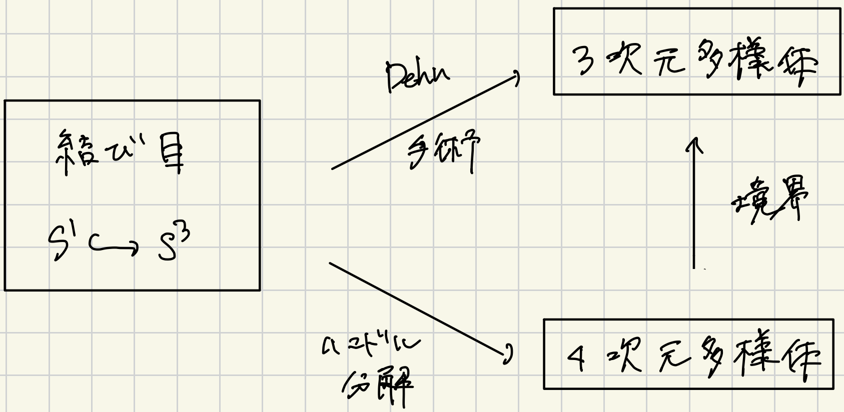
# 低次元トポロジー

- 結び目.
- 3次元多様体
- 4次元多様体

結び目で3次元多様体と4次元多様体を表せる



# 結び目と不変量

## 結び目

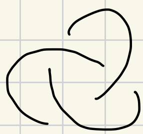
$$S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ or } S^3 : \text{emb} / \text{isotopy}.$$

isotopy $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ : family of diffeo

$$K_1 \cong K_2 \ , \ {}^{\exists}\varphi_t \ , \ \varphi_1(K_1) = K_2 .$$

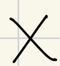
## 結び目の図式

結び目を $xy$ 平面に射影して上下の情報を加えたもの.



### Remark

射影の特異点は isotopy で

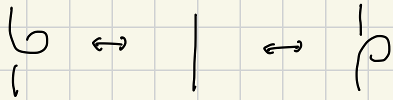


だけにすることができる。

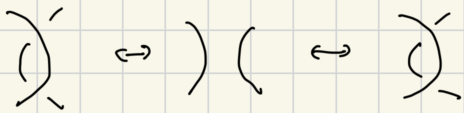
## Reidemeister move (移動)

結び目の図式に対して，以下の局所的な変形を導入する。

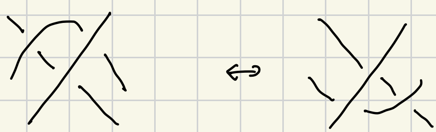
R1



R2



R3



Thm

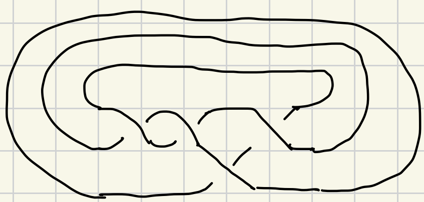
$\{$結び目の isotopy 類$\}$ $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\{$結び目図式$\}$ / Reidemeister move.

## 結び目とbraid

別の表現としてbraidのclosureがある.

$$B_n = \left\{ \sigma_n \in S_n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & |i-j|>1 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & |i-j|=1 \end{array} \right\}$$

### Braid closure



### Alexander

全ての結び目はbraid closureとして表せる.

### Markov

$$\left\{\text{braid closure}\right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ \beta_n \in B_n \text{ の conjugate.} \\ \cdot\ \beta_n \sigma_n^{\pm 1} \text{ を取る} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{\text{結び目の isotopy 類}\right\}$$

## 結び目の不変量

- 結び目に対して定義され, isotopy によって変わらない量.

- 結び目図式に対して定義される量で, Reidemeister move で変わらない量.

## 様々な不変量

$$\text{交点数} = \min_D \#\{D\text{の交差}\}$$

$$\text{トンネル数} = \min_D \#\{\text{unknotになるトンネル}\}$$

## 多項式不変量

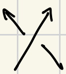
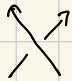
- Alexander 多項式.

- Jones 多項式

- HOMFLY 多項式

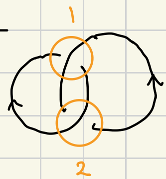
# Jones 多項式

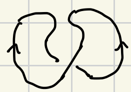
## 一番分かりやすい定義

$$t^{-1}\left\langle \right.$$  $$\left.\right\rangle - t\left\langle \right.$$  $$\left.\right\rangle = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\left\langle \right.$$  $$\left.\right\rangle$$

と $\langle \bigcirc \rangle = 1$.

e.g




$$t^{-1}\langle K \rangle - t\langle \bigcirc \sqcup \bigcirc \rangle = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\left\langle \right.$$  $$\left.\right\rangle$$

$$t^{-1}\langle K \rangle = t\langle \bigcirc \sqcup \bigcirc \rangle + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$$

$$\langle K \rangle = t(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) + t^2\langle \bigcirc \sqcup \bigcirc \rangle$$

$$= t(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) - t^2(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) = -t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{V_{K \sqcup O}(t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V_K(t)}$$

Jones 多項式は, Jones によって導入された.

・量子群の表現から Jones 多項式を導出することができる。

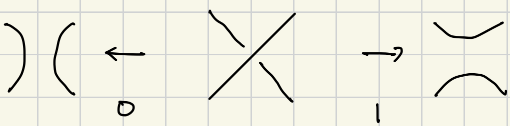
・量子群の表現論から

# Khovanov homology

$V = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{1, x\} \qquad \deg(1) = 1 \qquad \deg(x) = -1$

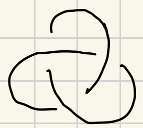
$$
\begin{aligned}
m : V \otimes V &\longrightarrow V \\
1 \otimes 1 &\longmapsto 1 \\
1 \otimes x &\longmapsto x \\
x \otimes 1 &\longmapsto x \\
x \otimes x &\longmapsto 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\Delta : V &\longrightarrow V \otimes V \\
1 &\longmapsto 1 \otimes x + x \otimes 1 \\
x &\longmapsto x \otimes x
\end{aligned}
$$

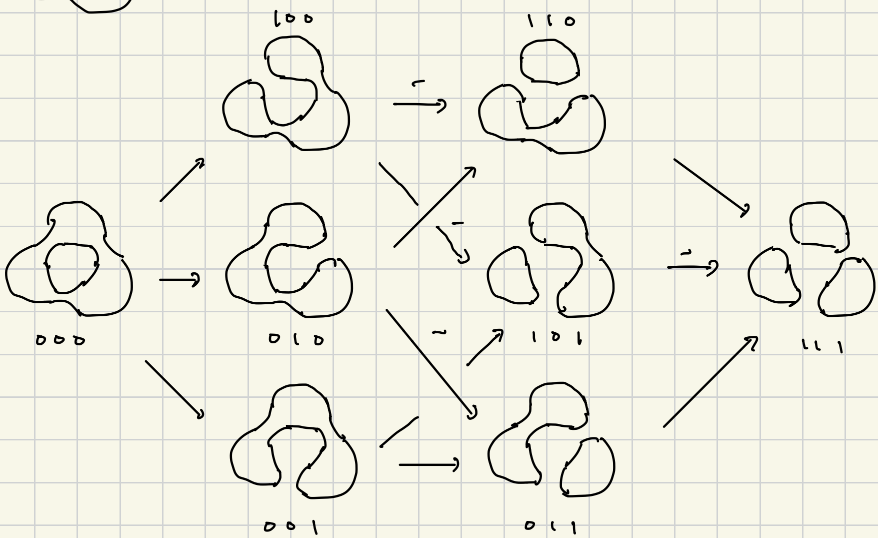
## smoothing



結び目図式に対して smoothing の仕方によって並べる。

e.g



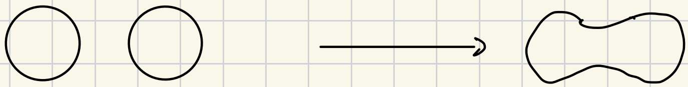



* 符号は変化する前に1の個数の偶奇.

各円周にVを乗せる

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r] \arrow[dr] & V \otimes V \arrow[dr] & \\
V \otimes V \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & V \arrow[ur] \arrow[dr] & V \otimes V \arrow[r] & V \otimes V \otimes V \\
 & V \arrow[ur] \arrow[r] & V \otimes V \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

以下の変形に m, Δ を割り当て, 符号をかける

m : 

Δ : 

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "-\Delta"] \arrow[dr, "-\Delta"'] & V \otimes V \arrow[dr, "\Delta"] & \\
V \otimes V \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "m"] & V \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "-\Delta"'] & V \otimes V \arrow[r, "-\Delta"] & V \otimes V \otimes V \\
 & V \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r, "\Delta"] & V \otimes V \arrow[ur, "\Delta"] &
\end{tikzcd}$$

○ 1-smoothing の数が同じ (今はたての ライン) ものは

直和して, チェイン群をつくる

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "-\Delta"] \arrow[ddr, "-\Delta"'] & V \otimes V \arrow[ddr, "\Delta"] & \\
 & \oplus & \oplus & \\
V \otimes V \arrow[uur, "m"] \arrow[r, "m"] \arrow[ddr, "m"] & V \arrow[uur, "\Delta"] \arrow[ddr, "-\Delta"'] & V \otimes V \arrow[r, "-\Delta"] & V \otimes V \otimes V \\
 & \oplus & \oplus & \\
 & V \arrow[uur, "\Delta"] \arrow[r, "\Delta"] & V \otimes V \arrow[uur, "\Delta"] &
\end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow C_0(K) \xrightarrow{d_0} C_1(K) \xrightarrow{d_1} C_2(K) \xrightarrow{d_2} C_3(K) \longrightarrow 0$$

<u>Rem</u> 微分も直和

## Thm Khovanov

- $(C_i, d_i)$ は chain cpx
- $(C_i, d_i)$ の ホモロジー群 は 結び目の不変量.

## 参考文献

結び目の不変量, 大槻知忠, 共立出版.

# Braid variety & Khovanov homology

$$B_i(z) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 1 & z & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \phantom{1} & \phantom{\ddots} & i & i+1 & \phantom{\ddots} & \phantom{1} \end{array} & \end{array}$$

$\beta = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_r}$ に対して,

$$B_\beta(z_1, \dots, z_r) = B_{i_1}(z_1) \cdots B_{i_r}(z_r)$$

$$X(\beta) = \{ (z_1, \dots, z_r) \mid B_\beta(z_1, \dots, z_r) : \text{upper triangular} \}$$

e.g.

$X(\sigma^3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ z_1 & 1 + z_1 z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_2 & 1 + z_2 z_3 \\ 1 + z_1 z_2 & z_1 + z_3 + z_1 z_2 z_3 \end{pmatrix}$$

$$X(\sigma^3) = \{ (z_1, z_2, z_3) \mid 1 + z_1 z_2 = 0 \}$$

## Soergel bimodule

$$B_i := \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n']}{\left( \begin{array}{l} x_i + x_{i+1} = x_i' + x_{i+1}', \quad x_i x_{i+1} = x_i' x_{i+1}' \\ x_j = x_j' \quad j \neq i, i+1 \end{array} \right)} \nearrow R$$

## Rouquier cpx

$\sigma_i^{\pm 1}$ : braid 群の generator

$$T_i : 0 \longrightarrow B_i \longrightarrow R(1) \longrightarrow 0$$
$$1 \otimes 1 \longmapsto 1$$

$$T_i^{-1} : 0 \longrightarrow R(-1) \longrightarrow B_i \longrightarrow 0$$
$$1 \longmapsto (x_i - x_{i+1}) \otimes 1 + 1 \otimes (x_i - x_{i+1})$$

$\beta$ に対してその tensor product.

## Hochschild homology

加群 $A$ に対して,

$$HH_n(A) = \mathrm{Tor}_n(A, A)$$

$$HH^n(A) = \mathrm{Ext}^n(A, A)$$

**Thm** Trinh '21

$(\mathbb{C}^\times)^n$-eq Borel-Moore homology of $X(\beta)$

is isomorphic to "Khovanov homology".

$$\mathrm{gr}_W H^T_{*,BM}(X(\beta)) \simeq HHH^n(\beta)$$

$HHH^n(\beta) \simeq KR(\bar{\beta})$. : Khovanov homology の亜種.

## Bott - Samelson variety

$$BS_i = \{ (\mathcal{F}, \mathcal{F}') \mid \mathcal{F}, \mathcal{F}' : \text{complete flags } \mathcal{F}_j = \mathcal{F}_j' \text{ for } j \neq i \}$$

$$B = \{ (\mathcal{F}^{(1)}, \dots, \mathcal{F}^{(r+1)}) \mid (\mathcal{F}^{(s)}, \mathcal{F}^{(s+1)}) \subset BS_{i_s} \}$$

: Bott - Samelson variety.

## Soergel bimodule

$$B_i := \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n']}{\left( x_i + x_{i+1} = x_i' + x_{i+1}', \ x_i x_{i+1} = x_i' x_{i+1}', \ x_j = x_j' \ \ j \neq i, i+1 \right)}$$

$BS_i \ni (\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ に対して, $\mathcal{L}_j = \mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j-1}$, $\mathcal{L}_j' = \mathcal{F}_j' / \mathcal{F}_{j-1}'$

という line bundle が定義され,

$$x_j = c_1(\mathcal{L}_j), \quad x_j' = c_1(\mathcal{L}_j')$$

- $\mathcal{L}_j \simeq \mathcal{L}_j'$, $x_j = x_j'$ for $(j \neq i, i+1)$

- $x_i, x_{i+1}$ と $x_i', x_{i+1}'$ は $B_i$ の rel をみたす.

$$\rightsquigarrow \quad B_{i_1} \otimes \cdots \otimes B_{i_r} \longleftrightarrow (\mathcal{F}^{(1)}, \ldots, \mathcal{F}^{(n+1)})$$

ざっくり言うと, この対応から, Trinh の対応が得られる。