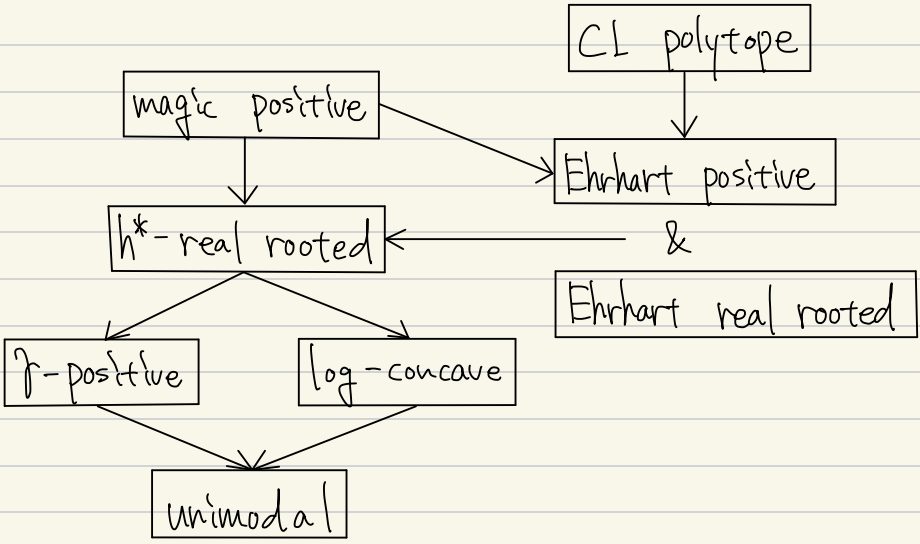
Ehrhart 多項式と h^*-多項式の根について

ref

- Ferroni-Higashitani
  "Example and counterexamples in Ehrhart theory"
- Steve Fisk
  "Polynomials, roots, and interlacing"
- M. Konoike
  "A new class of magic positive Ehrhart polynomials of reflexive polytope"
- Higashitani-Kummer-Michatek
  "Interlacing Ehrhart polynomials of reflexive polytopes"



Ehrhart Theory

- 凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ が **整凸多面体** であるとは P の頂点が $\mathbb{Z}^d$ の点であるときにいう

- $0 \in P$, $\dim P = d$ とする. 整凸多面体 P が **反射的多面体** であるとは.
  $P^* = \{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall y \in P \}$
  もまた整凸多面体になるときにいう

$E_P(n) = |nP \cap \mathbb{Z}^d| = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \cdots + a_0 \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$ Ehrhart 多項式

Facts

(i) $a_0 = 1$, $a_d = \mathrm{Vol}(P)$, $a_{d-1} = \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(\partial P)$

(ii) $|n(P \setminus \partial P) \cap \mathbb{Z}^d| = (-1)^d E_P(-n)$ (Ehrhart-Macdonald reciprocity)

(iii) P が反射的多面体 $\Leftrightarrow E_P(n) = (-1)^d E_P(-n-1)$

$$1 + \sum_{n \geq 1} E_P(n) t^n = \frac{h^*_P(t)}{(1-t)^{d+1}}$$ h^*-多項式

Facts

(i) $h_0^* = 1$, $h_1^* = |P \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$, $h_d^* = |(P \setminus \partial P) \cap \mathbb{Z}^d|$

(ii) $h_i^* \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (Stanley)

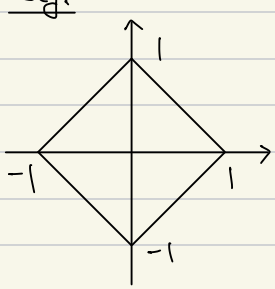
(iii) P が反射的多面体 $\Leftrightarrow h_i^* = h_{d-i}^* \ \forall i$ (Hibi)

(iv) $E_P(n) = h_0^* \binom{n+d}{d} + h_1^* \binom{n+d-1}{d} + \cdots + h_d^* \binom{n}{d} \rightsquigarrow \mathrm{Vol}(P) = \dfrac{h_0^* + \cdots + h_d^*}{d!}$

Remark

$d = 2$ とすると Pick の公式を得る.

e.g.



$E_P(n) = 2n^2 + 2n + 1$

$h^*_P(t) = t^2 + 2t + 1$

多項式の根

$$f(x)=\sum_{i=0}^{d} a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{R}$$

- $f(x)$ が real-rooted であるとは $f(x)$ の根がすべて実数であるときにいう
- $f(x)$ が log-concave であるとは $1 \le i \le d-1$ に対して $a_{i+1}^2 \ge a_{i-1} a_{i+1}$ が成立するときにいう
- $f(x)$ が unimodal であるとは，ある k が存在して $a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_k \ge \cdots \ge a_d$ が成立するときにいう

Facts

(i) real-rooted $\Rightarrow$ log-concave

(ii) log-concave かつ $a_i > 0$ $\Rightarrow$ unimodal

特に，$a_i = a_{d-i}$ $\forall i$ のとき

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \gamma_i (x+1)^{d-2i} x^i, \quad \gamma(x)=\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \gamma_i x^i$$

γ-多項式

- $f(x)$ が γ-positive であるとは，$\gamma_i \ge 0$ であるときにいう．

- P が integer decomposition property (IDP) をもつとは
  $\forall n \ge 1$, $\forall \alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d$ に対して $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P \cap \mathbb{Z}^d$ が存在して
  $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ が成り立つときにいう

Conjecture (Stanley)

P が IDP をもつ $\Rightarrow$ h^*-vector は unimodal

Theorem (Adiprasito, Papadakis, Petrotou and Steinmeyer)

P が Gorenstein かつ IDP をもつ $\Rightarrow$ h^*-vector は unimodal

Interlacing

$f, g \in \mathbb{R}[t]$, $\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}$ をそれぞれ f, g の根とする

f と g が interlace するとは

$g \preccurlyeq f$ $\cdots$ $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots$

が成り立つときにいう.

Theorem

f_1, f_2 を γ-positive な多項式. $\deg f_2 = \deg f_1 + 1$, $f_1(0), f_2(0) \neq 0$

g_1, g_2 を f_1, f_2 の γ-多項式とする.

If $g_2 \preccurlyeq g_1$ then $f_2 \preccurlyeq f_1$

Lemma

(1) $f \leq g$, $LC(f) \cdot LC(g) > 0$. $a, c > 0$

If $ad \leq bc$ then $(ax+b)f + (cx+d)g$ is real-rooted

(2) $f \leq g$, $LC(f) \cdot LC(g) > 0$, $h = af + (bx+c)g$

Then $h \leq g \Leftrightarrow LC(h)$ の sign と a の sign が同じ

Facts

(i) γ-positive な多項式 f が real-rooted

$\Leftrightarrow$ γ-多項式が real-rooted

Ehrhart 多項式の magic positive 性

$$E_P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i (n+1)^{d-i}$$

If $a_0, \dots, a_d \geq 0$ then we call $E_P(n)$ magic positive

Theorem

Ehrhart 多項式が magic positive

$\Rightarrow$ Ehrhart positive かつ h^* 多項式は real-rooted

Remark

一般に, magic positive は多項式に対して定義できる.

Fact

(1) $a_0 = 1$, $a_d = |(P \setminus \partial P) \cap \mathbb{Z}^d|$, $a_0 + \dots + a_d = \mathrm{Vol}(P)$

(2) P が反射的多面体 $\Leftrightarrow a_i = a_{d-i}$ $\forall i$

(3) Zonotope, Pitman-Stanley polytope are magic positive

Remark

If $\mathrm{Vol}(P) < 1$ then $E_P(n)$ is not magic positive

If P is reflexive and $\mathrm{Vol}(P) < 2$ then $E_P(n)$ is not magic positive

Stasheff polytope の Ehrhart 多項式の magic positive 化

$St_d = \mathrm{conv}\left(\{\pm e_i : 1 \le i \le d\} \cup \{e_i + \cdots + e_j : 1 \le i < j \le d\}\right)$

St_d は次元 d の反射的多面体になる.

St^*_d を Stasheff polytope と呼ぶ.

Theorem

$$E_{St^*_d}(n) = (2n+1)E_{St^*_{d-1}}(n) - \frac{1}{2}n(n+1)E_{St^*_{d-2}}(n)$$

(Sketch)

$A = St^*_{d-1} \times [-1,1] \setminus St^*_d$

$\Delta_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le n - \max\{m,0\},\ y \le n,\ x+y > n - \max\{m,0\}\}$

$\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y < n\}$

$$A_m = \left(\bigcup_{i=1}^{d-2} \left(n St^*_{d-2} \cap \{(x_1, \cdots, x_{d-2}) \in \mathbb{R}^{d-2} : x_i + \cdots + x_{d-2} = m\} \right) \right) \setminus \bigcup_{i=|m|+1}^{n} A_i$$

$$\bigcup_{-n \le m \le n} A_m \cap \mathbb{Z}^{d-1} = n St_{d-1} \cap \mathbb{Z}^{d-1}$$

Theorem

$E_{St^*_d}(n)$ is magic positive.

(pf)

$$E_{St^*_d}(n) - \frac{1}{2}n E_{St^*_{d-1}}(n) = \frac{1}{2}n E_{St^*_{d-1}}(n) + (n+1)\left(E_{St^*_{d-1}}(n) - \frac{1}{2}n E_{St^*_{d-2}}(n)\right)$$

$E_{St^*_0}(n) = 1$, $E_{St^*_1}(n) = 2n+1$

$$E_{St^*_2}(n) - \underbrace{\frac{1}{2}n E_{St^*_1}}_{\frac{1}{2}n(n+1)}(n) = \underbrace{\frac{1}{2}n E_{St^*_1}}_{\frac{1}{2}n(n+1)}(n) + (n+1)\left(\underbrace{E_{St^*_1}(n) - \frac{1}{2}n E_{St^*_0}(n)}_{(n+1)+\frac{1}{2}n}\right)$$

Ehrhart 多項式の根

P：d次元反射的多面体

- Pが反射的多面体 $\Leftrightarrow E_P(n) = (-1)^d E_P(-n-1)$

  PがCL polytopeであるとは，$E_P(n)$のすべての根の実部が$-\frac{1}{2}$になるときにいう

Theorem 1

If roots of $h^*_P(t)$ lie on unit circle then P is CL polytope

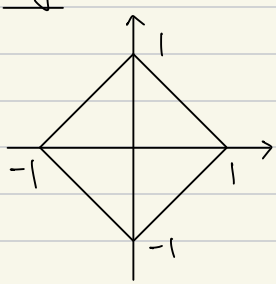
Theorem 2

$f, g, h \in \mathbb{R}[t]$, $\deg f = \deg g + 1 = \deg h + 2$, f, g, hは E-M reciprocity を満たす.

$f(t) = \alpha(2x+1)g(x) + \beta h(x)$, $(\alpha, \beta > 0)$

fとgが R-interlaced $\Leftrightarrow$ gとhが R-interlaced

e.g.



$E_P(n) = 2n^2 + 2n + 1$

$h^*_P(t) = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$

$E_P(n)$の根は $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$