辺着色グラフと関連する代数構造

前澤 俊一（日本大学）

2024/9/17（火）

可換代数と組合せ論セミナー

自己紹介

名前：前澤　俊一　（30才）

生年月日：1994年3月30日

出身：千葉県船橋市

所属：日本大学文理学部情報科学科　助教

研究分野：グラフ理論

（極値グラフ理論，linkage，辺着色グラフ など）

自己紹介：経歴

2012年4月～ 2016年3月	芝浦工業大学 情報科学科
2016年4月～ 2018年3月	同大学の数学科に転科 修士号を取得
2018年4月～	横浜国立大学環境情報学府に進学
2019年9月～12月	フランスに研究留学
2020年9月	博士（理学）を取得
2021年3月～ 2022年3月	電気通信大学　研究員 （学変B 組合せ遷移プロジェクトに参画）
2022年4月～ 2024年3月	東京理科大学　助教
2024年4月～	日本大学　助教

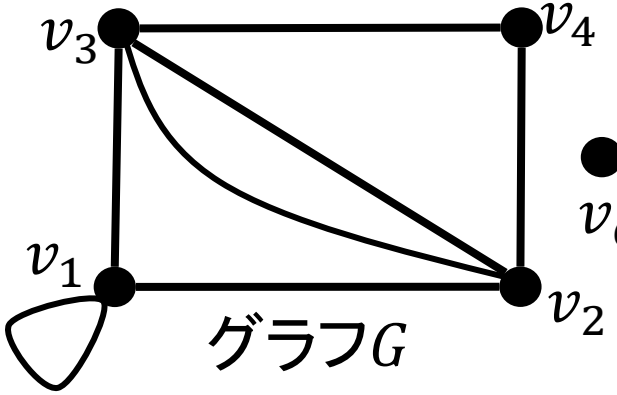
ヴェルサイユ庭園

グラフと辺着色グラフ

グラフ

定義

- **グラフ**とは，頂点集合 V と頂点の2元部分集合族 $E \subseteq [V]^2$ の組 (V, E)．E は辺集合という．
- 両端点が同一の辺を**自己ループ**，同一頂点間に2本以上存在する辺を**多重辺**という．
- 自己ループと多重辺を含まないグラフを**単純グラフ**という．



グラフG

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

$$E = \{\{v_1, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_6, v_7\}\}$$

グラフGの頂点集合を$V(G)$，辺集合を$E(G)$と表すこともある．

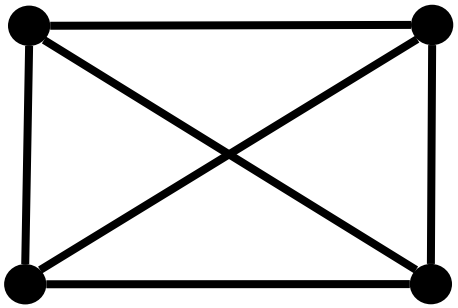
本講演では，単にグラフといった場合は単純グラフを指す．

多重辺を持つ（可能性のある）グラフは多重グラフといい，
自己ループを持つグラフは扱わない．

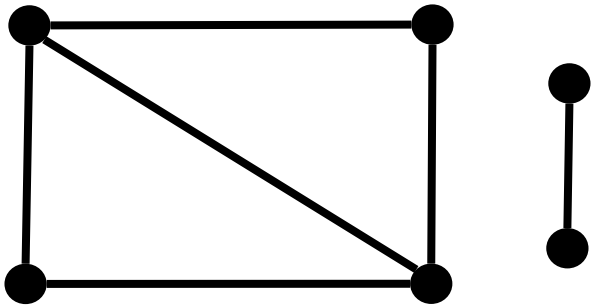
連結グラフ

定義

- グラフ(多重グラフ)Gが**連結**であるとは，Gの任意の2頂点間が G 上の辺をたどって到達できることである.
- グラフ(多重グラフ)Gの極大な連結部分グラフをGの**連結成分**あるいは，単に**成分**という.



連結グラフ
成分数 1

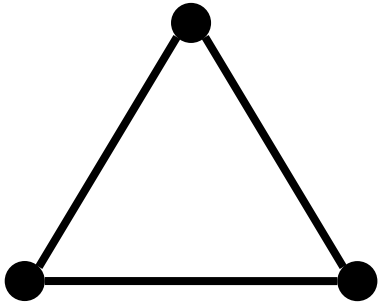


連結でない(非連結)グラフ
成分数 2

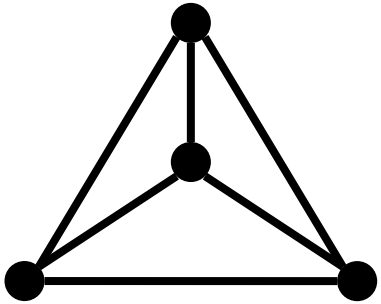
完全グラフ

定義（完全グラフ）

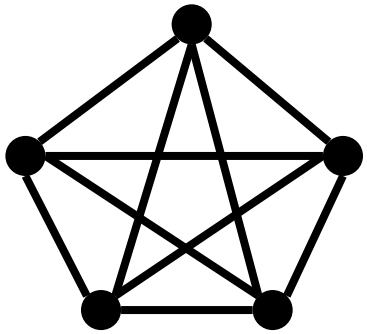
任意の2頂点が隣接するグラフを**完全グラフ**といい，n頂点からなる完全グラフを $\boldsymbol{K_n}$ で表す．



K_3



K_4

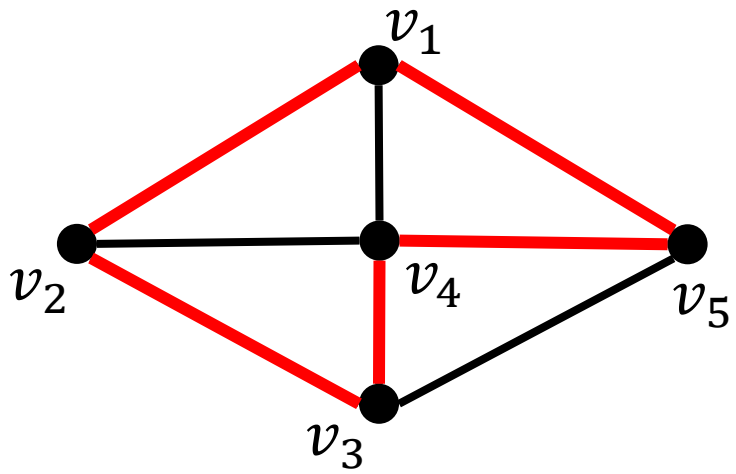


K_5

ハミルトン閉路

定義（ハミルトン閉路，ハミルトン道）
すべての頂点を含む閉路を**ハミルトン閉路**という.

例：次のグラフを考える。



$v_1 \to v_5 \to v_4 \to v_3 \to v_2 \to v_1$
はハミルトン閉路である。

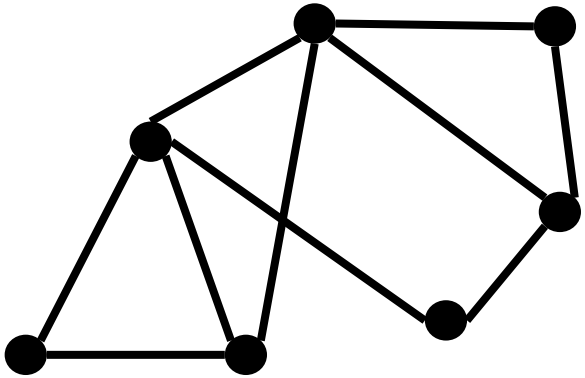
命題
ハミルトン閉路を持つグラフはどの1頂点を取り除いても連結である.

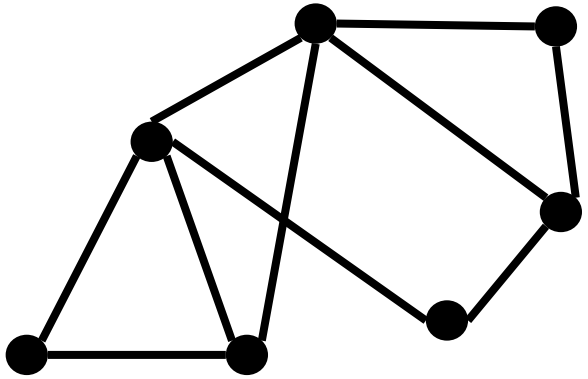
2-連結という

木

定義（木）

- 閉路を持たないグラフを**森**といい，連結な森を**木**という．
- グラフGのすべての頂点を含む木をGの**全域木**という．

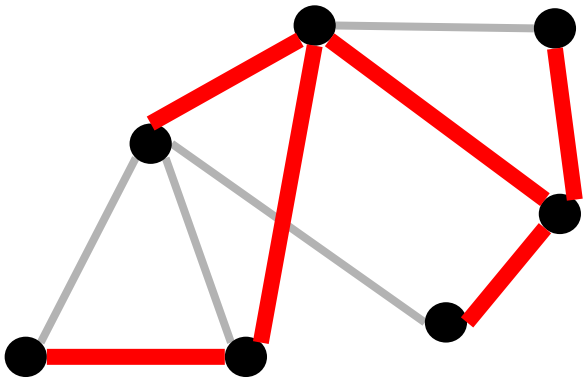


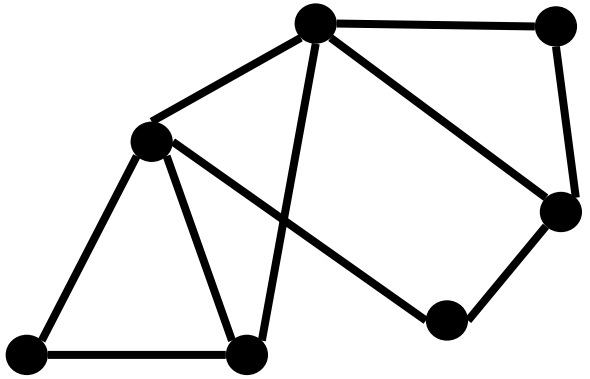


木

定義（木）

- 閉路を持たないグラフを森といい，連結な森を木という．
- グラフGのすべての頂点を含む木をGの全域木という．



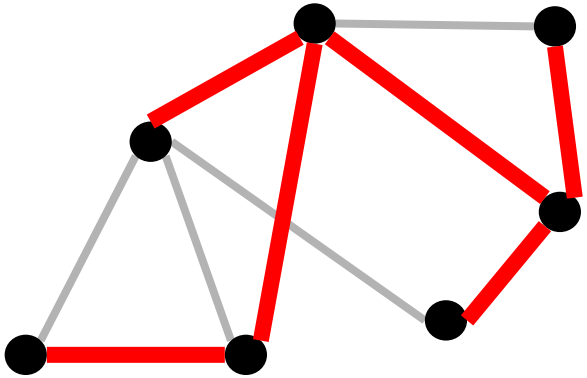


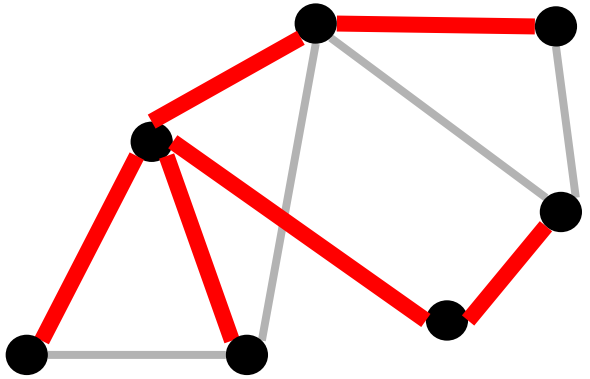
木

1つのグラフが複数の全域木を持つことがある

定義（木）

- 閉路を持たないグラフを**森**といい，連結な森を**木**という．
- グラフGのすべての頂点を含む木をGの**全域木**という．





命題 頂点数が n の木の辺の本数は $n-1$ である．

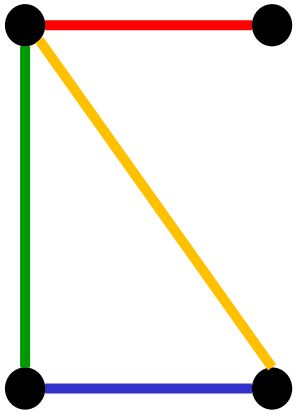
命題 Gをグラフとする．このとき，次が成り立つ．

Gが連結 $\Leftrightarrow$ Gが全域木をもつ

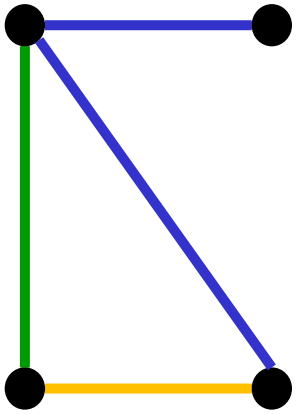
辺着色グラフ

定義

- **辺着色グラフ**とは各辺に1色ずつ色が割り当てられたグラフ. 厳密には，頂点集合 V ，辺集合 E，写像 $c : E \to \mathbb{N}$の組 (V, E, c).
- 辺着色グラフが**虹色**であるとは，すべての辺の色が異なる色で塗られていること.



虹色

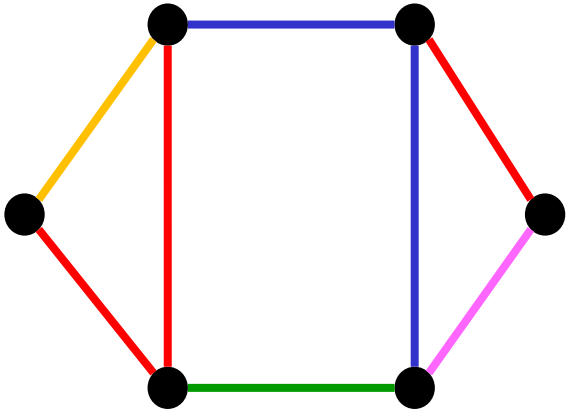


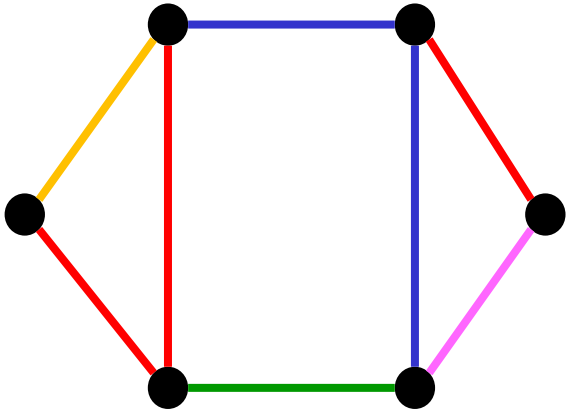
虹色でない

辺着色グラフの虹色全域木

定義

辺着色グラフGの**虹色全域木**とは，Gのすべての頂点を含む虹色な木.

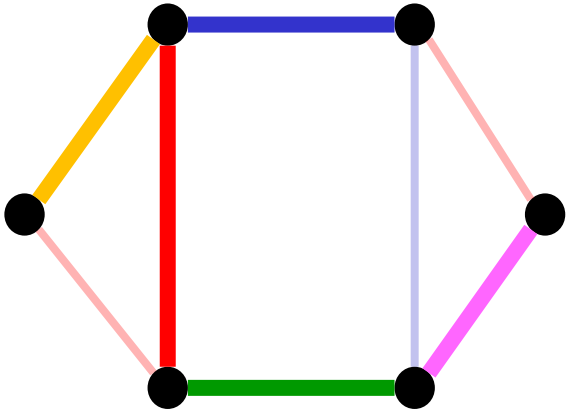


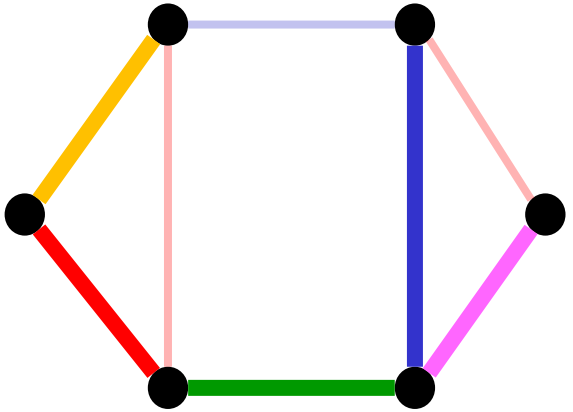


辺着色グラフの虹色全域木

定義

辺着色グラフGの**虹色全域木**とは，Gのすべての頂点を含む虹色な木.





問題　どんな辺着色グラフが虹色全域木を持っている？

辺着色グラフの虹色全域木

問題 どんな辺着色グラフが虹色全域木を持っている？

命題 頂点数が n の木の辺の本数は $n-1$ である.

命題 Gをグラフとする. このとき, 次が成り立つ.

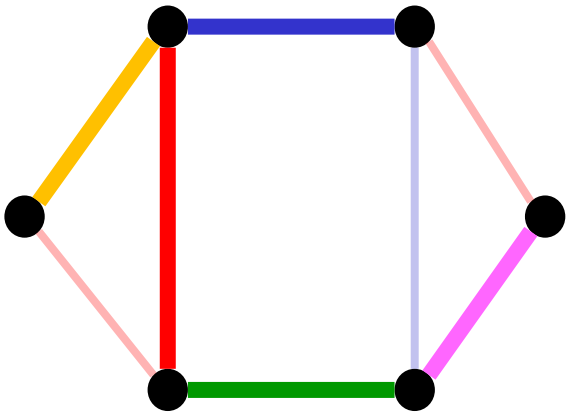
Gが連結 $\Leftrightarrow$ Gが全域木をもつ

以下の条件が頂点数 n の辺着色グラフが虹色全域木を含む必要条件になる.

① $n-1$ 色以上含んでいる

② 任意の2頂点間に虹色な経路が存在する.

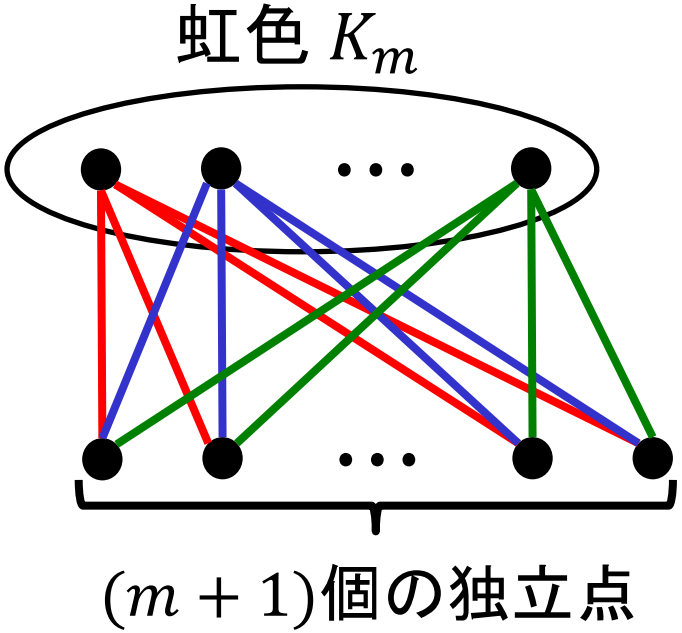
この2条件では十分条件にならない.



辺着色グラフの虹色全域木

以下のことが必要条件になる.
① $n-1$ 色以上含んでいる
② 任意の2頂点間に虹色な経路が存在する.

この2条件では十分条件にならない.



虹色 K_mと孤立点を結ぶ辺の色は
虹色 K_mに含まれていないとする.

このグラフは条件①②を満たしている.

虹色 K_mと孤立点を結ぶ m 色の辺を除去すると, $m+2$ 個の成分に分かれる.

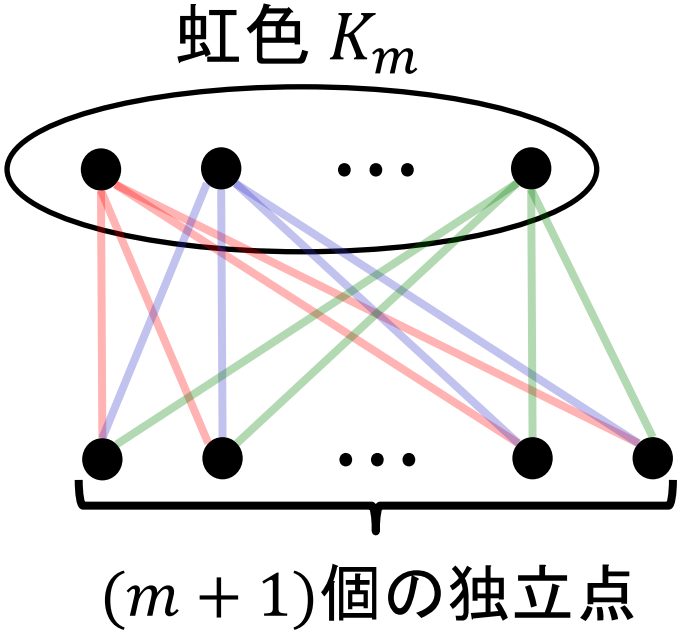
辺着色グラフの虹色全域木

以下のことが必要条件になる.

① $n-1$ 色以上含んでいる

② 任意の2頂点間に虹色な経路が存在する.

この2条件では十分条件にならない.



虹色 K_mと孤立点を結ぶ辺の色は
虹色 K_mに含まれていないとする.

このグラフは条件①②を満たしている.

虹色 K_mと孤立点を結ぶ m 色の辺を除去すると, $m+2$ 個の成分に分かれる.

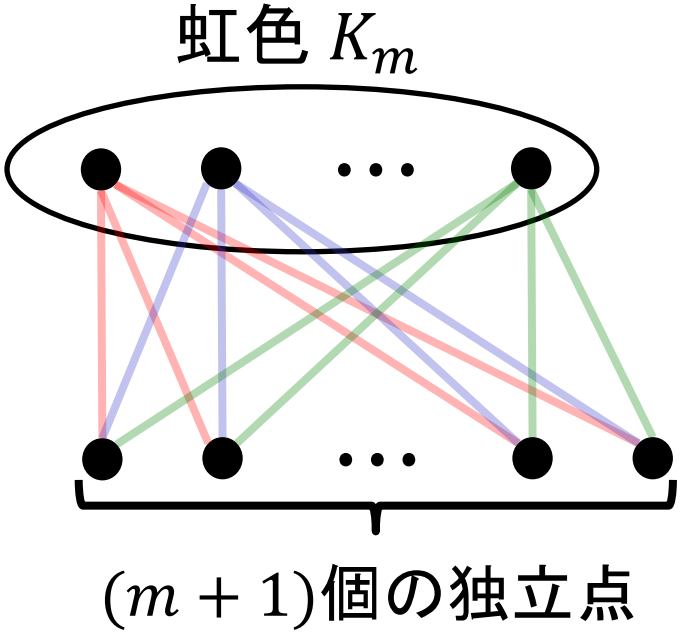
このグラフは虹色全域木を持たない.

命題 頂点数が n の木の辺の本数は $n-1$ である.

辺着色グラフの虹色全域木

以下のことが必要条件になる.
① $n-1$ 色以上含んでいる
② 任意の2頂点間に虹色な経路が存在する.

この2条件では十分条件にならない.



虹色 K_mと孤立点を結ぶ辺の色は
虹色 K_mに含まれていないとする.

このグラフは条件①②を満たしている.

虹色 K_mと孤立点を結ぶ $\boldsymbol{m}$ 色の辺を除去すると, $\boldsymbol{m+2}$ 個の成分に分かれる.

このグラフは虹色全域木を持たない.

命題 頂点数が n の木の辺の本数は $n-1$ である.

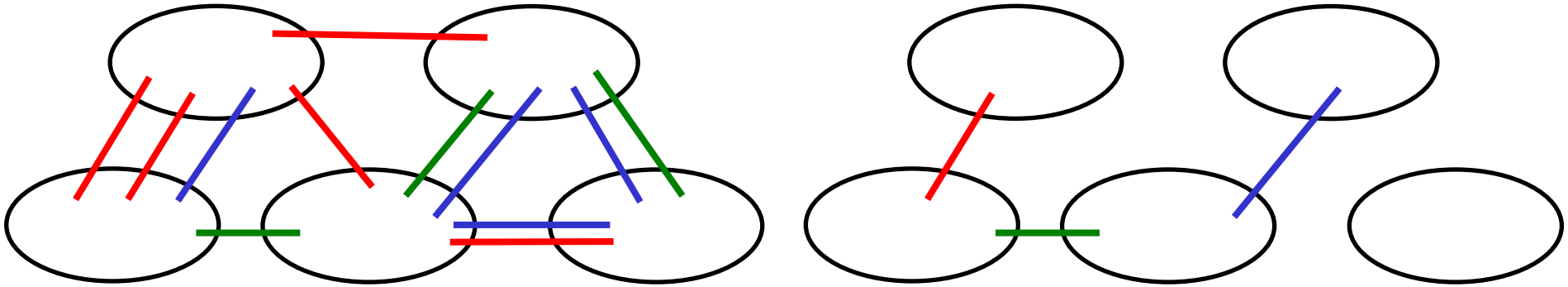
辺着色グラフの虹色全域木

定理（Akbari and Alipour 2006, Suzuki 2006）

辺着色グラフが虹色全域木を持つための必要十分条件は，任意の m 色に対して，その m 色の辺を取り除いた時の成分数が $m+1$ 以下である．

必要性：m 色の辺を取り除いて，$m+2$ 個以上の成分に分かれる辺着色グラフは以下の命題より虹色全域木を持たない．

命題 頂点数が n の木の辺の本数は $n-1$ である．



Suzuki：グラフ理論的な証明

AkbariとAlipour：マトロイドによる証明（後述）

マトロイドと虹色全域木

閉路マトロイド

定義

E：空でない有限集合，$\mathcal{I} \subseteq 2^E$：有限集合族
次の3条件を満たすとき，$(E, \mathcal{I})$ を**マトロイド**という．

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. $I \in \mathcal{I}$ かつ $J \subseteq I$ ならば $J \in \mathcal{I}$
3. $I, J \in \mathcal{I}$ で $|I| > |J|$ ならば，ある元 $e \in I - J$ で $J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となるものが存在する．

$\mathcal{I}$ を**独立集合族**といい，$\mathcal{I}$ に含まれる極大な元を**基**という．

定義

グラフGにおいて，その辺集合をE，森を誘導する辺集合の集合を $\mathcal{I}$ とすると，$(E, \mathcal{I})$ はマトロイドになる．このマトロイドは**閉路マトロイド**という．

閉路マトロイド

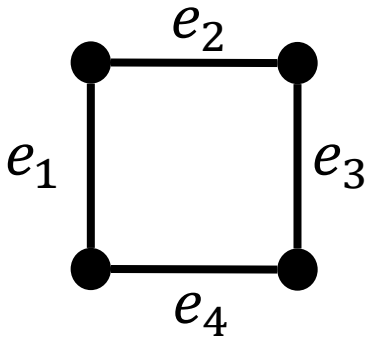
定義

E：空でない有限集合，$\mathcal{I} \subseteq 2^E$：有限集合族
次の3条件を満たすとき，$(E, \mathcal{I})$ を**マトロイド**という．

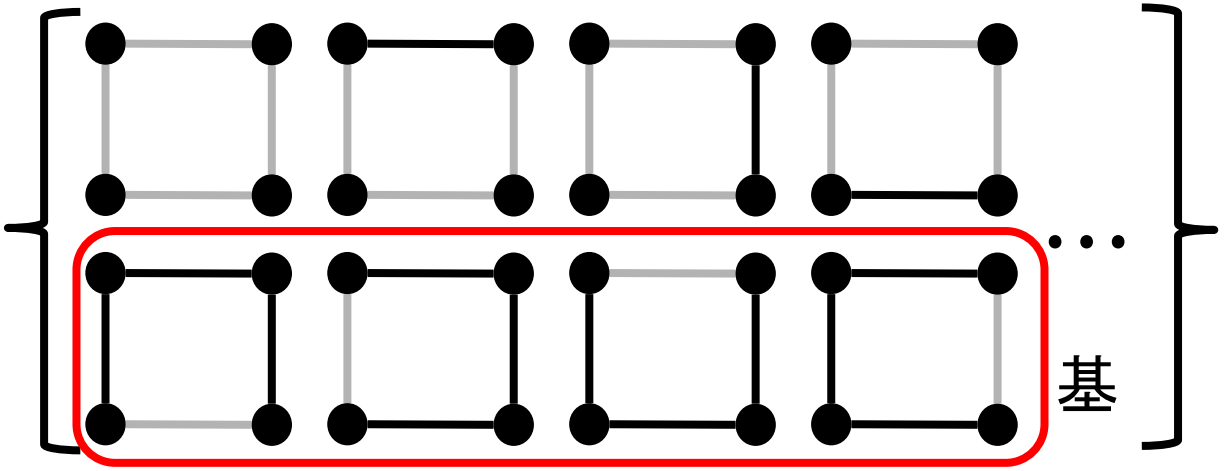
1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. $I \in \mathcal{I}$ かつ $J \subseteq I$ ならば $J \in \mathcal{I}$
3. $I, J \in \mathcal{I}$ で $|I| > |J|$ ならば，ある元 $e \in I - J$ で $J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となるものが存在する．

$\mathcal{I}$ を**独立集合族**といい，$\mathcal{I}$ に含まれる極大な元を**基**という．

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$



$\mathcal{I} =$



分割マトロイド

定義

E：空でない有限集合，$\mathcal{I} \subseteq 2^E$：有限集合族
次の3条件を満たすとき，$(E, \mathcal{I})$ を**マトロイド**という．

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. $I \in \mathcal{I}$ かつ $J \subseteq I$ ならば $J \in \mathcal{I}$
3. $I, J \in \mathcal{I}$ で $|I| > |J|$ ならば，ある元 $e \in I - J$ で $J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となるものが存在する．

$\mathcal{I}$ を**独立集合族**といい，$\mathcal{I}$ に含まれる極大な元を**基**という．

定義

E：空でない有限集合，$\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$：$E$ の分割
$r_1, r_2, \ldots, r_m$：非負の整数
$\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を次のように定義すると，$(E, \mathcal{I})$ はマトロイドになり，これを**分割マトロイド**という．
$\mathcal{I} = \{X \subseteq E$：任意の $i \in \{1,2, \ldots, m\}$ に対して，$|X \cap E_i| \leq r_i\}$

分割マトロイド

定義

E：空でない有限集合，$\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$：$E$ の分割
$r_1, r_2, \ldots, r_m$：非負の整数
$\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を次のように定義すると，$(E, \mathcal{I})$ はマトロイドになり，これを**分割マトロイド**という．
$\mathcal{I} = \{X \subseteq E$：任意の $i \in \{1,2, \ldots, m\}$ に対して，$|X \cap E_i| \leq r_i\}$

$E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $E_1 = \{1,3\}, E_2 = \{2\}, E_3 = \{4,5\}, E_4 = \{6\}$

$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ とすると，

$$\mathcal{I} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{3,2\}, \ldots, \{1,2,4,6\}, \{3,2,4,6\}, \{1,2,5,6\}, \{3,2,5,6\}\}$$ 基

マトロイドの階数関数

定義

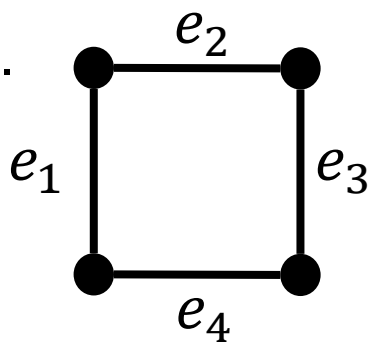
マトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ の**階数関数** $r: 2^E \to \mathbb{N}$ とは，次で定義されるものである．

　任意の $X \in 2^E$ に対して，$r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$．

$r(E)$ をそのマトロイドの**階数**という．

例：右のグラフに対する閉路マトロイドを考える．

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ とすると $r(E) = 3$．



マトロイドの階数関数

定義

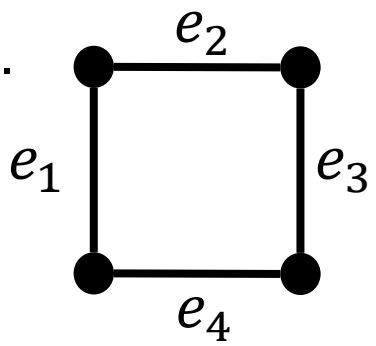
マトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ の**階数関数** $r: 2^E \to \mathbb{N}$ とは，次で定義されるものである．

任意の $X \in 2^E$ に対して，$r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$．

$r(E)$ をそのマトロイドの**階数**という．

例：右のグラフに対する閉路マトロイドを考える．

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ とすると $r(E) = 3$．



頂点数が n の連結グラフ $G = (V, E)$ における閉路マトロイドの基が誘導するグラフは全域木になるため，$r(E) = n - 1$ である．

頂点数が n で成分数が c のグラフ $G = (V, E)$ の閉路マトロイドにおいては，$r(E) = n - c$ である．

マトロイドの階数関数

定義

マトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ の**階数関数** $r: 2^E \to \mathbb{N}$ とは，次で定義されるものである．

　任意の $X \in 2^E$ に対して，$r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$．

$r(E)$ をそのマトロイドの**階数**という．

例：$E = \{1,2,3,4,5,6\}$，$E_1 = \{1,3\}, E_2 = \{2\}, E_3 = \{4,5\}, E_4 = \{6\}$，$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ の分割マトロイドを考える．

このとき，$r(E) = 4$（分割の個数）となる．

$r(E - \{1,2\}) = 3$ となる．

マトロイド交叉

定義

E：空でない有限集合，$M_1 = (E, \mathcal{I}_1), M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$：マトロイド

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**交わり**とは，

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X : X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}.$$

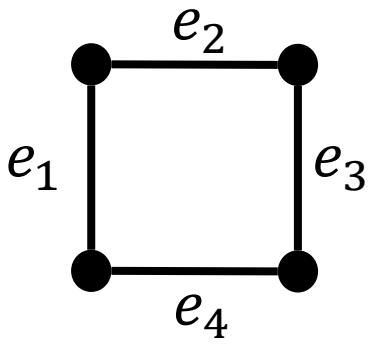
例：M_1を右のグラフの閉路マトロイドとする．

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$とする．

M_2 を $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，

$E_1 = \{e_2\}, E_2 = \{e_1, e_3\}, E_3 = \{e_4\}$，

$r_1 = r_2 = r_3 = 1$ の分割マトロイドとする．



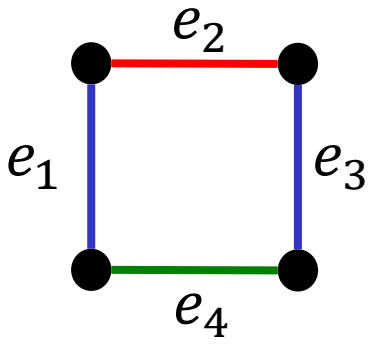
マトロイド交叉

定義

E：空でない有限集合，$M_1 = (E, \mathcal{I}_1), M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$：マトロイド
$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**交わり**とは，

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X : X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}.$$

例：M_1を右のグラフの閉路マトロイドとする．
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$とする．



M_2 を $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，
$E_1 = \{e_2\}, E_2 = \{e_1, e_3\}, E_3 = \{e_4\}$，
$r_1 = r_2 = r_3 = 1$ の分割マトロイドとする．

M_1 と M_2 の独立集合族の交わりは，虹色森の集合になる．

この例だと大きさ $3 (=$ 頂点数 $- 1)$ の交わりがあるので，虹色全域木があることがわかる．

マトロイド交叉定理

マトロイド交叉定理

E：空でない有限集合，$M_1 = (E, \mathcal{I}_1), M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$：マトロイド

r_1, r_2：M_1, M_2の階数関数

$$\max\{|X| : X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) : S \subseteq E\}$$

定理（Akbari and Alipour 2006, Suzuki 2006）

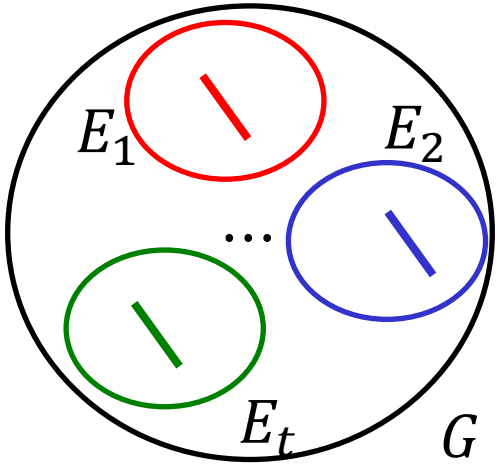
辺着色グラフが虹色全域木を持つための必要十分条件は，任意の m 色に対して，その m 色の辺を取り除いた時の成分数が $m + 1$ 以下である．

マトロイド交叉定理を用いた十分条件の証明：

G：赤文字の仮定を満たす辺着色グラフ

G の辺集合を E とし，各色で E を分割する．

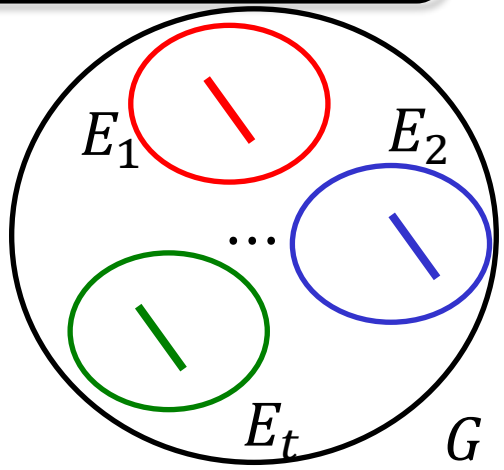
$k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 1$ として，色で分割した分割マトロイド M_1 とG の閉路マトロイド M_2 との交叉を考える．



マトロイド交叉定理

定理（Akbari and Alipour 2006, Suzuki 2006）

辺着色グラフが虹色全域木を持つための必要十分条件は，任意の m 色に対して，その m 色の辺を取り除いた時の成分数が $m+1$ 以下である．



マトロイド交叉定理を用いた十分条件の証明：

G：赤文字の仮定を満たす辺着色グラフ

G の辺集合を E とし，各色で E を分割する．

$k_1 = k_2 = \cdots = k_t = 1$ として，色で分割した分割マトロイド M_1 と G の閉路マトロイド M_2 との交叉を考える．

$S \subseteq E$ とし，$c(S)$ で S に含まれる色数とする．

赤文字の条件より，$G - S$ の成分数は $c(S)+1$ 以下である．

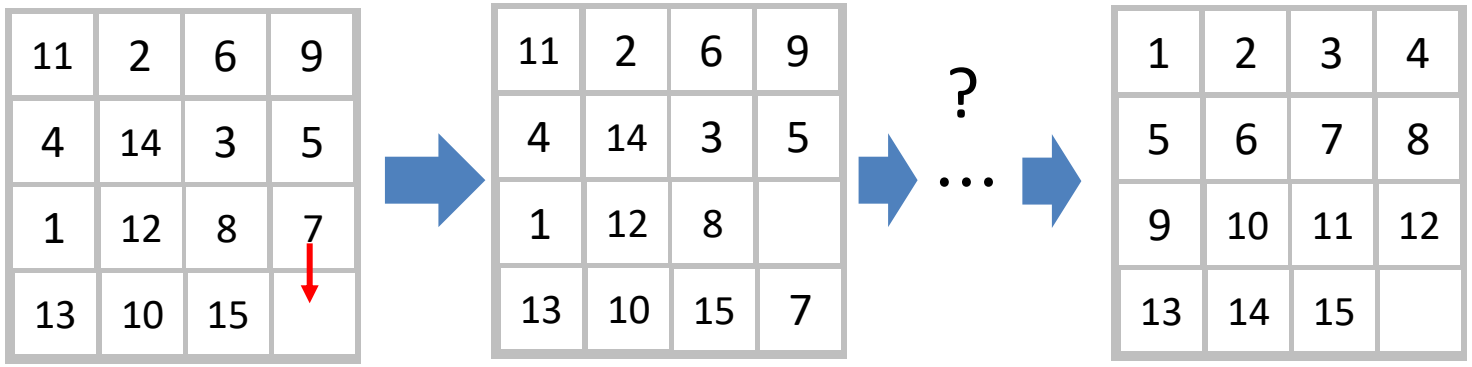
よって，$r_1(S) + r_2(E-S) \geq c(S) + n - (c(S)+1) = n-1$ が任意の $S \subseteq E$ に対して成り立つ．

組合せ遷移と虹色全域木

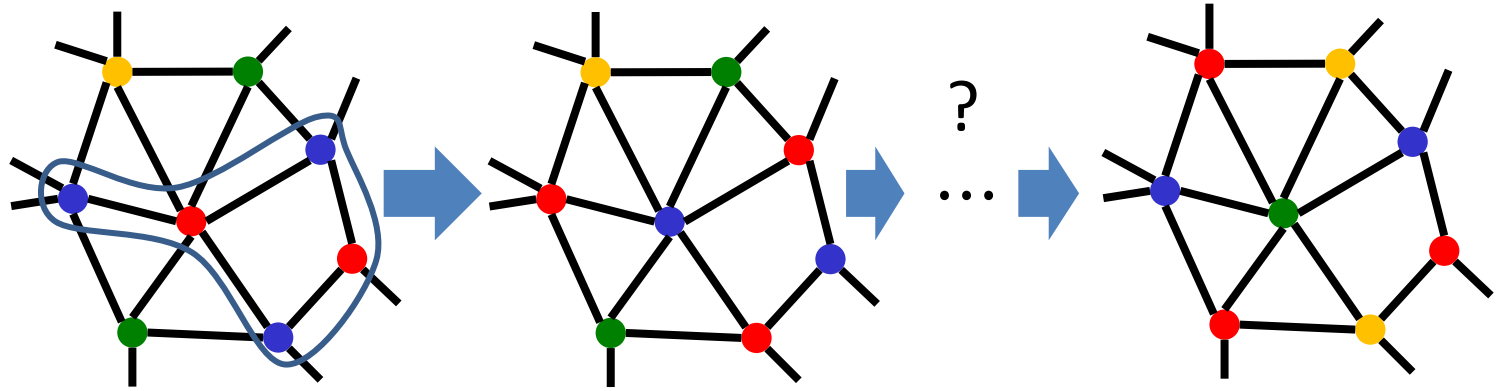
組合せ遷移

組合せ遷移とは，『状態空間上での遷り変り』を数理モデル化・解析する新しいアルゴリズム理論である．

15-パズル



頂点彩色とケンペ変換



到達可能性問題：2つの入力が与えられた際に，一方からもう一方に遷移させられるかを考える問題（可逆でないものもまれにある）．

マトロイドの基の遷移

定義

E：空でない有限集合，$\mathcal{I} \subseteq 2^E$：有限集合族
次の3条件を満たすとき，$(E, \mathcal{I})$ を**マトロイド**という．

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. $I \in \mathcal{I}$ かつ $J \subseteq I$ ならば $J \in \mathcal{I}$
3. $I, J \in \mathcal{I}$ で $|I| > |J|$ ならば，ある元 $e \in I - J$ で $J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となるものが存在する．

$\mathcal{I}$ を**独立集合族**といい，$\mathcal{I}$ に含まれる極大な元を**基**という．

定義（マトロイドの基の遷移）

B, B'：マトロイド$M = (E, \mathcal{I})$の基
B と B' が**到達可能**であるとは，Mの基の列
$(B = B_0, B_1, \ldots, B_k = B')$で，任意の$0 \leq i \leq k-1$に対して，
$|B_{i+1} - B_i| = |B_i - B_{i+1}| = 1$ が成り立つものが存在する．

E の要素を一つ除いて，一つ加える操作

マトロイドの基の遷移

定義

E：空でない有限集合，$\mathcal{I} \subseteq 2^E$：有限集合族

次の3条件を満たすとき，$(E, \mathcal{I})$ を**マトロイド**という．

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. $I \in \mathcal{I}$ かつ $J \subseteq I$ ならば $J \in \mathcal{I}$
3. $I, J \in \mathcal{I}$ で $|I| > |J|$ ならば，ある元 $e \in I - J$ で $J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となるものが存在する．

$\mathcal{I}$ を**独立集合族**といい，$\mathcal{I}$ に含まれる極大な元を**基**という．

定理（マトロイドの基の遷移）

M をマトロイドとする．M の任意の2つの基は到達可能である．

証明の概要：B と B' をマトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ の基とする（$B \neq B'$）．

$|B| = |B'|$ より $e \in B - B'$ が存在する．$I := B - \{e\} \in \mathcal{I}$ とする．

$|I| < |B'|$ と定義の3より，$e' \in B' - I$ で $I \cup \{e'\}$ が基となるものが存在する．これを繰り返す．（終）

マトロイド交叉の遷移

定義

E：空でない有限集合，$\mathcal{I} \subseteq 2^E$：有限集合族
次の3条件を満たすとき，$(E, \mathcal{I})$ を**マトロイド**という．

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$
2. $I \in \mathcal{I}$ かつ $J \subseteq I$ ならば $J \in \mathcal{I}$
3. $I, J \in \mathcal{I}$ で $|I| > |J|$ ならば，ある元 $e \in I - J$ で $J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となるものが存在する．

$\mathcal{I}$ を**独立集合族**といい，$\mathcal{I}$ に含まれる極大な元を**基**という．

定義（マトロイド交叉の遷移）

I, I'：マトロイドM_1, M_2 の共通の最大独立集合
I と I' が**到達可能**であるとは，M_1, M_2の最大の共通独立集合 $(I = I_0, I_1, \ldots, I_k = I')$で，任意の$0 \leq i \leq k-1$に対して，$|I_{i+1} - I_i| = |I_i - I_{i+1}| = 1$ が成り立つものが存在する．

到達可能でないものが存在する（後述）．

マトロイド交叉の遷移

定義（マトロイド交叉の遷移）

I, I' : マトロイドM_1, M_2 の共通の最大独立集合
I と I' が**到達可能**であるとは，M_1, M_2の共通の最大独立集合
$(I = I_0, I_1, \ldots, I_k = I')$で，任意の$0 \leq i \leq k-1$に対して，
$|I_{i+1} - I_i| = |I_i - I_{i+1}| = 1$ が成り立つものが存在する.

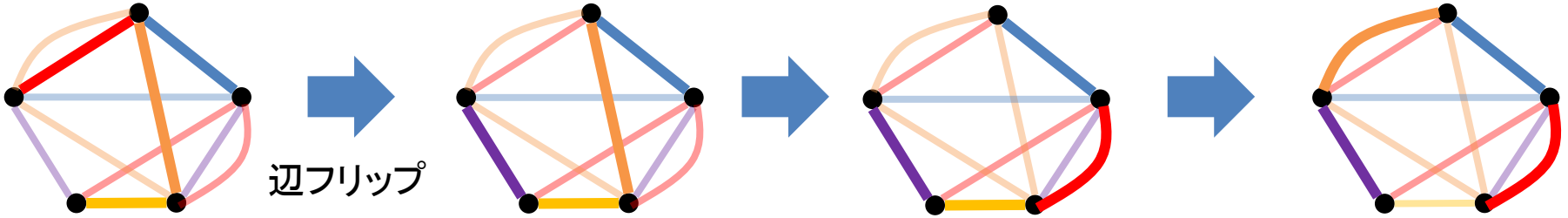
未解決問題（マトロイド交叉の遷移問題）

以下の決定問題に対する多項式時間アルゴリズムは存在するか.
入力：マトロイドM_1, M_2の2つの最大の共通独立集合I, I'
問題：I と I'は到達可能であるか.

I と I'が到達可能であるための必要十分条件は？

虹色全域木の遷移問題

マトロイド交叉遷移の特別な場合として次の問題を考える.



定義（虹色全域木の遷移）

T, T' : 辺着色多重グラフGの虹色全域木

TとT'が**到達可能**であるとは，Gの虹色全域木の列$(T = T_0, T_1, \ldots, T_k = T')$で，任意の$0 \leq i \leq k-1$に対して，$T_{i+1}$ が T_i から辺フリップで得られるものが存在することである.

未解決問題（虹色全域木の遷移問題）

必ずYesになるGの条件は？
その**解空間グラフ**の構造は？

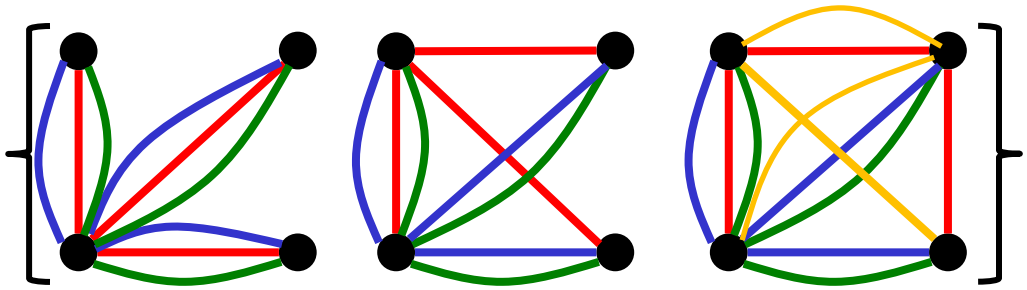
以下の決定問題に対する多項式時間アルゴリズムは存在するか.

入力：辺着色多重グラフG，Gの2つの虹色全域木T, T'

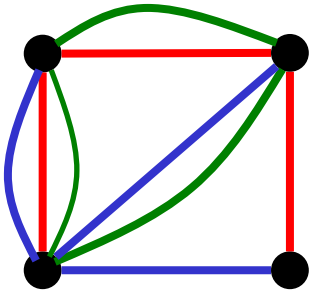
問題：T とT'は到達可能であるか.

特別な辺着色グラフ

$\mathcal{H}_n$:各色で誘導されるグラフが連結な n 頂点の辺着色多重グラフ全体の集合

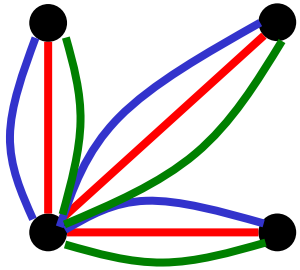


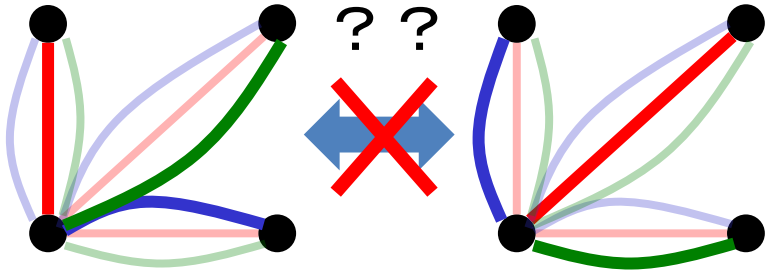
$\subseteq \mathcal{H}_4$



$\notin \mathcal{H}_4$

任意の $G \in \mathcal{H}_n$ に含まれる虹色全域木同士は必ず到達可能？　No!!

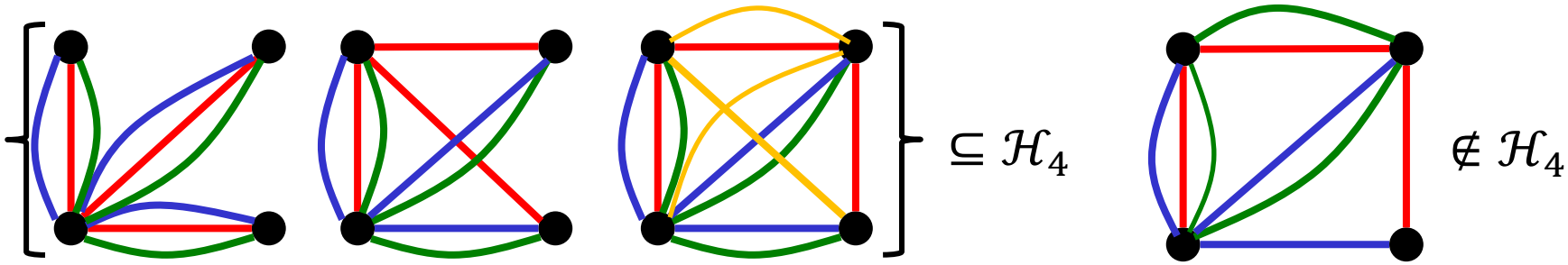




色数が少ない気がする、、

特別な辺着色グラフ

$\mathcal{H}_n$:各色で誘導されるグラフが連結な n 頂点の辺着色多重グラフ全体の集合



定理1

$G \in \mathcal{H}_n$とする．Gがn色以上含んでいれば，任意の虹色全域木は到達可能であり，その遷移列の長さは高々 $\frac{3}{2}(n-1)$ である．

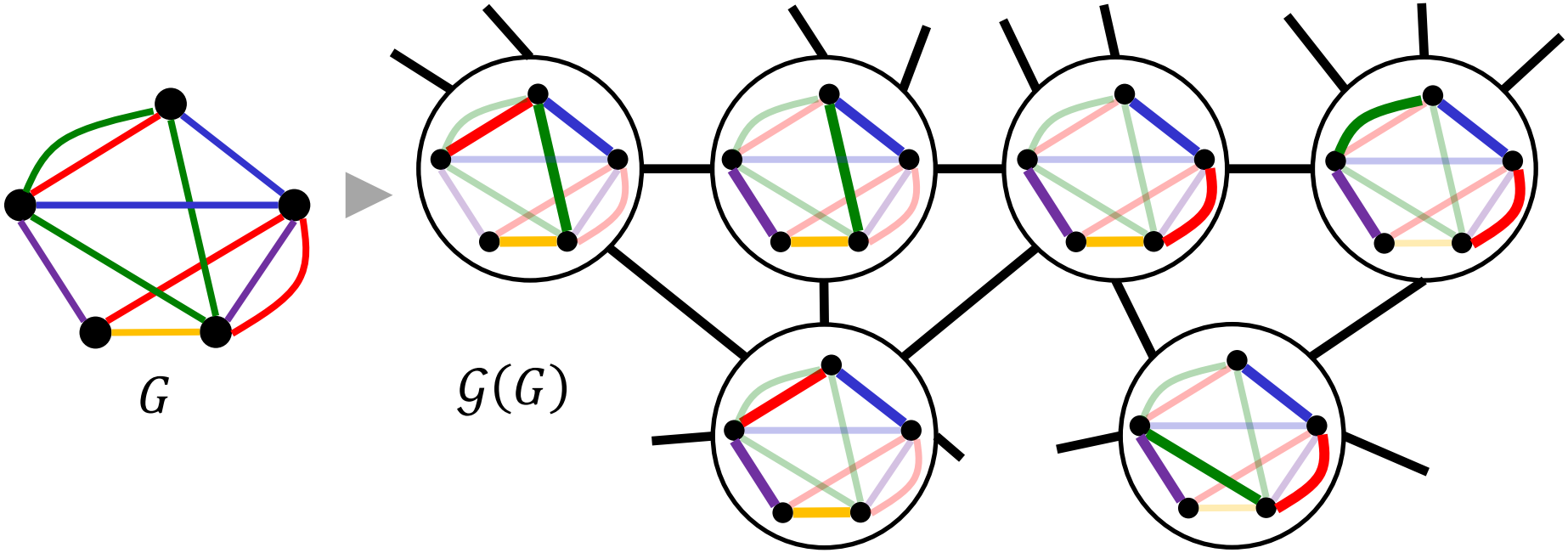
この値は最良，すなわち，
n色以上含んでいる$G \in \mathcal{H}_n$で，ある虹色全域木間の遷移長が$\frac{3}{2}(n-1)$のものが存在する（板書参照）

解空間グラフ

定義（解空間グラフ）

辺着色多重グラフ G に対し，次のように構成されるグラフ $\mathcal{G}(G)$ を（Gの虹色全域木で誘導される）**解空間**グラフという.

- $V(\mathcal{G}(G)) = \{T : T$は$G$の虹色全域木$\}$
- 2つの G の虹色全域木 T, T' が $\mathcal{G}(G)$ で隣接している⇔ T と T' が一回の辺フリップで移りあう.



解空間グラフ

定義（解空間グラフ）

辺着色多重グラフ G に対し，次のように構成されるグラフ $\mathcal{G}(G)$ を（Gの虹色全域木で誘導される）**解空間**グラフという．

- $V(\mathcal{G}(G)) = \{T : T$は$G$の虹色全域木$\}$
- 2つの G の虹色全域木 T, T' が $\mathcal{G}(G)$ で隣接している⇔ T と T' が一回の辺フリップで移りあう．

定理1（言い換え）

$G \in \mathcal{H}_n$とする．Gが n 色以上含んでいれば，$\mathcal{G}(G)$の直径は $\frac{3}{2}(n-1)$以下である．

解空間グラフ

定義（解空間グラフ）

辺着色多重グラフ G に対し，次のように構成されるグラフ $\mathcal{G}(G)$ を（Gの虹色全域木で誘導される）**解空間**グラフという．

- $V(\mathcal{G}(G)) = \{T : T$は$G$の虹色全域木$\}$
- 2つの G の虹色全域木 T, T' が $\mathcal{G}(G)$ で隣接している⇔ T と T' が一回の辺フリップで移りあう．

定義（解空間グラフ）

マトロイド$M = (E, \mathcal{I})$に対し，次のように構成されるグラフ $\mathcal{G}(M)$ を（Mの基で誘導される）**解空間**グラフという．

- $V(M) = \{B : B$ は M の基$\}$
- 2つの M の基 B, B' が $\mathcal{G}(M)$ で隣接している ⇔ $|B - B'| = |B' - B| = 1$

定理（マトロイドの基の解空間グラフ）

M をマトロイドとする．$\mathcal{G}(M)$ はハミルトン閉路を持つ．

$\mathcal{G}(G)$ はハミルトン閉路を持つのだろうか？

解空間グラフの性質

問題
n色以上含んでいる $G \in \mathcal{H}_n$ の解空間グラフ $\mathcal{G}(G)$ はハミルトン閉路を持つか？

ハミルトン閉路を持つための必要条件を満たしているだろうか？

定理2
n色以上含んでいる $G \in \mathcal{H}_n$ の解空間グラフ $\mathcal{G}(G)$ は2-連結である.

問題
n色以上含んでいる $G \in \mathcal{H}_n$ の解空間グラフ $\mathcal{G}(G)$ は1-タフか？

RotaのBasis予想

RotaのBasis予想

Basis予想（Rota 1989）

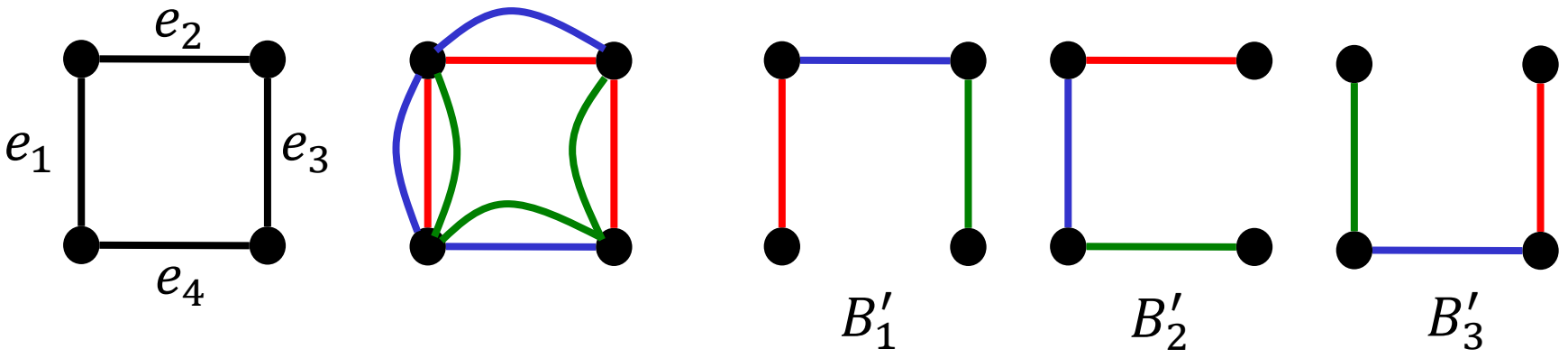
$B_1, B_2, \ldots, B_n$ を階数 n のマトロイドの n 個の基とする．このとき，
$B_1, B_2, \ldots, B_n$ の多重和集合は n 個の基 $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ で
$|B_i \cap B_j'| = 1$ がすべての $1 \leq i, j \leq n$ で成り立つように分割できる．

例：下のグラフに対する閉路マトロイドを考える．

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ とすると $r(E) = 3$．

$B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$，$B_2 = \{e_1, e_2, e_4\}$，$B_3 = \{e_1, e_3, e_4\}$ とする．

$B_1' = \{e_1, e_2, e_3\}$，$B_2' = \{e_2, e_1, e_4\}$，$B_3' = \{e_3, e_4, e_1\}$ は所望の分割．



RotaのBasis予想

Basis予想（Rota 1989）

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ を階数 n のマトロイドの n 個の基とする. このとき, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ の多重和集合は n 個の基 $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ で $\left|B_i \cap B_j'\right| = 1$ がすべての $1 \leq i, j \leq n$ で成り立つように分割できる.

定理（Bucić, Kwan, Pokrovskiy, and Sudakov 2020）

任意の $\epsilon > 0$ に対して, 十分大きな n であれば以下が成り立つ. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ を階数 n のマトロイドの n 個の基とする. このとき, $t \geq (1/2 - \epsilon)n$ 個の基 $B_1', B_2', \ldots, B_t'$ で $\left|B_i \cap B_j'\right| = 1$ がすべての $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq t$ で成り立つものが存在する.

Basis予想は漸近的に正しい.（Pokrovskiy arXiv）

グラフの問題へ

Basis予想（Rota 1989）

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ を階数 n のマトロイドの n 個の基とする．このとき，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ の多重和集合は n 個の基 $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ で $|B_i \cap B_j'| = 1$ がすべての $1 \leq i, j \leq n$ で成り立つように分割できる．

閉路マトロイドに限定した場合は次のように記述できる．

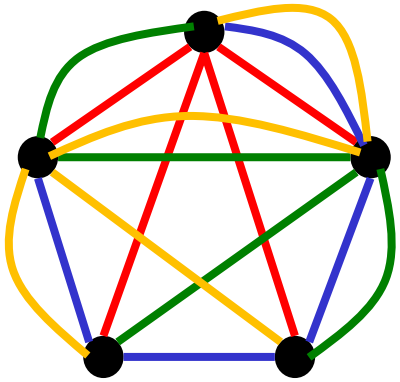
予想

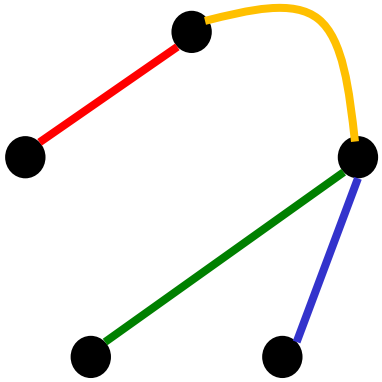
G を n 頂点からなり，$n-1$ 色で辺着色された連結多重グラフとする．このとき，各色で誘導されるグラフが全域木であれば，G は $n-1$ 個の辺素な虹色全域木をもつ．

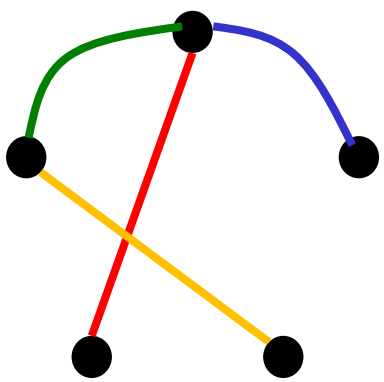
グラフの問題へ

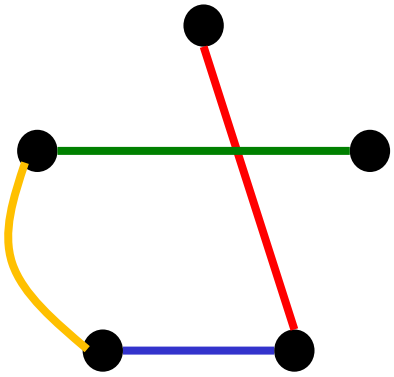
予想

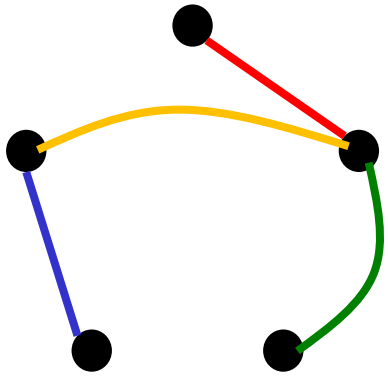
G を n 頂点からなり，$n-1$ 色で辺着色された連結多重グラフとする．このとき，各色で誘導されるグラフが全域木であれば，G は $n-1$ 個の辺素な虹色全域木をもつ．











グラフの問題へ

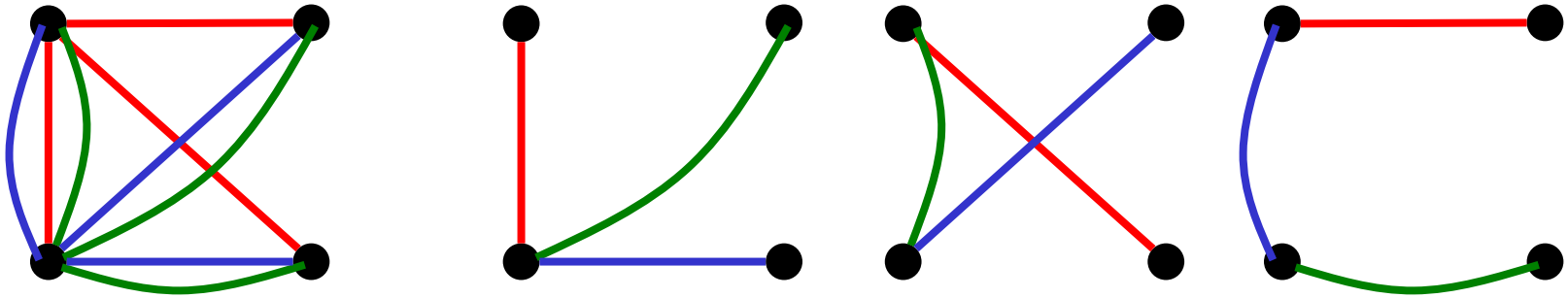
予想

G を n 頂点からなり，$n-1$ 色で辺着色された連結多重グラフとする．このとき，各色で誘導されるグラフが全域木であれば，G は $n-1$ 個の辺素な虹色全域木をもつ．

この予想を解く足掛かりとして次の定理を与えた．

定理（M and Yazawa 2022）

G を n 頂点からなり，$n-1$ 色で辺着色された連結多重グラフとする．このとき，各色で誘導されるグラフが全域スターであれば，G は $n-1$ 個の辺素な虹色全域木をもつ．



グラフの問題へ

定理（M and Yazawa 2022）

G を n 頂点からなり，$n-1$ 色で辺着色された連結多重グラフとする．このとき，各色で誘導されるグラフが全域スターであれば，G は $n-1$ 個の辺素な虹色全域木をもつ．

東京大学の林先生が，より短い証明で強い結果を得ている．

定理（Hayashi, private communication）

G を n 頂点からなり，$m(\geq n-1)$ 色で辺着色された連結多重グラフとする．このとき，各色で誘導されるグラフが全域スターであれば，G は m 個の辺素な虹色全域木をもつ．

全域スターという情報がマトロイドの言葉で記述できるかは不明

まとめ

$\mathcal{H}_n$:各色で誘導されるグラフが連結な n 頂点の辺着色多重グラフ全体の集合

定理1（M and Yamaguchi）

$G \in \mathcal{H}_n$とする．Gがn色以上含んでいれば，任意の虹色全域木は到達可能であり，その遷移列の長さは高々 $\frac{3}{2}(n-1)$ である．

定理2（M and Yamaguchi）

n色以上含んでいる $G \in \mathcal{H}_n$ の解空間グラフ $\mathcal{G}(G)$ は2-連結である．

RotaのBasis予想に対するアプローチ

定理3（M and Yazawa 2022）

G を n 頂点からなり，$n-1$ 色で辺着色された連結多重グラフとする．このとき，各色で誘導されるグラフが全域スターであれば，G は $n-1$ 個の辺素な虹色全域木をもつ．

未解決問題

未解決問題（マトロイド交叉の遷移問題）

以下の決定問題に対する多項式時間アルゴリズムは存在するか.
入力：マトロイドM_1, M_2の2つの最大の共通独立集合I, I'
問題：IとI'は到達可能であるか.

Basis予想（Rota 1989）

$B_1, B_2, \ldots, B_n$を階数nのマトロイドのn個の基とする. このとき,
$B_1, B_2, \ldots, B_n$の多重和集合はn個の基$B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$で
$\left|B_i \cap B'_j\right| = 1$がすべての$1 \leq i, j \leq n$で成り立つように分割できる.

グラフ的ではないマトロイドに限定した場合でもいろいろできそう（やられてそう）.

ご清聴ありがとうございました.