} + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ は四元数体

さらに $H = \{\pm\mathbb{1}, \pm\mathbb{i}, \pm\mathbb{j}, \pm\mathbb{k}\} \cup \{\frac{1}{2}(\pm\mathbb{1} \pm\mathbb{i} \pm\mathbb{j} \pm\mathbb{k})\}$ であり

これらは $SL(2,\mathbb{F}_3)$ と同型

注 ・ $H \subset Mat(2,\mathbb{C})$ が生成する加法群は Hurwitz order と呼ばれ同型

・ $G_q(i) \cap SL(2,\mathbb{C}) \cong SL(2,\mathbb{F}_3)$ も同様に示せる

既約分数 $\frac{r}{s} > 1$ に対し 有理絡み目 $L(\frac{r}{s})$ が定まる。 1:1 ではない

Thm 10 (Schubert 1956) $\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'} > 1$ に対し 次は同値

- $L(\frac{r}{s})$, $L(\frac{r'}{s'})$ は isotopic
- $r = r'$ かつ $s = s'$ or $ss' \equiv 1 \pmod r$

$L(\frac{r}{s})$ の正規化ジョーンズ多項式を $J_{\frac{r}{s}}(q)$ と記す

変数を q とするのは変だが ココでは使う

Thm 11 (MG-Ov) $\frac{r}{s} > 1$ に対し

$$J_{\frac{r}{s}}(q) = q R_{\frac{r}{s}}(q) + (1-q) S_{\frac{r}{s}}(q)$$

$J_{\frac{r}{s}}(1) = r$ であり $R_{\frac{r}{s}}(q)$ の variant とも言える。Thm12 その他から、次が言える

Thm 12 (Ren-Y) $\frac{r}{s}, \frac{r}{s'} > 1$ に対し

(i) $s + s' \equiv 0 \pmod r \Longrightarrow J_{\frac{r}{s}}(q) = J_{\frac{r}{s'}}(q)^\vee$

(ii) $ss' \equiv 1 \pmod r \Longrightarrow J_{\frac{r}{s}}(q) = J_{\frac{r}{s'}}(q)$

(iii) $s^2 \equiv -1 \pmod r \Longleftrightarrow J_{\frac{r}{s}}(q)$ は palindromic

参考. $\frac{r}{s}, \frac{r}{s'} > 1$ に対し ● $s + s' \equiv 0 \pmod r \Rightarrow R_{\frac{r}{s}}(q) = R_{\frac{r}{s'}}(q)^\vee$

● $ss' \equiv 1 \pmod r \Rightarrow R_{\frac{r}{s}}(q) = R_{\frac{r}{s'}}(q)^\vee$ ● $s^2 \equiv 1 \pmod r \Longleftrightarrow R_{\frac{r}{s}}(q)$ は palindromic

と似た所と、真逆な所がある

$\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ の元を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(q) & \mathcal{T}(q) \\ \mathcal{S}(q) & \mathcal{U}(q) \end{pmatrix}$ に対し

$A^{T_q} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(q) & q^{-1}\mathcal{S}(q) \\ q\mathcal{T}(q) & \mathcal{U}(q) \end{pmatrix}$ とおく

Prop 13. (Ren & Y.) $\quad A \in \underset{\langle R_q,\, L_q \rangle}{\overset{}{\underset{\parallel}{G_q}}} \iff A^{T_q} \in G_{q}$

Cor 14 (Ren & Y.)

$\begin{pmatrix} \mathcal{R}(q) & \mathcal{T}(q) \\ \mathcal{S}(q) & \mathcal{U}(q) \end{pmatrix} \in PSL_q(2.\mathbb{Z})$ with $\begin{pmatrix} \mathcal{R}(1) & \mathcal{T}(1) \\ \mathcal{S}(1) & \mathcal{U}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \in PSL(2.\mathbb{Z})$

に対し $\quad \left[\frac{r}{t}\right]_q = \frac{\mathcal{R}(q)}{q\mathcal{T}(q)}$, $\quad \left[\frac{s}{u}\right]_q = \frac{\mathcal{S}(q)}{q\mathcal{U}(q)}$

Thm 15 (Leclere-MG)

$A \in PSL_q(2, \mathbb{Z})$ に対し、$\mathrm{Tr}A \neq 0$ なら、$\mathrm{Tr}A$ は palindromic かつ係数の正負がそろった多項式と $\equiv$

Ren-Y. のアイデアを用いた palindromic 性の別証明.

$\because$ $A \in PSL_q(2.\mathbb{Z})$ に対し、$PSL_q(2.\mathbb{Z}) \ni M := (-S_q)^{-1}A = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(q) & \mathcal{T}(q) \\ \mathcal{S}(q) & \mathcal{U}(q) \end{pmatrix}$
とおくと $\mathrm{Tr}A = q^{-1}\mathcal{S}(q) - \mathcal{T}(q)$. $\quad \begin{pmatrix} \mathcal{R}(1) & \mathcal{T}(1) \\ \mathcal{S}(1) & \mathcal{U}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}$ としたとき

$\mathrm{Tr}A$ を $\equiv$ で保ったまま $r/s,\ r/t > 1$ の場合に帰着できる. このとき
$st \equiv -1 \pmod{r}$ より $J_{r/t}(q) = J_{r/s}(q)^{\vee}$ であり、

$$
\begin{aligned}
J_{\frac{r}{s}}(q) - J_{\frac{r}{s}}(q)^{\vee} &= J_{\frac{r}{s}}(q) - J_{\frac{r}{t}}(q) \\
&= \left(q\mathcal{R}_{\frac{r}{s}}(q) + (1-q)\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q)\right) - \left(q\,\overset{\mathcal{R}_{\frac{r}{s}}(q)}{\overset{/\!/}{\boxed{\mathcal{R}_{\frac{r}{t}}(q)}}} + (1-q)\mathcal{S}_{\frac{r}{t}}(q)\right) \\
&= (1-q)\left(\mathcal{S}_{\frac{r}{s}}(q) - \mathcal{S}_{\frac{r}{t}}(q)\right) \\
&\equiv (1-q)\,\mathrm{Tr}A .
\end{aligned}
$$

$f(q) \in \mathbb{Z}[q]$ が $f(q)^{\vee} = -f(q)$ をみたすとき anti-palindromic と言うことにする

$J_{\frac{r}{s}}(q) - J_{\frac{r}{s}}(q)^{\vee}$ は anti-palindromic poly と $\equiv$, $\quad 1-q$ は anti-palindromic

よって $\mathrm{Tr}A$ は palindromic poly と $\equiv$ $\square$