

離散数学特論
～凸多面体の数え上げ組合せ論入門～

土谷 昭善 (akiyoshi@is.sci.toho-u.ac.jp)

目次

1	凸多面体	2
2	面	5
3	オイラーの多面体定理	8
4	三角形分割	12
5	Ehrhart 多項式	16
6	Ehrhart 級数	20
7	格子凸多面体の代数幾何学	24

イントロダクション

離散数学や組合せ論の分野の中に、数え上げ数学というものがある。字の如く、数学的な対象の何かを数え上げることを研究する分野である。高校数学だと場合の数という単元が当てはまるであろう。一見、ただ個数を数え上げているだけに思えることが、実は様々な普遍的な関係式や、数学的な対象の性質に繋がったりする。この講義では、特に（凸多角形を含む）凸多面体に関する数え上げ数学を学ぶ。

凸多面体に関する数え上げ数学は主に2つあり、1つは面の個数を数え上げることで、もう1つは格子点の個数を数え上げることである。面の数え上げに関する有名な結果は**オイラーの多面体定理**であろう。これは凸多面体 $\mathcal{P}$ の頂点の個数を v 、辺の個数を e 、面の個数を f とすると、

$$v - e + f = 2$$

という関係式が成り立つ、という結果である。一方で、格子点の数え上げに関する有名な結果は**ピックの定理**である。 xy 平面 $\mathbb{R}^2$ において、**格子点**とは x 座標も y 座標も整数となる点のことである。特に、全ての頂点が格子点となるような凸多角形のことを**格子凸多角形**という。格子凸多角形 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ に対し、その辺に含まれる格子点の個数を b 、内部に含まれる格子点の個数を i としたとき、

$$\mathcal{P} \text{ の面積} = i + \frac{b}{2} - 1$$

という公式が成り立つ。この結果をピックの定理という。

本講義ではこの2つの数え上げ数学の定理を一般次元の凸多面体へ拡張する。特に、次の2つの定理の証明を目的とする。

定理 0.1 (オイラーの多面体定理). $\mathcal{P}$ を次元 $d \geq 2$ の凸多面体とし、 $0 \leq i \leq d-1$ に対し、 f_i を $\mathcal{P}$ の i 次元の面の個数とする。このとき、

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1}$$

が成り立つ。

定理 0.2 (エルハートの基本定理). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元の格子凸多面体とし、正の整数 n に対し、 $L_{\mathcal{P}}(n)$ で $\mathcal{P}$ を n 倍に「膨らました」凸多面体 $n\mathcal{P}$ 、 $L_{\mathcal{P}}^*(n)$ でその内部に含まれる格子点の個数とする。このとき、 $L_{\mathcal{P}}(n)$ は定数項を1とする変数 n の d 次多項式であり、 n^d の係数は $\mathcal{P}$ の体積に一致する。さらに

$$L_{\mathcal{P}}^*(n) = (-1)^d L_{\mathcal{P}}(-n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

が成り立つ。

まず一般次元の凸多面体と面の定義、またそれらに関する基本的な性質を紹介する。一般次元の凸多面体の命題は、主張自体は想像しやすく、直感的に正しいこともわかるが、証明はかなり複雑である。そこで本講義では凸多面体の基本的な命題の証明は省略し、数え上げ数学に関する命題の証明を重点的に行う。

1 凸多面体

この節では、本講義の主な対象である一般次元の凸多面体を定義する。 $\mathbb{R}^N$ を N 次元ユークリッド空間とし、 $\mathbb{R}^N$ 内の点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ の内積を $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$ で定義し、その2点間の距離を $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}$ で定義する。またその2点を結ぶ線分とは、 $\mathbb{R}^N$ の部分集合

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

のことである。

定義 1.1. $\mathbb{R}^N$ の空でない部分集合 $\mathcal{A}$ が**凸集合** (convex set) であるとは、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ に対し、 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ が $\mathcal{A}$ に含まれるときにいう。

例 1.2. (1) 点 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ を中心とする半径 $r > 0$ の N 球体

$$\mathbb{B}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq r\}$$

は凸集合である。

(2) 点 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ を中心とする半径 $r > 0$ の $N - 1$ 球面

$$\mathbb{S}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = r\}$$

は凸集合ではない。

空間 $\mathbb{R}^N$ の凸集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ が**有界**であるとは、十分大きい $r > 0$ に対し、

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{B}_r(\mathbf{0})$$

となるときにいう。ここで、 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$ は $\mathbb{R}^N$ の原点である。

補題 1.3. 空間 $\mathbb{R}^N$ の空でない凸集合の族 $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ を考える。このとき、

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

は凸集合である。

例えば、複数の円を書いたとき、重なっている部分は凸集合となっている。この補題より次の系が従う。

系 1.4. 空間 $\mathbb{R}^N$ の空でない部分集合 V に対し、 V を含む最小の凸集合が存在する。つまり凸集合 $V \subset \mathcal{A}$ で、任意の凸集合 $V \subset B$ に対し、 $\mathcal{A} \subset B$ となるものが存在する。

V を含む最小の凸集合を $\text{conv}(V)$ で表し、 V の**凸閉包**という。例えば、 $\text{conv}(\mathbb{S}_r(\mathbf{a})) = \mathbb{B}_r(\mathbf{a})$ である。 V が有限集合の場合は次の表示を持つ。

定理 1.5. 空間 $\mathbb{R}^N$ の空でない有限集合 $V = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s\} \subset \mathbb{R}^N$ に対し、

$$\text{conv}(V) = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i \mathbf{a}_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \right\}$$

である。特に、 $\text{conv}(V)$ は有界である。

定義 1.6. 空間 $\mathbb{R}^N$ の集合 $\mathcal{P}$ が**凸多面体**であるとは、有限集合 $V \subset \mathbb{R}^N$ で $\mathcal{P} = \text{conv}(V)$ となるものが存在するときにいう。

凸多角形や3次元空間の通常の凸多面体 $\mathcal{P}$ を考えると、それぞれ頂点を V とすれば、 $\mathcal{P} = \text{conv}(V)$ となっていることがわかるであろう。一方、球体は有限集合の凸閉包で表すことができない（少なくとも球面の全ての点が必要）ので、凸多面体ではない。一般の凸多面体の頂点は次の補題から定義できる。

補題 1.7. 凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ に対し、最小の有限集合 $V \subset \mathbb{R}^N$ で $\mathcal{P} = \text{conv}(V)$ となるものが存在する。この有限集合 V を $\mathcal{P}$ の**頂点集合**といい、各点を**頂点**という。

次に凸多面体の次元を定義する。空間 $\mathbb{R}^N$ の点 $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_s$ が**アフィン独立**であるとは、

$$\begin{cases} \lambda_0 \mathbf{a}_0 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_s \mathbf{a}_s = \mathbf{0}, \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_s = 0, \\ \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ならば

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$$

となるときにいう。これは $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_s - \mathbf{a}_0$ が一次独立と同値である。空間 $\mathbb{R}^n$ の**アフィン部分空間** (affine subspace) とは、 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間を平行移動したもの、つまり、線形部分空間 $W \subset \mathbb{R}^N$ と点 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ に対し、

$$W + \mathbf{a} = \{\mathbf{w} + \mathbf{a} : \mathbf{w} \in W\}$$

と表される集合である。例えば、 $\mathbb{R}^2$ において、直線が線形部分空間となるのは原点を通るときのみであるが、直線はすべてアフィン部分空間である。

空でない集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ に対し、1点 $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ をとり、 $\mathcal{A} - \mathbf{a}$ が張る $\mathbb{R}^N$ の線形部分空間 $W = \text{span}(\mathcal{A} - \mathbf{a})$ を考え、 $X = W + \mathbf{a}$ とすると、 X は $\mathcal{A}$ を含む最小のアフィン部分空間である。これを $\text{aff}(\mathcal{A})$ と書く。すると次のような表示を持つ。

命題 1.8. 空でない集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ に対し、

$$\text{aff}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i \mathbf{a}_i : \mathbf{a}_i \in \mathcal{A}, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \right\}$$

となる。

点 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \in \mathbb{R}^N$ に対し、 $\lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ を満たす $\sum_{i=1}^s \lambda_i \mathbf{a}_i$ のことを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ の**アフィン結合**という。つまり $\text{aff}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ のアフィン結合全体からなる集合である。 $\text{span}(\mathcal{A} - \mathbf{a})$ が $\mathcal{A} - \mathbf{a}$ の線型結合全体からなる集合だったことを考えると想像しやすい。

アフィン部分空間 $A = W + \mathbf{a} \subset \mathbb{R}^N$ に含まれるアフィン独立な点の個数の最大値を $d+1$ としたとき、 d を A の**次元** (dimension) と定義する。このとき、 A が d 次元であることと、 W が線型空間として d 次元となることは同値である。線形空間の基底の性質を考えると、次の命題が得られる。

命題 1.9. アフィン独立な点の集合 $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_s\} \subset \mathbb{R}^N$ に対し、任意の点 $\mathbf{x} \in \text{aff}(\mathcal{A})$ は

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^s \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^s \lambda_i = 1$$

なる一意的な表示を持つ。

凸多面体 $\mathcal{P}$ の次元を $\text{aff}(\mathcal{P})$ の次元で定義する。つまり、 $\mathcal{P}$ を含む最小のアフィン部分空間の次元が凸多面体の次元である。例えば、 $\mathbb{R}^3$ 空間においても凸多角形は 2 次元であることがわかる。またどんな $\mathcal{P}$ の点も頂点のアフィン結合で書けるため、 d 次元凸多面体 $\mathcal{P}$ は $d+1$ 個のアフィン独立な頂点を持つ。つまり $\mathcal{P}$ は少なくとも $d+1$ 個の頂点を持つ。頂点の個数がちょうど $d+1$ 個の d 次元凸多面体のことを d 単体 (d -simplex) という。

命題 1.9 から単体の各点は頂点を使って、一意的な表示を持つ。また内点も同様の表示を持つ。ここで、凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ の **(相対) 内部** ((relative) interior) とは、距離空間 $\mathbb{R}^N$ の部分空間 $\text{aff}(\mathcal{P})$ における $\mathcal{P}$ の内部 $\text{int}(\mathcal{P})$ のことであり、内部の点のことを内点と呼ぶ。

命題 1.10. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を d 単体とし、その頂点集合を $\{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d\}$ とする。このとき、任意の点 $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ と $\mathbf{y} \in \text{int}(\mathcal{P})$ は

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^d \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1$$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=0}^d \mu_i \mathbf{a}_i, \quad \mu_i > 0, \quad \sum_{i=0}^d \mu_i = 1$$

なる一意的な表示を持つ。

最後に、いくつか凸多面体の代表的な例を挙げる。次元 $d-1$ の凸多面体 $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^N$ と $\mathbb{R}^N$ の点 $\mathbf{a} \notin \text{aff}(\mathcal{Q})$ の和集合の凸閉包

$$\text{conv}(\mathcal{Q} \cup \{\mathbf{a}\}) \subset \mathbb{R}^N$$

を、 $\mathcal{Q}$ を底とし、 $\mathbf{a}$ を頂上 (apex) とする角錐 (pyramid) という。このとき角錐は d 次元となる。たとえば、 d 単体は $(d-1)$ 単体を底とする角錐である。特に、単体は全ての頂点を角錐の頂上としてみなすことができる。一方、次元 $d-1$ の凸多面体 $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^N$ とその平行移動 $\mathcal{Q} + \mathbf{a}$ (ただし $(\mathcal{Q} + \mathbf{a}) \cap \text{aff}(\mathcal{Q}) = \emptyset$) の和集合の凸閉包

$$\text{conv}(\mathcal{Q} \cup (\mathcal{Q} + \mathbf{a})) \subset \mathbb{R}^N$$

を、 $\mathcal{Q}$ を底とする角柱 (prism) という。このとき角柱は d 次元となる。

線形変換 $\phi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ と点 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ に対し、写像 $\psi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ を

$$\psi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{a}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$$

で定義する。つまり ψ は線型変換と平行移動の合成写像である。この写像 ψ を $\mathbb{R}^N$ のアフィン変換 (affine transpose) という。このとき、 A が d 次元アフィン部分空間であれば、像 $\psi(A)$ も d 次元アフィン部分空間であり、特に、 $\mathcal{P}$ が d 次元凸多面体であれば、 $\psi(\mathcal{P})$ も d 次元凸多面体である。凸多面体の議論においては、 $\psi(\text{aff}(\mathcal{P})) = \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^N$ となる適当なアフィン変換を考え、 $\mathcal{P}$ と $\psi(\mathcal{P})$ を同一視することで、 $N = d$ ($\mathcal{P}$ が full-dimensional) として議論することができる。

演習問題

問題 1.11. $\mathbb{R}^N$ の点 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ がアフィン独立であることと、 $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_s - \mathbf{a}_0$ が一次独立であることが同値となることを示せ。

2 面

空間 $\mathbb{R}^N$ の**超平面** (hyperplane) とは $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$ と実数 b を使い,

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = b\}$$

と表示される集合 $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N$ のことである. ただし, $\mathbf{a} \neq (0, \dots, 0)$ である. $\mathbb{R}^N$ の超平面は次元 $N-1$ のアフィン空間である. 逆にどんな $N-1$ 次元アフィン空間も $\mathbb{R}^N$ の超平面である. また空間 $\mathbb{R}^N$ の部分集合

$$\mathcal{H}^{(+)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \geq b\},$$

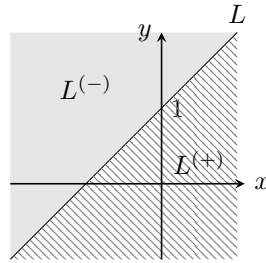
$$\mathcal{H}^{(-)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq b\}$$

を超平面 $\mathcal{H}$ が定義する**閉半空間**という.

例 2.1. xy 平面において, 直線 $L: y = x + 1$ を考えると, この直線は

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (1, -1), (x, y) \rangle = -1\}$$

と表記できるので, $\mathbb{R}^2$ の超平面である. また閉半空間 $L^{(+)}$ と $L^{(-)}$ は下図のようになる.



前節では凸多面体を凸閉包を使って定義したが, 閉半空間を用いても定義できる. 実際,

定理 2.2. 空間 $\mathbb{R}^N$ の有限個の閉半空間 $\mathcal{H}_1^{(+)}, \dots, \mathcal{H}_s^{(+)}$ の共通部分

$$\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^s \mathcal{H}_i^{(+)}$$

は $\mathbb{R}^N$ の空でない有界集合であれば, 凸多面体である. 逆に任意の凸多面体は有限個の閉半空間の共通部分である.

例 2.3. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ を $(1, 1), (1, 0), (0, 1)$ を頂点とする三角形とし, 3つの直線

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (0, -1), (x, y) \rangle = -1\},$$

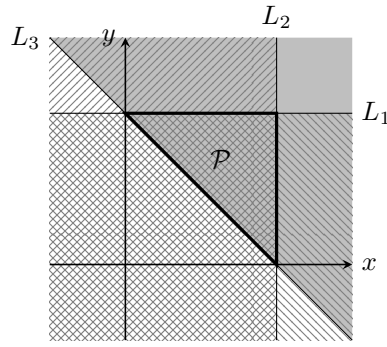
$$L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (-1, 0), (x, y) \rangle = -1\},$$

$$L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (1, 1), (x, y) \rangle = 1\}$$

を考えると, $\mathcal{P} = \bigcap_{i=1}^3 L_i^{(+)}$ である (上図参照).

凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ の**支持超平面** (supporting hyperplane) とは, 次の条件を満たす空間 $\mathbb{R}^N$ の超平面 $\mathcal{H}$ のことである:

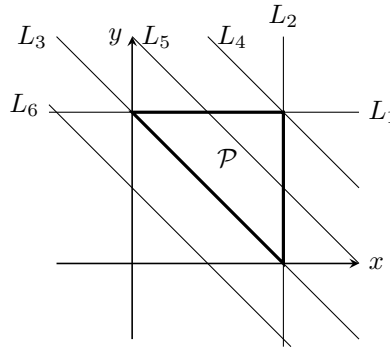
- $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}^{(+)}$ または $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{(-)}$ である.
- $\mathcal{P} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{P} \cap \mathcal{H} \neq \mathcal{P}$ である.



例 2.4. 例 2.3 の三角形を考えると、直線 L_1, L_2, L_3 は $\mathcal{P}$ の支持超平面となっている。さらに

$$\begin{aligned} L_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (1, 1), (x, y) \rangle = 2\}, \\ L_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (1, 1), (x, y) \rangle = 1.5\}, \\ L_6 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (1, 1), (x, y) \rangle = 0.5\} \end{aligned}$$

を考えると、 L_4 は支持超平面であるが、 L_5 と L_6 は支持超平面ではない（下図参照）。



支持超平面は凸集合であるので、 $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}$ もまた凸集合である。特に、これは凸多面体である。

命題 2.5. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を凸多面体とし、部分集合 $V \subset \mathbb{R}^N$ は $\mathcal{P} = \text{conv}(V)$ を満たすとする。 $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N$ が $\mathcal{P}$ の支持超平面であれば、 $\mathcal{P} \cap \mathcal{H} = \text{conv}(V \cap \mathcal{H})$ である。

この凸多面体と支持超平面の共通部分を面という。

定義 2.6. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を d 次元凸多面体とし、 $\mathcal{H}$ を $\mathcal{P}$ の支持超平面とする。このとき、 $\mathcal{F} = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}$ を $\mathcal{P}$ の面 (face) という。特に、 $\dim \mathcal{F} = i$ のとき、 i 面といい、0 面のことを頂点 (vertex)、1 面のことを辺 (edge)、 $(d-1)$ 面のことをファセット (facet) という。

補足 2.7. 第 1 節でも凸多面体の頂点を定義したが、1 点集合である 0 面を $\mathbb{R}^N$ の点と同一視すればこの 2 つの定義は一致する。つまり、凸多面体 $\mathcal{P}$ の 0 面全体の和集合 V は $\mathcal{P} = \text{conv}(V)$ となる最小の有限集合である。

凸閉包を用いた凸多面体の定義では、頂点がその凸多面体を与えていた。閉半空間を用いた定義では、ファセットがその凸多面体を与える。

定理 2.8. 凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^N$ のファセット全体を $F_1, \dots, F_s$ とする. それぞれの F_i に対応する P の支持超平面を $\mathcal{H}_i$ (つまり $P \cap \mathcal{H}_i = F_i$ である) とし $P \subset \mathcal{H}_i^{(+)}$ であるとする. このとき,

$$P = \left(\bigcap_{i=1}^s \mathcal{H}_i^{(+)} \right) \cap \text{aff}(P)$$

である. 特に, 上の式から $\mathcal{H}_i^{(+)}$ を 1 つでも取り除くと等式は成り立たない.

さらにファセットは凸多面体の境界の構造を与える. 凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^N$ の **(相対) 境界** ((relative) boundary) とは, 距離空間 $\mathbb{R}^N$ の部分距離空間 $\text{aff}(P)$ における P の境界のことである. P の境界を ∂P と書く.

定理 2.9. 凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^N$ の境界 ∂P は P のファセットの和集合と一致する.

最後に面が満たす諸性質を述べる.

命題 2.10. $P \subset \mathbb{R}^N$ を凸多面体とし, F, F' を P の面とする. このとき,

- (1) $F' \subsetneq F$ ならば F' は F の面である.
- (2) F の面は P の面である.
- (3) $F \cap F'$ は P の面である.
- (4) F が P のファセットでなければ, F は P のあるファセットの面である.

F が F' の面であることを $F \prec F'$ と書き, 便宜上, 空集合も自分自身も面であるとする (つまり $\emptyset \prec F$ と $F \prec F$ が成り立つ). この命題から, P の面全体の集合は $\prec$ により半順序関係 (反射律, 反対称律, 推移律を満たす) となる. 特に, 束 (どの 2 要素も上限, 下限を持つ) である. これを **面束** (face lattice) という. 2 つの凸多面体は, それぞれの面束が順序同型のとき, **組合せ的同型** (combinatorially isomorphic) であるという. d 次元凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^N$ とアフィン変換 $\phi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ に対し, F が P の i 面であれば, $\phi(F)$ は $\phi(P)$ の i 面であり, P と $\phi(P)$ は組合せ的同型となる. したがって, 以前と同じ議論により, 凸多面体の面を調べるときは $N = d$ としてよい.

演習問題

問題 2.11. 四角形の頂点に右回りで a, b, c, d というラベルをつけると, その四角形の面 (の頂点集合) 全体は $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{a, b, c, d\}$ である. この集合に包含関係を入れたものが面束である. $P \subset \mathbb{R}^3$ を立方体とし, $Q \subset \mathbb{R}^3$ を三角柱とする. このとき, 適当な頂点のラベル付けをし, P と Q の面束の Hasse 図をそれぞれ書け.

3 オイラーの多面体定理

xyz 空間の凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ の頂点, 辺, 面の個数をそれぞれ v, e, f とすると, $v - e + f = 2$ が成り立つというのが 3 次元のオイラーの多面体定理であった. この定理を任意の次元まで一般化し, 3 次元も含めて証明する.

まず凸多面体の面が有限個しかないことは命題 2.5 から従う. そこで d 次元凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ に対し, $f_i(\mathcal{P})$ で $\mathcal{P}$ の i 面の個数を表し, 数列

$$f(\mathcal{P}) = (f_0(\mathcal{P}), f_1(\mathcal{P}), \dots, f_{d-1}(\mathcal{P}))$$

を $\mathcal{P}$ の f 列 (f -vector) という. どの多面体か明らかな時は, $f_i = f_i(\mathcal{P})$ と書く. 例えば, 3 単体 $\mathcal{P}$ の f 列は

$$f(\mathcal{P}) = (4, 6, 4)$$

である. より一般に, d 単体の f 列は次のように計算できる.

命題 3.1. d 単体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ の f 列 $f(\mathcal{P}) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ に対し,

$$f_i = \binom{d+1}{i+1}$$

が全ての $0 \leq i \leq d-1$ で成り立つ. ここで, $\binom{n}{k}$ は二項係数 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ のことである.

Proof. $\mathcal{P}$ の頂点集合を V とし, 部分集合 $W \subset V$ で $|W| = d = |V| - 1$ となるものを固定する. 簡単のため, $N = d$ とし, さらに平行移動により, $V \setminus W = \{\mathbf{0}\}$ と仮定してよい. このとき $\mathbf{0} \notin \text{aff}(W)$ であり, $\text{aff}(W)$ は超平面であるので, ある $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ を使って

$$\mathcal{H} := \text{aff}(W) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

と書くことができる. $W \subset \mathcal{H}$ かつ $\mathbf{0} \in \mathcal{H}^{(+)}$ なので, $\mathcal{H}$ は $\mathcal{P}$ の支持超平面である. 特に, $\mathcal{H} \cap V = W$ なので, $\text{conv}(W)$ は $\mathcal{P}$ のファセットである. この事実と命題 2.10 を使えば, 帰納法によって, V から $i+1$ 個の点を選んだ集合を V' とすると, $\text{conv}(V')$ は $\mathcal{P}$ の i 面となることが証明できる. よって $\mathcal{P}$ の i 面の個数は $d+1$ 点から $i+1$ 点を選ぶ方法と一致するので, 欲しい等式が得られた. $\square$

一般に, 凸多面体の f 列を計算することは非常に困難である. しかし, f 列が満たすべき様々な関係式が知られている. そのうちの 1 つがオイラーの多面体定理である.

定理 3.2 (オイラーの多面体定理). 次元 $d \geq 2$ の凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ の f 列

$$f(\mathcal{P}) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$$

は等式

$$f_0 - f_1 + f_2 - \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1} \quad (1)$$

を満たす.

定理の証明のために 1 つ補題を準備する.

補題 3.3. 次元 $d \geq 2$ の凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に対し, 超平面 $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$ で条件

超平面 $\mathcal{H}$ をどのように平行移動させても $\mathcal{P}$ の頂点を 2 個以上含むことはできない
を満たすものが存在する.

Proof. 空間 $\mathbb{R}^d$ の異なる 2 点 $\mathbf{y}$ と $\mathbf{z}$ を通過する直線 $L_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ と直交し, 原点を通過する超平面を $\mathcal{H}'_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ とする. このとき, $L_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ を含む平面 $\mathcal{H}_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ の法線ベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ は $\mathcal{H}'_{\mathbf{y},\mathbf{z}}$ に属する. すると, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の頂点を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_v$ とし

$$\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq v} \mathcal{H}'_{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j} \neq \emptyset$$

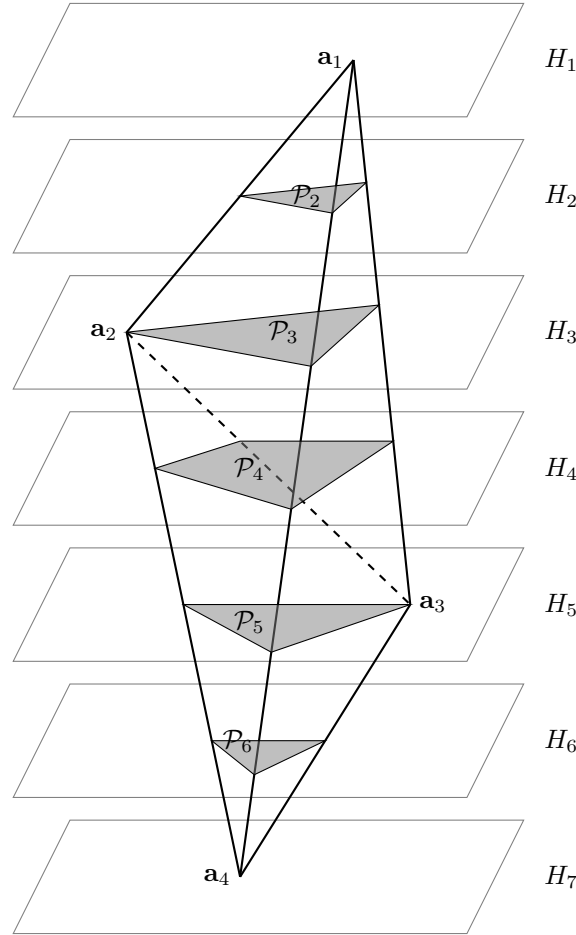
に属する任意の $\mathbf{a}'$ を選び, $\mathbf{a}'$ を法線ベクトルとする超平面を $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$ とすれば, $\mathcal{H}$ は条件を満たす. $\square$

定理 3.2 の証明. $N = d$ としてよい. 次元 d に関する数学的帰納法を使う.

xy 平面の凸多角形の頂点の個数 f_0 と辺の個数 f_1 は一致するので, $d = 2$ ならば等式 (1) は成立する.

$d \geq 3$ を仮定する. $v = f_0(\mathcal{P})$ とし, $\mathcal{P}$ の頂点を $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_v$ とする. さらに補題 3.3 の条件を満たす超平面 $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$ を固定する. 今, 超平面 $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{2v-1}$ を次のようにとる:

- $1 \leq i \leq v$ に対し, $\mathcal{H}_{2i-1}$ は $\mathcal{H}$ に平行で $\mathbf{a}_i \in \mathcal{H}_{2i-1}$ である. さらに頂点の番号を適当に並べ替えることで, $\mathcal{H}_{2i-1}$ は $\mathcal{H}_{2i-3}$ と $\mathcal{H}_{2i+1}$ の間に位置するようにする.
- $1 \leq i \leq v-1$ に対し, $\mathcal{H}_{2i}$ は $\mathcal{H}$ に平行で $\mathcal{H}_{2i-1}$ と $\mathcal{H}_{2i+1}$ の間に位置するようにとる.



すると $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_{2v-1}$ は $\mathcal{P}$ の支持超平面であり,

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{P} = \{\mathbf{a}_1\}, \quad \mathcal{P}_{2v-1} = \mathcal{H}_{2v-1} \cap \mathcal{P} = \{\mathbf{a}_v\}$$

となる. 一方,

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{P}, \mathcal{P}_3 = \mathcal{H}_3 \cap \mathcal{P}, \dots, \mathcal{P}_{2v-2} = \mathcal{H}_{2v-2} \cap \mathcal{P}$$

は次元 $d-1$ の凸多面体である.

$\mathcal{P}$ のそれぞれの j 面 $\mathcal{F}^j$ (ただし $1 \leq j \leq d-1$) とそれぞれの $\mathcal{P}_i$ (ただし $2 \leq i \leq 2v-2$) に対し, $\psi(\mathcal{F}^j, \mathcal{P}_i)$ を

$$\psi(\mathcal{F}^j, \mathcal{P}_i) = \begin{cases} 0, & (\mathcal{P}_i \cap \text{int}(\mathcal{F}^j) = \emptyset) \\ 1, & (\mathcal{P}_i \cap \text{int}(\mathcal{F}^j) \neq \emptyset) \end{cases}$$

と定義する. 面 $\mathcal{F}^j$ の頂点を含む $\mathcal{H}_i$ のうち, 添字 i が最も小さくなるものを α とし, 最も大きくなるものを β とする. このとき, α と β は奇数である. これを $\alpha = 2m-1$ と $\beta = 2\ell-1$ とおくと, $i = 2m, 2m+1, \dots, 2\ell-2$ のとき, しかもそのときに限り, $\mathcal{P}_i \cap \text{int}(\mathcal{F}^j) \neq \emptyset$ であり, $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{F}^j$ は $\mathcal{P}_i$ の $(j-1)$ 面となる. 特に, $\psi(\mathcal{F}^j, \mathcal{P}_i) = 1$ となる添字 i で偶数のものの個数は, 添字 i で奇数のものの個数よりもちょうど 1 個多い. すると,

$$\sum_{i=2}^{2v-2} (-1)^i \psi(\mathcal{F}^j, \mathcal{P}_i) = 1$$

となる. よって

$$\sum_{\mathcal{F}^j : \mathcal{P} \text{ の } j \text{ 面}} \left(\sum_{i=2}^{2v-2} (-1)^i \psi(\mathcal{F}^j, \mathcal{P}_i) \right) = f_j(\mathcal{P})$$

すると,

$$\sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j \left(\sum_{\mathcal{F}^j : \mathcal{P} \text{ の } j \text{ 面}} \left(\sum_{i=2}^{2v-2} (-1)^i \psi(\mathcal{F}^j, \mathcal{P}_i) \right) \right) = \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j f_j(\mathcal{P}) \quad (2)$$

である. したがって, この等式の左辺が $1 + (-1)^{d-1} - f_0(\mathcal{P})$ であることを示せばよい. まず

$$\sum_{\mathcal{F}^j : \mathcal{P} \text{ の } j \text{ 面}} \psi(\mathcal{F}^j, \mathcal{P}_i) = \begin{cases} f_0(\mathcal{P}_i) - 1, & (i \text{ は奇数で } j = 1) \\ f_{j-1}(\mathcal{P}_i), & (\text{その他}) \end{cases}$$

である. 実際,

- i が偶数ならば $\mathcal{P}_i$ の $(j-1)$ 面は, $\mathcal{P}$ の j 面と $\mathcal{H}_i$ の共通部分である,
- i が奇数で $j > 1$ ならば, $\mathcal{P}_i$ の $(j-1)$ 面は $\mathcal{P}$ の j 面と $\mathcal{H}_i$ との共通部分である,
- i が奇数ならば, $\mathcal{P}_i$ の 1 つの頂点は $\mathcal{P}$ の頂点であり, 残りの頂点は $\mathcal{P}$ の辺と $\mathcal{H}_i$ との共通部分である,

という事実から従う. よって帰納法の仮定を $\mathcal{P}_i$ に使うことで,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j \left(\sum_{\mathcal{F}^j : \mathcal{P} \text{ の } j \text{ 面}} \psi(\mathcal{F}^j, \mathcal{P}_i) \right) &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j f_{j-1}(\mathcal{P}_i) + 1, & (i \text{ は奇数}) \\ \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j f_{j-1}(\mathcal{P}_i), & (i \text{ は偶数}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(1 + (-1)^{d-2}) + 1, & (i \text{ は奇数}) \\ -(1 + (-1)^{d-2}), & (i \text{ は偶数}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^{d-1}, & (i \text{ は奇数}) \\ (-1)^{d-1} - 1, & (i \text{ は偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

となる. すると,

$$\begin{aligned} (2) \text{ の左辺} &= \sum_{i=2}^{2v-2} (-1)^i \left(\sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j \left(\sum_{\mathcal{F}^j : \mathcal{P} \text{ の } j \text{ 面}} \psi(\mathcal{F}^j, \mathcal{P}_i) \right) \right) \\ &= (-1)^{d-1} - (v-1) = (-1)^{d-1} + 1 - f_0(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

となり, 等式 (1) が成り立つ. □

演習問題

補題 3.4. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を $d-1$ 次元凸多面体とし, $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{P}$ を底とする角柱とする. このとき,

$$\begin{aligned}f_0(\mathcal{Q}) &= 2f_0(\mathcal{P}) \\f_i(\mathcal{Q}) &= 2f_i(\mathcal{P}) + f_{i-1}(\mathcal{P}), \quad 1 \leq i \leq d-2 \\f_{d-1}(\mathcal{Q}) &= f_{d-2}(\mathcal{P}) + 2\end{aligned}$$

が成り立つ.

問題 3.5. (1) d 超立方体とは, 線分から角柱をとる操作を $d-1$ 回施して得られる d 次元凸多面体である. d 超立方体の f 列を求めよ.

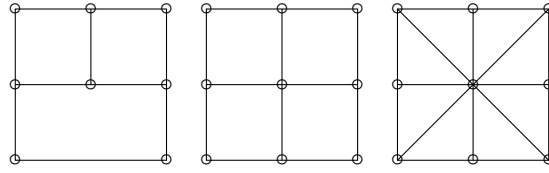
(2) 可能ならば補題 3.4 を証明せよ.

4 三角形分割

凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ に対し、 $\mathcal{P}$ の**細分** (subdivision) $\mathcal{S}$ とは、凸多面体からなる有限集合で条件

- (1) 任意の元 $\Delta \in \mathcal{S}$ に対し、 Δ の全ての面は $\mathcal{S}$ の元である、
- (2) $\mathcal{S}$ の任意の 2 元 $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{S}$ に対し、 $\Delta_1 \cap \Delta_2$ は Δ_1, Δ_2 のそれぞれの面である。ただし空集合や自分自身も面であるとする、
- (3) $\bigcup_{\Delta \in \mathcal{S}} \Delta = \mathcal{P}$ である

を満たすものをいう。また $\mathcal{S}$ の各凸多面体のことを $\mathcal{S}$ の**面** (face) といい、 $\mathcal{S}$ の極大な面のことを $\mathcal{S}$ の**セル** (cell) という。特に、すべてのセル（または面）が単体である細分のことを $\mathcal{P}$ の**三角形分割** (triangulation) という。例えば、次の左の図は細分ではない。実際、左上の正方形と下の長方形の共通部分は、長方形の面（辺）ではないからである。真ん中の図は細分であるが三角形分割ではない。最後に右の図は三角形分割である。



凸多面体 $\mathcal{P}$ は細分を少なくとも 1 つ持つ。実際、 $\mathcal{S}$ を $\mathcal{P}$ とその面全体からなる集合とすれば $\mathcal{S}$ は $\mathcal{P}$ の細分である。より一般に、どんな凸多面体も三角形分割を少なくとも 1 つ持つことを示す。そのために、細分から三角形分割を構成する方法を導入する。 $\mathcal{P}$ の細分 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{P}$ に含まれる点 $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ をそれぞれ 1 つ固定する。 $\mathbf{m}$ を含む $\mathcal{S}$ の面 Δ に対し、次の操作を考える。

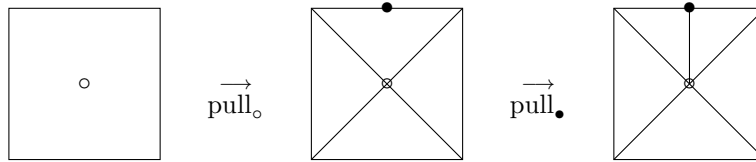
(操作) $\mathbf{m}$ を含まない Δ の面 Δ' に対し、角錐 $\text{conv}(\Delta' \cup \{\mathbf{m}\})$ を考え、このようにして得られた角錐の集合 $\{\text{conv}(\Delta' \cup \{\mathbf{m}\})\}_{\mathbf{m} \notin \Delta' \prec \Delta}$ と Δ を $\mathcal{S}$ の中で取り替える。

この操作を全ての $\mathbf{m}$ を含む $\mathcal{S}$ の面で行い、得られた集合を $\text{pull}_{\mathbf{m}}\mathcal{S}$ と書く。このとき $\text{pull}_{\mathbf{m}}\mathcal{S}$ は次の 2 種類の凸多面体からなる集合である：

(P1) $\Delta \in \mathcal{S}$ かつ $\mathbf{m} \notin \Delta$ ならば $\Delta \in \text{pull}_{\mathbf{m}}\mathcal{S}$ 。

(P2) $\Delta' \prec \Delta \in \mathcal{S}$ かつ $\mathbf{m} \in \Delta \setminus \Delta'$ ならば $\text{conv}(\Delta' \cup \{\mathbf{m}\}) \in \text{pull}_{\mathbf{m}}\mathcal{S}$ 。

この $\text{pull}_{\mathbf{m}}\mathcal{S}$ は $\mathcal{P}$ の細分となっており、 $\mathcal{S}$ の $\mathbf{m}$ に関する**強引き戻し細分** (strong pulling subdivision) という。



定理 4.1. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を凸多面体とし $\mathcal{S}$ をその細分とする。 $M = (\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_r)$ を $\mathcal{S}$ の頂点を全て含む、順番付けられた $\mathcal{P}$ の点の集合とする。各 $1 \leq i \leq r$ に対し、

$$\mathcal{S}_i := \text{pull}_{\mathbf{m}_i} \mathcal{S}_{i-1}$$

と定義する。ただし、 $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}$ である。このとき、 $\mathcal{S}' := \mathcal{S}_r$ は $\mathcal{P}$ の三角形分割である。

Proof. $\mathcal{S}'$ の各セルが単体であることを示せばよい. $\mathbf{m}$ を含む $\text{pull}_{\mathbf{m}}\mathcal{S}$ の各面は $\mathbf{m}$ を頂上とする角錐である. もし $\Delta \in \mathcal{S}$ が $\mathbf{m}'$ を頂上とする角錐であれば, $\text{pull}_{\mathbf{m}}\mathcal{S}$ の中で Δ の内側にあり, さらに $\mathbf{m}'$ を含む各面はまだ $\mathbf{m}'$ を頂上とする角錐である. 以上から, M に含まれるすべての点に関して強引き戻した細分 $\mathcal{S}'$ の各セル $C \in \mathcal{S}'$ とその各頂点 $\mathbf{v} \in C$ に対し, C が $\mathbf{v}$ を頂上とする角錐となることがわかる. これは $\mathcal{S}'$ の各セルが単体であることを意味する. $\square$

オイラーの多面体定理のように, 三角形分割の面の数え上げに関する等式が成り立つ. d 次元凸多面体 $\mathcal{P}$ の三角形分割 $\mathcal{T}$ に対し, $f_i(\mathcal{T})$ で $\mathcal{T}$ に属する i 面の個数を表し, 数列

$$f(\mathcal{T}) = (f_0(\mathcal{T}), f_1(\mathcal{T}), \dots, f_d(\mathcal{T}))$$

を $\mathcal{T}$ の f 列と呼ぶ. また $\partial\mathcal{T} := \{F \in \mathcal{T} : F \subset \partial\mathcal{P}\}$ は $\mathcal{P}$ の境界の三角形分割を与え, その f 列

$$f(\partial\mathcal{T}) = (f_0(\partial\mathcal{T}), f_1(\partial\mathcal{T}), \dots, f_{d-1}(\partial\mathcal{T}))$$

も考えることができる. このとき, $\mathcal{T}$ の被約オイラー標数を

$$\tilde{\chi}(\mathcal{T}) = \sum_{i=-1}^d (-1)^i f_i(\mathcal{T})$$

で定義し, $\mathcal{T}$ の境界の被約オイラー標数を

$$\tilde{\chi}(\partial\mathcal{T}) = \sum_{i=-1}^{d-1} (-1)^i f_i(\partial\mathcal{T})$$

で定義する. ただし $f_{-1}(\mathcal{T}) = f_{-1}(\partial\mathcal{T}) = 1$ とする. これは空集合に対応している. 驚くべきことに, 三角形分割の取り方によらず, 上記 2 つの被約オイラー標数は一定である.

定理 4.2. d 次元凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ と $\mathcal{P}$ の三角形分割 $\mathcal{T}$ に対し,

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(\mathcal{T}) &= 0, \\ \tilde{\chi}(\partial\mathcal{T}) &= (-1)^{d-1}\end{aligned}$$

が成り立つ.

この結果は代数的位相幾何学のよく知られているものだが, この講義では本筋から外れるため, 証明で用いる道具の紹介で止める.

体 k を固定し, 三角形分割 $\mathcal{T}$ の頂点集合を $V = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ とする. 以降, $\mathcal{T}$ の各面 $F = \text{conv}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ はその頂点集合 $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$ と同一視して議論する. まず $\mathcal{T}$ のすべての i 面の集合を基底とする k 上線型空間を

$$C_i = C_i(\mathcal{T}; k)$$

で表す. つまり, C_i はそれぞれの i 面を形式的に文字だと思い, その文字を変数とした k 係数 1 次齊次多項式全体と 0 からなる線型空間である. ただし, C_{-1} は $\{\emptyset\}$ を基底とする 1 次元線型空間である. 一方, $i < -1$ または $i > d$ のとき, $C_i = (0)$ である. 今, 線型写像

$$\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$$

を以下のように定義する: 線型空間 C_i の基底の元 σ の頂点が

$$x_{\ell_0}, x_{\ell_1}, \dots, x_{\ell_i}, \quad 1 \leq \ell_0 < \ell_1 < \dots < \ell_i \leq v$$

であるとき, $\partial_i(\sigma)$ を

$$\partial_i(\sigma) = \sum_{j=0}^i (-1)^j (\sigma \setminus \{x_{\ell_j}\})$$

で定義する $(\sigma \setminus \{x_{\ell_j}\})$ は $(i-1)$ 面なので, C_{i-1} の基底であることに注意). すると線型空間と線形写像の列

$$\cdots \rightarrow (0) \xrightarrow{\partial_{d+1}} C_d \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1} \xrightarrow{\partial_{d-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} (0) \rightarrow \cdots$$

が得られる. このとき, 具体的な計算により次の補題が得られる.

補題 4.3. 任意の i に対し, $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ が成り立つ. 特に,

$$\text{Im}(\partial_{i+1}) \subset \text{Ker}(\partial_i) \subset C_i$$

である.

この補題により, 線型商空間

$$\tilde{H}_i(\mathcal{T}; k) := \text{Ker}(\partial_i) / \text{Im}(\partial_{i+1})$$

が定義でき, これを $\mathcal{T}$ の k 上の**被約ホモロジー群**と呼ぶ. この商空間の次元を使って被約オイラー標数が計算できる (というよりこちらが定義である).

命題 4.4 (Euler–Poincaré 公式). 体 k によらず, 等式

$$\tilde{\chi}(\mathcal{T}) = \sum_{i \geq -1} (-1)^i \dim_k \tilde{H}_i(\mathcal{T}; k)$$

が成り立つ.

Proof. 商空間の次元公式より

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq -1} (-1)^i \dim_k \tilde{H}_i(\mathcal{T}; k) &= \sum_{i \geq -1} (-1)^i (\dim_k \text{Ker}(\partial_i) - \dim_k \text{Im}(\partial_{i+1})) \\ &= \sum_{i \geq -1} (-1)^i \dim_k \text{Ker}(\partial_i) + \sum_{i \geq -1}^d (-1)^{i+1} \dim_k \text{Im}(\partial_{i+1}) \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\dim_k \text{Ker}(\partial_i) + \dim_k \text{Im}(\partial_i)) - \dim_k \text{Ker}(\partial_{-1}) \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k C_i(\mathcal{T}; k) - 1 \\ &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i(\mathcal{T}) - 1 = \tilde{\chi}(\mathcal{T}) \end{aligned}$$

となる. □

$\partial\mathcal{T}$ に関しても同様の議論ができる. また三角形分割を $\mathcal{T}$ を**単体的 d 球体**, 境界の三角形分割 $\partial\mathcal{T}$ を**単体的 $d-1$ 球面**という概念に拡張し, 同様の議論を行い, 最終的に, 定理 4.2 は次の命題から従う.

命題 4.5. 単体的 d 球体 $\mathcal{B}$ に対し,

$$\tilde{H}_i(\mathcal{B}; k) = (0),$$

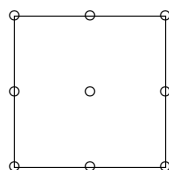
さらに単体的 $d-1$ 球面 $\mathcal{S}$ に対し,

$$\tilde{H}_i(\mathcal{S}; k) = \begin{cases} (0), & (i \neq d-1) \\ k, & (i = d-1) \end{cases}$$

が成り立つ.

演習問題

問題 4.6. 定理 4.1 では順番付けられた点の集合を考えていたが、順番を変えれば得られる三角形分割が変わる．これを確認するために、下図のすべての点に適当な順番を付け、その強引き戻し細分を考えることで、異なる三角形分割を 2 つ与えよ．



5 Ehrhart 多項式

格子凸多面体 (lattice polytope) $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ とは全ての頂点の成分が整数, つまり $\mathbb{Z}^N$ の点となる凸多面体のことをいう. 2次元の格子凸多面体, つまり格子凸多角形の面積は, その多角形に含まれる格子点を数え上げることで求めることができる. その定理をピックの定理と呼ぶ.

定理 5.1 (Pick の定理). 格子凸多角形 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ に対し,

$$\mathcal{P} \text{ の面積} = |\text{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^2| + \frac{1}{2}|\partial\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^2| - 1$$

である.

しかし, 3次元以上の凸多面体の場合, その体積は自身に含まれる格子点を数え上げるだけでは求まらない.

例 5.2. 自然数 m に対し, $\mathcal{P}_m \subset \mathbb{R}^3$ を $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, m)$ を頂点とする 3 単体とする. このとき, m の値によらず $\text{int}(\mathcal{P}_m) \cap \mathbb{Z}^3 = \emptyset$, つまり $|\text{int}(\mathcal{P}_m) \cap \mathbb{Z}^3| = 0$ であり, $\mathcal{P}_m$ の境界に含まれる格子点は頂点のみ, つまり $|\partial\mathcal{P}_m \cap \mathbb{Z}^3| = 4$ である. よって, $\mathcal{P}_m$ に含まれる格子点の個数は一定である. しかし, $\mathcal{P}_m$ の体積は $m/6$ であるので, 2次元の場合と違い, $\mathcal{P}_m$ に含まれる格子点の個数だけではその体積は求まらない.

Pick の定理を 3次元以上に拡張するために, 格子凸多面体の “膨らまし” を考える. つまり, 格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ と正の整数 n に対して, $\mathcal{P}$ を n 倍に膨らました凸多面体

$$n\mathcal{P} := \{n\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$$

を考える. この $n\mathcal{P}$ に含まれる格子点の個数を

$$L_{\mathcal{P}}(n) := |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N|,$$

その内部に含まれる格子点の個数を

$$L_{\mathcal{P}}^*(n) := |\text{int}(n\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N|$$

で表す.

定理 5.3 (Ehrhart の基本定理). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を d 次元格子凸多面体とする. このとき, $L_{\mathcal{P}}(n)$ は定数項を 1 とする n に関する d 次多項式である. さらに

$$L_{\mathcal{P}}^*(n) = (-1)^d L_{\mathcal{P}}(-n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

が成り立つ.

この定理から多項式 $L_{\mathcal{P}}(n)$ のことを, $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ. 証明の前にまず, この結果から得られる系を紹介する.

系 5.4. $d = N$ ならば, $\mathcal{P}$ の体積は $L_{\mathcal{P}}(n)$ の n^d の係数と一致する.

Proof. 正の整数 n に対し,

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)^d = \left\{\left(\frac{a_1}{n}, \dots, \frac{a_d}{n}\right) : a_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

とすると,

$$|nP \cap \mathbb{Z}^d| = \left| \mathcal{P} \cap \left(\frac{\mathbb{Z}}{n} \right)^d \right|$$

であることは容易にわかる. $\mathcal{P} \cap (\mathbb{Z}/n)^d$ の各格子点を中心に長さ $1/n$ の立方体を作り, その体積の和をとると

$$\left(\frac{1}{n} \right)^d \cdot L_{\mathcal{P}}(n)$$

となる. 特に, $n \rightarrow \infty$ を考えることで,

$$\mathcal{P} \text{ の体積} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^d \cdot L_{\mathcal{P}}(n)$$

が成り立つ (小さな立方体で $\mathcal{P}$ を埋め尽くすと考えれば理解できるであろう. より詳しくは区分別求積法で示す). $L_{\mathcal{P}}(n)$ は n に関する d 次多項式であったので, 右辺は結局 $L_{\mathcal{P}}(n)$ の n^d の係数であることがわかる. $\square$

したがって $\mathcal{P}$ の体積は Ehrhart 多項式が分かれば求めることができる. さらに等式 (3), これは **Ehrhart–Macdonald 相互法則** と呼ばれる, を用いると, 2次元の場合は Pick の定理が得られる. 特に, $L_{\mathcal{P}}(1), L_{\mathcal{P}}(2), \dots$ と $L_{\mathcal{P}}^*(1), L_{\mathcal{P}}^*(2), \dots$ の中から d 個の値がわかれば, 連立方程式を解くことで Ehrhart 多項式が求まり, 体積がわかる. よって定理 5.3 は Pick の定理の高次元版である.

定理 5.3 の証明に向けて, まず $\mathcal{P}$ が単体のときに示す.

補題 5.5. d 次元格子単体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ に対し, 定理 5.3 が成り立つ.

Proof. 簡単のため $N = d$ とし, 格子単体 $\mathcal{P}$ の頂点を $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ とする. すると, 任意の $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ と $\mathbf{y} \in \text{int}(\mathcal{P})$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=0}^d \lambda_i \mathbf{a}_i, & \lambda_i &\geq 0, & \sum_{i=0}^d \lambda_i &= 1 \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=0}^d \mu_i \mathbf{a}_i, & \mu_i &> 0, & \sum_{i=0}^d \mu_i &= 1 \end{aligned}$$

なる一意的な表示を持つ. 特に, 任意の $\mathbf{x} \in n\mathcal{P}$ と $\mathbf{y} \in \text{int}(\mathcal{P})$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=0}^d \lambda_i \mathbf{a}_i, & \lambda_i &\geq 0, & \sum_{i=0}^d \lambda_i &= n \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=0}^d \mu_i \mathbf{a}_i, & \mu_i &> 0, & \sum_{i=0}^d \mu_i &= n \end{aligned}$$

なる一意的な表示を持つ.

$j = 0, \dots, d$ に対し, 格子点 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ で

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^d \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad 0 \leq \lambda_i < 1, \quad \sum_{i=0}^d \lambda_i = j$$

と表示されるものの全体からなる集合を S_j とする. さらに $j = 1, \dots, d+1$ に対し, 格子点 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ で

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^d \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad 0 < \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=0}^d \lambda_i = j$$

と表示されるものの全体からなる集合を S_j^* とする. すると

$$|S_j^*| = |S_{d+1-j}| \tag{4}$$

が任意の $j = 1, \dots, d+1$ で成り立つ. 実際, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_d$ とすると, $\mathbf{x} \in S_j^*$ を $\mathbf{v}_0 - \mathbf{x} \in S_{d+1-j}$ に送る写像 $S_j^* \rightarrow S_{d+1-j}$ は全単射となる.

実数 $r \in \mathbb{R}$ に対し, $\lfloor r \rfloor$ で r 以下の最大の整数を表し, $\lceil r \rceil$ で r より大きい最小の整数を表すこととする. つまり, $\lfloor r \rfloor$ は $s \leq r < s+1$ を満たす整数 s , $\lceil r \rceil$ は $t-1 < r \leq t$ を満たす整数 t のことである. このとき,

$$0 \leq r - \lfloor r \rfloor < 1, \quad 0 < r - (\lceil r \rceil - 1) \leq 1$$

が成り立つ. 今, 格子点 $\mathbf{x} \in n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ と $\mathbf{y} \in \text{int}(n\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=0}^d \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=0}^d \lfloor \lambda_i \rfloor \mathbf{a}_i + \sum_{i=0}^d (\lambda_i - \lfloor \lambda_i \rfloor) \mathbf{a}_i, \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=0}^d \mu_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=0}^d (\lceil \mu_i \rceil - 1) \mathbf{a}_i + \sum_{i=0}^d (\mu_i - (\lceil \mu_i \rceil - 1)) \mathbf{a}_i \end{aligned}$$

と変形できるので, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^d q_i \mathbf{a}_i + \mathbf{v}, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=0}^d q_i^* \mathbf{a}_i + \mathbf{v}^* \quad (5)$$

なる一意的な表示を持つ. ただし, $q_i, q_i^* \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ かつ $\mathbf{v} \in \bigcup_{j=0}^d S_j, \mathbf{v}^* \in \bigcup_{j=1}^{d+1} S_j^*$ である.

今, 格子点 $\mathbf{v} \in S_j$ と $\mathbf{v}^* \in S_j^*$ を固定する. すると, (5) の格子点 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の個数はともに

$$\sum_{i=0}^d q_i = n - j$$

の非負整数解の個数となる. すなわち

$$\binom{d+1+(n-j)-1}{n-j} = \binom{n+d-j}{d}$$

である. よって $\mathbf{v} \in S_j$ と $\mathbf{v}^* \in S_j^*$ を動かすことによって,

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{P}}(n) &= \sum_{j=0}^d |S_j| \binom{n+d-j}{d}, \\ L_{\mathcal{P}}^*(n) &= \sum_{j=1}^{d+1} |S_j^*| \binom{n+d-j}{d} \end{aligned}$$

となり, $|S_0| = |S_{d+1}| = 1$ から $L_{\mathcal{P}}(n)$ は n に関する d 次多項式となる. さらにその定数項は

$$L_{\mathcal{P}}(0) = \sum_{j=0}^d |S_j| \binom{d-j}{d} = |S_0| = 1 > 0$$

となる. さらに, 等式 (4) を用いると, Ehrhart–Macdonald 相互法則が示せる. □

一般の格子凸多面体の場合は三角形分割を考え, 単体の場合に帰着させる. 格子凸多面体の三角形分割は全ての面が格子単体のとき, 格子三角形分割と呼ばれる. その存在は, 定理 4.1 と同様である. それでは定理 5.3 の証明を与える.

Proof. $\mathcal{P}$ の格子三角形分割 $\mathcal{T}$ を 1 つ固定する. このとき,

$$L_{\mathcal{P}}(n) = \sum_{\emptyset \neq \mathcal{F} \in \mathcal{T}} L_{\mathcal{F}}^*(n)$$

が成り立つ。補題 5.5 より, $L_{\mathcal{F}}^*(n)$ は n に関する次数 $\dim \mathcal{F}$ の多項式であり, その定数項は $(-1)^{\dim(\mathcal{F})}$ である。よって $L_{\mathcal{P}}(n)$ の定数項は定理 4.2 より,

$$\sum_{\emptyset \neq \mathcal{F} \in \mathcal{T}} (-1)^{\dim(\mathcal{F})} = \tilde{\chi}(\mathcal{T}) + 1 = 1$$

となる。

残すは Ehrhart–Macdonald 相互法則だが, こちらは次の事実を認めて, 証明した気になって終わろうと思う。任意の $n > 0$ に関して,

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{P}}^*(n) &= \sum_{\substack{\emptyset \neq \mathcal{F} \in \mathcal{T} \\ \mathcal{F} \not\subset \partial \mathcal{P}}} L_{\mathcal{F}}^*(n), \\ L_{\mathcal{P}}(n) &= \sum_{\substack{\emptyset \neq \mathcal{F} \in \mathcal{T} \\ \mathcal{F} \not\subset \partial \mathcal{P}}} (-1)^{d - \dim(\mathcal{F})} L_{\mathcal{F}}(n). \end{aligned}$$

1 つ目の式が成り立つことは容易にわかる。2 つ目の式は明らかではないが, 2 次元で絵を書いてみるとなんとなく成り立ちそうなことはわかるであろう。この 2 つの式と補題 5.5 を合わせると Ehrhart–Macdonald 相互法則が従う。□

例 5.6. 例 5.2 で考えた単体 $\mathcal{P}_m$ を考えると, その Ehrhart 多項式は

$$L_{\mathcal{P}_m}(n) = \frac{m}{6}n^3 + n^2 + \frac{12-m}{6}n + 1$$

であり, その最高次の係数は体積 $m/6$ に一致している。

演習問題

問題 5.7. 定理 5.3 とその系を使って, Pick の定理を証明せよ。

6 Ehrhart 級数

前節で、膨らました格子凸多面体に含まれる格子点の個数は多項式を使って表せることを見た。それを Ehrhart 多項式と呼んでいたが、Ehrhart 多項式は整数を代入すれば必ず整数を返す。しかし、その係数は一般には整数ではない（ただし必ず有理数となる）。そのため、Ehrhart 多項式自体を見ても、凸多面体の情報が得にくい。数え上げ組合せ論では、こういった数え上げ関数や数列に対し、母関数というものを考えるのが常套手段である。

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し、形式的冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

のことを数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**母関数** (generating function) という。母関数はそのままでは扱いづらいが、単純な形に変形できることがしばしばある。例えば、数列 $(1, 1, 1, \dots)$ の母関数は

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

となることは想像できるであろう（ここで x は数値ではなく単なる文字であることに注意する）。これを拡張する。

補題 6.1. $d \geq 1$ に対し、数列 $\left\{ \binom{d+n-1}{d-1} \right\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^d}$$

である。

Proof. 等式

$$\frac{1}{(1-x)^d} = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^d$$

の右辺を展開すると、 x^n の係数は、方程式 $z_1 + z_2 + \cdots + z_d = n$ の非負整数解の個数であるから、それは

$$\binom{d+n-1}{n} = \binom{d+n-1}{d-1}$$

となる。 □

今、 $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ を数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を表す写像とする。つまり $f(n) = a_n$ である。 f が多項式の場合、その母関数は上記のような単純な形に変形できる。

命題 6.2. 写像 $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、 f が高々 d 次の多項式であることと、高々 d 次の多項式 g が存在して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n = \frac{g(x)}{(1-x)^{d+1}} \quad (6)$$

が成り立つことは同値である。

Proof. V を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から $\mathbb{R}$ への写像全体の集合とする。このとき、写像上の通常の演算により V は線型空間となる。また V_1 を高々 d 次の多項式として表される $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から $\mathbb{R}$ への写像全体の集合とすると、これは V の部分空間となり、特に、次元は $d+1$ である。次に V_2 を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から $\mathbb{R}$ への写像 f で、高々 d 次の多項式 g が存在して、等式 (6) が成り立つものの全体の集合とする。これもまた V の部分空間で、次元は $d+1$ である。

$V_1 = V_2$ が成り立てば命題の主張は示せる．今、 $f \in V_2$ をとる．すると、高々 d 次の多項式 $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ が存在して、等式 (6) を満たす．補題 6.1 から

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \frac{g(x)}{(1-x)^{d+1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} x^n \right) \cdot g(x)$$

となる．両辺の係数を比較すると、

$$f(n) = \sum_{i=0}^d b_i \binom{d+n-i}{d}$$

となり、 $f(n)$ は高々 d 次の n に関する多項式である．よって $f \in V_1$ が従い、 $V_2 \subset V_1$ がわかる． V_1 と V_2 の次元が同じなので、従って $V_1 = V_2$ となる． $\square$

d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ に対し、Ehrhart 多項式から得られる数列 $\{L_{\mathcal{P}}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数

$$\text{Ehr}_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} L_{\mathcal{P}}(n)x^n$$

を $\mathcal{P}$ の **Ehrhart 級数** (Ehrhart series) という．Ehrhart 多項式は d 次の多項式であったので、命題 6.2 から高々 d 次の多項式 $h^*(x) = h_0^* + h_1^*x + \cdots + h_d^*x^d$ が存在して、

$$\text{Ehr}_{\mathcal{P}}(x) = \frac{h^*(x)}{(1-x)^{d+1}}$$

と変形できる．この多項式 $h^*(x)$ のことを $\mathcal{P}$ の **h^* 多項式** といい、その係数の列 $h^*(\mathcal{P}) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ を **h^* 列** という．特に、 h_i^* は整数であることに注意する．命題の証明により、Ehrhart 多項式は

$$L_{\mathcal{P}}(n) = \sum_{i=0}^d h_i^* \binom{d+n-i}{d}$$

として h^* 列から計算できる．また、簡単な計算により、

- $h_0^* = 1$,
- $h_1^* = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^N| - (d+1) \geq 0$,
- $h^*(1) = h_0^* + \cdots + h_d^*$ は $\mathcal{P}$ の **正規化体積** $\text{Vol}(\mathcal{P})$ と一致する．ここで、正規化体積とは $\mathcal{P}$ の $\text{aff}(\mathcal{P})$ で体積の $d!$ 倍である．特に正規化体積は常に整数となることに注意する．

次に内部の格子点の個数に関する母関数を考えるが、便宜上、数列 $(0, L_{\mathcal{P}}^*(1), L_{\mathcal{P}}^*(2), \dots)$ の母関数を考える．すると次の定理が成り立つ．

定理 6.3. 等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_{\mathcal{P}}^*(n)x^n = \frac{h_d^*x + h_{d-1}^*x^2 + \cdots + h_0^*x^{d+1}}{(1-x)^{d+1}}$$

が成り立つ．

Proof.

$$\frac{h_d^*x + h_{d-1}^*x^2 + \cdots + h_0^*x^{d+1}}{(1-x)^{d+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

とすると, 補題 6.1 から

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{i=0}^d h_{d-i}^* \binom{d+n-i-1}{d} \\
&= \frac{1}{d!} \sum_{i=0}^d h_{d-i}^* (d+n-i-1)(d+n-i-2) \cdots (n-i) \\
&= \frac{1}{d!} \sum_{i=0}^d h_i^* (n+i-1)(n+i-2) \cdots (n+i-d) \\
&= (-1)^d \frac{1}{d!} \sum_{i=0}^d h_i^* (-n-i+1)(-n-i+2) \cdots (-n-i+d)
\end{aligned}$$

となる. すると Ehrhart–Macdonald 相互法則により,

$$b_n = (-1)^d L_{\mathcal{P}}(-n) = L_{\mathcal{P}}^*(n)$$

が従い, 定理が導かれた. □

d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ に対し, $\deg(\mathcal{P})$ を $\mathcal{P}$ の h^* 多項式の次数とする. つまり $\deg(\mathcal{P}) = r$ なら $h_r^* \neq 0$ かつ $h_{r+1}^* = \cdots = h_d^* = 0$ である. さらに $\text{codeg}(\mathcal{P}) = d+1 - \deg(\mathcal{P})$ とする. この定理から次の系が従う.

系 6.4. d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ に対し次が成り立つ:

- $\text{codeg}(\mathcal{P}) = \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : \text{int}(n\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N \neq \emptyset\}$
- $h_{\deg(\mathcal{P})}^* = |\text{int}(r\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N|$, ただし $r = \text{codeg}(\mathcal{P})$,
- $h_d^* = |\text{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^N|$.

これまでのことから, h^* 列において h_0^*, h_1^*, h_d^* は非負整数であることがわかっている. 実は, すべて非負整数になることが知られている.

定理 6.5 (Stanley の非負性定理). 任意の i に対して, $h_i^* \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である.

一般の場合は証明しないが, 実は単体の場合は以前の証明の中で示されている. より一般に, 単体の場合, h_i^* が数え上げで計算できる.

定理 6.6. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^N$ を d 次元格子単体, $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d$ をその頂点とし, $j = 0, \dots, d$ に対し, 格子点 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^N$ で

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^d \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad 0 \leq \lambda_i < 1, \quad \sum_{i=0}^d \lambda_i = j$$

と表示されるものの全体からなる集合を S_j とする. このとき, $i = 0, \dots, d$ に対し,

$$h_i^* = |S_i|$$

が成り立つ.

Proof. 補題 5.5 で示した等式

$$L_{\mathcal{P}}(n) = \sum_{j=0}^d |S_j| \binom{n+d-j}{d}$$

から従う。

□

例 6.7. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ を $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 3)$ を頂点とする 3 単体とする。

$$\lambda_0(0, 0, 0) + \lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(1, 1, 3)$$

が格子点となる $0 \leq \lambda_i < 1$ を考えると, $\lambda_3 = 0, 1/3, 2/3$ となることがわかる. さらに $\lambda_0 + \dots + \lambda_3$ が整数となるときを考えると,

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0, 0), (1/3, 2/3, 2/3, 1/3), (2/3, 1/3, 1/3, 2/3)$$

となる. よって $|S_0| = 1, |S_1| = 0, |S_2| = 2, |S_3| = 0$ となるので, $h^*(\mathcal{P}) = (1, 0, 2, 0)$ である. 特に,

$$L_{\mathcal{P}}(n) = \sum_{i=0}^3 h_i^* \binom{n+3-i}{3} = \frac{1}{2}n^3 + n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

を得る.

最後に Ehrhart 多項式 (h^* 多項式) に関する未解決問題を紹介する.

問題: 非負整数係数多項式 $1 + h_1^*x + \dots + h_d^*x^d$ がある d 次元格子凸多面体の h^* 多項式となる必要十分条件を見つけよ.

この問題はかなりの範囲で未解決である. 部分的な結果を紹介する.

次元が低いとき

- $d = 0, 1$ のときは自明である.
- $d = 2$ のときは, Scott により証明されている.
($1 + h_1^*x$ または $1 \leq h_2^* \leq h_1^* \leq 3h_2^* + 3$ または $1 + 7x + x^2$ を満たす)
- $d = 3$ のときは, 内部に格子点を持つ場合 (つまり $h_3^* \neq 0$) は未解決 (持たない場合は次の場合から従う).

次数が低いとき

- 次数が 0, つまり 1 のときは自明.
- 次数が 1, つまり $1 + h_1^*x$ のときは Batyrev–Nill により証明されている.
- 次数が 2, つまり $1 + h_1^*x + h_2^*x^2$ のときは, Henk–Tagami と Treutlein により証明されている.

体積が小さいとき

- 正規化体積が 3 以下, つまり $1 + h_1^* + \dots + h_d^* \leq 3$ のときは, Hibi–Higashitani–Nagazawa により証明されている.
- 正規化体積が 4 のときは, Hibi–Higashitani–Li により証明されている.
- 正規化体積が 5 のときは, Higashitani と Tsuchiya により証明されている.

項が少ないとき

- 二項のみ, つまり $1 + h_k^*x^k$ のときは, Batyrev–Hofscheir により証明されている.
- 三項かつ対称, つまり $1 + h_k^*x^k + x^{2k}$ のときは Higashitani–Nill–Tsuchiya により証明されている.

演習問題

問題 6.8. 例 5.2 の格子単体 $\mathcal{P}_m$ の h^* 列を求め, その Ehrhart 多項式を計算せよ ($m = 3$ の場合は例 6.7 を見よ).

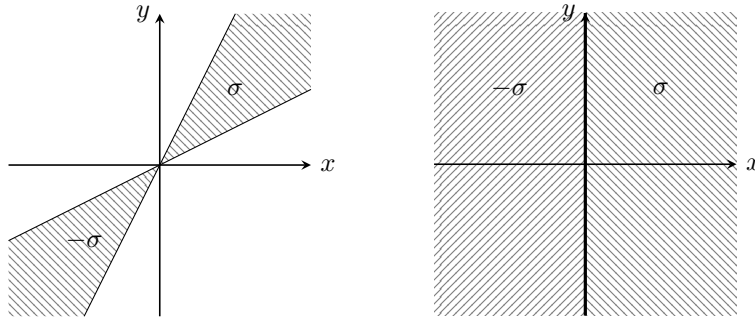
7 格子凸多面体の代数幾何学

格子凸多面体の研究で欠かせないのが代数幾何学との繋がりである．この節では詳しい定義は適宜飛ばし，雰囲気を感じ取ってほしい．

定義 7.1. 空間 $\mathbb{R}^d$ の集合 σ が **(多面) 錐** (polyhedral cone) であるとは，有限個の点 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^d$ が存在して，

$$\sigma = \text{Cone}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) := \{a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_s \mathbf{v}_s : a_i \geq 0\}$$

となる時にいう．また $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ が全て格子点としてとれるとき， σ を**有理凸錐**という．さらに $\sigma \cap (-\sigma) = \{\mathbf{0}\}$ のとき， σ を**強凸錐**と呼ぶ．ここで， $-\sigma = \text{Cone}(-\mathbf{v}_1, \dots, -\mathbf{v}_s)$ である．空集合 $\emptyset$ と $\text{Cone}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$ も有理強凸錐であるとする．アフィン空間 $\text{aff}(\sigma)$ の次元を σ の次元と定義する．



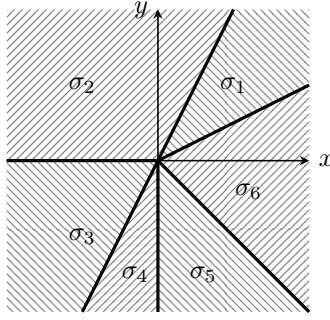
有理強凸錐はアフィントーリック多様体と呼ばれるものと対応している．一般にアフィン多様体 $(\mathbb{C}^*)^d$ は各座標ごとの積により群をなす．ここで $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ である． $(\mathbb{C}^*)^d$ と同型なアフィン多様体を**(代数的) トーラス** (algebraic torus) と呼ぶ．**アフィントーリック多様体** (affine toric variety) とは，既約なアフィン多様体 V でトーラス T を稠密な Zariski 開集合として含み， T の自分自身への作用を V 全体への作用 $T \times V \rightarrow V$ に拡張するものである．つまり，アフィントーリック多様体とは，トーラスがぎっしり詰まった特殊なアフィン多様体のことである．このアフィントーリック多様体を“うまく”貼り合わせていくことで一般のトーリック多様体が作られる．

d 次元有理強凸錐から d 次元アフィントーリック多様体を構成することができる．したがってトーリック多様体を組合せ論的に捉えるには有理強凸錐が“うまく”貼り合わせられている集合を考えればいいと想像できるであろう．凸多面体と同様で，錐 $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ に対し，支持超平面を定義し，その共通部分を σ の面と呼ぶ．

定義 7.2. 空間 $\mathbb{R}^d$ の**扇** (fan) Σ とは有限個の有理強凸錐 $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ の集合で，以下の条件を満たすもののことをいう：

- 任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し， σ の各面もまた Σ に属する．
- 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ に対し，その共通部分 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ はそれぞれの面となっている．

つまり扇とは面に沿って有理強凸錐を“うまく”貼り合わせた集合である．この扇の構造に対応してそれぞれのアフィントーリック多様体を貼り合わせることで，(正規) トーリック多様体 X_Σ が得られる．またどんな (正規) トーリック多様体も扇から構成することができる．さらにトーリック多様体の様々な性質は，対応する扇の性質に言い換え可能，つまり組合せ論的に調べることが可能である．例えば，扇 Σ の次元を属する有理強凸錐の最大次元と定義すれば，これは X_Σ の次元と一致する．また扇 Σ は $|\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = \mathbb{R}^d$ を満たせば**完備** (complete) であるというが，これは X_Σ が完備であることと同値である．



それではこのトーリック多様体と格子凸多面体の関係は何であろうか．まずは格子凸多面体から扇を構成する． $P \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とする．このとき P は一意的なファセット表現

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{任意の } P \text{ のファセット } F \text{ に対し } \langle a_F, x \rangle \geq -b_F\}$$

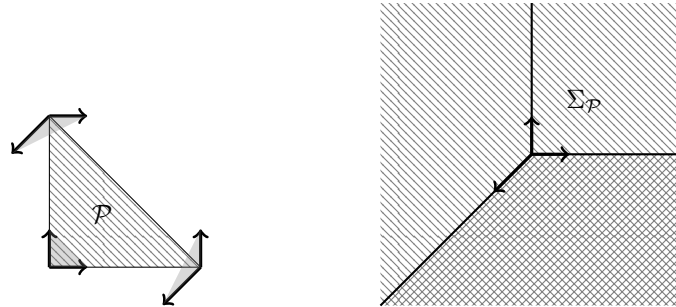
を持つ．ここで $a_F \in \mathbb{Z}^d$ と $b_F \in \mathbb{Z}$ は $b_F = 0$ ならば a_F は原始的，つまり成分全体の最大公約数が 1 であり，そうでなければ $a_F/b_F \notin \mathbb{Z}^d$ を満たすものである．いま， P の各面 Q に対し，有理強凸錐 σ_Q を

$$\sigma_Q := \text{Cone}(a_F : F \text{ は } Q \subset F \text{ となる } P \text{ のファセット})$$

で定義し，

$$\Sigma_P := \{\sigma_Q : Q \text{ は } P \text{ の面}\}$$

で定義すると Σ_P は扇となる．この扇を P の**正規扇** (normal fan) と呼び，対応するトーリック多様体を Σ_P と書く．



定理 7.3. d 次元格子凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ に対し， X_P は d 次元かつ射影的，つまり X_P はある射影空間 $\mathbb{P}^n$ の Zariski 閉部分多様体として埋め込める．またどんな d 次元射影トーリック多様体も d 次元格子凸多面体から構成することができる．

したがって，射影トーリック多様体を調べたい場合，格子凸多面体を調べればよいことがわかる．しかし，一般に射影トーリック多様体と格子凸多面体は 1 対 1 ではない．例えば，格子凸多面体を膨らましてその正規扇は変化しない．つまり凸多面体としては変化しているが，射影トーリック多様体は変化しないのである．これは一般に射影多様体は射影空間に埋め込めるかどうかだけを見ており，埋め込み方は気にしていないからである．射影トーリック多様体を研究するのであればこれで十分だが，格子凸多面体をより詳しく使うために，その埋め込み方も意識していく．

複素射影多様体 X と X 上の豊富な直線束 L の組 (X, L) は**偏極多様体**と呼ばれる（豊富な直線束の代わりに X 上の豊富な因子 D を用いて (X, D) を偏極多様体とすることもある）．詳しい定義は書かないが，この L や D が射影多様体の埋め込み方を表している．つまり，偏極多様体とは埋め込み方の情報も含んだ射影多様体である．実は d 次元格子凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ は上記のファセット表記を使って豊富な直線束 L_P を構

成することができ、逆に d 次元偏極トーリック多様体 (X, L) からある d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P}_L \subset \mathbb{R}^d$ を構成することができる。この2つの構成方法により、1対1対応

$$\{(X, L) : d \text{ 次元偏極トーリック多様体} \} \xleftrightarrow{1:1} \{\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d : d \text{ 次元格子凸多面体} \}$$

を得る。

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とし、 (X, L) を対応する偏極トーリック多様体とすると、 $\mathcal{P}$ の体積や Ehrhart 多項式は次のような関係がある。

- $|\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| = h^0(L) : X$ が埋め込まれる射影空間の次元
- $\text{Vol}(\mathcal{P}) = L^d : (X, L)$ の次数
- $L_{\mathcal{P}}(n) = \chi(nL) : nL$ の Euler–Poincaré 標数

この他にも様々な代数幾何学の性質が格子凸多面体の言葉で翻訳されている（例えば非特異性や Fano 性など）。今回は種数に関する性質と格子凸多面体の数え上げの繋がりを紹介する。まず格子凸多面体の数え上げに関する有名な結果に日比の下限定理というものがある。

定理 7.4 (日比の下限定理). d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ が内部に格子点を持ったとする。つまり、 $h_d^* \neq 0$ である。このとき、任意の $2 \leq i \leq d-1$ に対し、 $h_1^* \leq h_i^*$ が成り立つ。

特に、内部に格子点を持てば、 h^* 列の全ての成分は正となることがわかる。この定理は組合せ論的な手法で証明されている。そこで気になるのは、この定理が偏極トーリック多様体に対してはどういった意味を持つのかである。この定理が発表されて 20 年以上経った現在、この不等式の等号を満たす偏極トーリック多様体は特別なものになることが発見された。

定理 7.5 (川口). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を内部に格子点を持つ d 次元格子凸多面体とする。このとき任意の $2 \leq i \leq d-1$ に対し、 $h_1^* = h_i^*$ が成り立つことと対応する偏極トーリック多様体が Castelnuovo となることは同値である。

この定理の理解するために次は Castelnuovo 多様体とは何か見ていく。古典的な代数幾何学における結果として、射影空間内の曲線に関する種数の上限が知られている。

定理 7.6 (Castelnuovo). $C \subset \mathbb{P}^N$ を種数 g 、次数 d とする非退化な既約曲線とする。このとき、

$$g \leq m(d-N) - \frac{1}{2}m(m-1)(N-1)$$

が成り立つ。ただし、 $m = \lfloor (d-1)/(N-1) \rfloor$ である。

この種数の上限は **Castelnuovo bound** と呼ばれ、この上限に達する曲線のことを **Castelnuovo 曲線** と呼ぶ。藤田はこの Castelnuovo 曲線の高次元版を定義し、その性質を調べた。

(X, L) を d 次元偏極多様体としたとき、 $\chi(nL)$ は n に関する d 次多項式であり、 $\chi_j(X, L)$ を

$$\chi(nL) = \sum_{j=0}^d \chi_j(X, L) \binom{n+j-1}{j}$$

と定める。ここで $\chi_j(X, L) \in \mathbb{Z}$ である。このとき、**断面種数** $g(X, L)$ は次の式で定義される：

$$g(X, L) := 1 - \chi_{d-1}(X, L).$$

断面種数は偏極多様体の分類理論において重要な不変量である。藤田は Castelnuovo bound の高次元版として、断面種数の上限を与えた。

定理 7.7 (藤田の上限定理). X を d 次元複素射影的多様体, L を $h^0(L) \geq d+2$ を満たす X 上の豊富な直線束とする. さらに, 次の条件を仮定する:

- (1) L は basepoint free である.
- (2) $|L|$ によって定まる射がその像に双有理である.

このとき,

$$g(X, L) \leq m\Delta(X, L) - \frac{1}{2}m(m-1)(L^d - \Delta(X, L) - 1)$$

が成り立つ. ただし, $m = \lfloor (L^d - 1)/(L^d - \Delta(X, L) - 1) \rfloor$ かつ $\Delta(X, L) = L^d + d - h^0(L)$ である. $\Delta(X, L)$ は (X, L) の Δ 種数と呼ばれている.

定理 7.7 の条件 (2) の双有理性は上限を得るために必要不可欠である. 偏極多様体が **Castelnuovo** であるとは定理 7.7 の仮定を満たし, かつその断面種数がこの上限に達するときをいう. ここまでかなりの未定義語句が出てきたため, 想像しにくくなっていると思うが, Castelnuovo 多様体とは定理 7.7 の意味で, 断面種数が最大のものをいう. この定理自体は格子凸多面体の言葉で言い換え可能である.

定義 7.8. d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}^d$ が **spanning** であるとは,

$$\mathbb{Z}((\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d) \times \{1\}) = \mathbb{Z}^{d+1}$$

が成立するときをいう. ただし, 有限集合 $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\} \subset \mathbb{Z}^d$ に対し, $\mathbb{Z}A = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_r : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{Z}\}$ である. つまり, $\mathcal{P}$ が spanning であることと, $\mathbb{Z}^d$ の任意の格子点が $\mathcal{P}$ に含まれる格子点のアフィン整数結合で書けることと同値である.

命題 7.9. d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ と対応する偏極トーリック多様体 (X, L) に対して次が成り立つ:

- L は basepoint free である.
- $|L|$ によって定まる射がその像に双有理であることと, $\mathcal{P}$ が spanning であることは同値である.
- $g(X, L) = h_2^* + 2h_3^* + \dots + (d-1)h_d^*.$
- $\Delta(X, L) = h_2^* + h_3^* + \dots + h_d^*.$

したがって定理 7.7 の格子凸多面体版は次のようになる.

定理 7.10. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体で $h_1^* \geq 1$ とする. さらに $\mathcal{P}$ は spanning であると仮定する. このとき,

$$h_2^* + 2h_3^* + \dots + (d-1)h_d^* \leq m(h_2^* + \dots + h_d^*) - \frac{m(m-1)}{2}h_1^* \quad (7)$$

が成り立つ. ただし, $m = \lfloor (h_1^* + \dots + h_d^*)/h_1^* \rfloor$ である.

d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P}$ が定理 7.10 の仮定を満たし, さらに不等式 (7) が等号となると, $\mathcal{P}$ を **Castelnuovo 多面体** と呼ぶ. つまり付随する偏極トーリック多様体が Castelnuovo となる格子凸多面体である. したがって定理 7.5 は内部に格子点を持つ Castelnuovo 多面体の特徴付けである. ではこの結果を拡張し, 内部に格子点を持つとは限らない Castelnuovo 多面体の特徴付けることは可能か. そのためには, 日比の下限定理

をまず拡張する必要がある。

定理 7.11 (Hofscheier–Katthän–Nill). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元 spanning 多面体とする。このとき、任意の $2 \leq i \leq \deg(\mathcal{P}) - 1$ に対し、 $h_1^* \leq h_i^*$ が成り立つ。

それでは、一般の Castelnuovo 多面体の特徴づけを紹介する。

定理 7.12 (土谷). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とする。このとき $\mathcal{P}$ が Castelnuovo になることと、次の 3 つの条件が成り立つことは同値である：

- (1) $\mathcal{P}$ は spanning である。
- (2) 任意の $2 \leq i \leq \deg(\mathcal{P}) - 1$ に対し、 $h_1^* = h_i^*$ が成り立つ。
- (3) $h_1^* \geq h_{\deg(\mathcal{P})}^*$, つまり $|\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1) \geq |\text{int}(r\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d|$ である。ただし $r = \text{codeg}(\mathcal{P})$ 。

内部に格子点を持つ場合と違い定理 7.12 の (1) と (3) の条件は必要である。

例 7.13. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ を

$$(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 2), (1, 0, -1, 0)$$

を頂点とする 4 次元格子凸多面体とする。このとき、 $h^*(\mathcal{P}) = (1, 1, 1, 1, 0)$ である。つまり定理 7.12 の (2) と (3) の条件を満たしている。一方で $(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{Z}^4$ という格子点は $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^4$ のアフィン整数結合で書くことができないため、 $\mathcal{P}$ は spanning ではない。したがって、定理 7.12 より $\mathcal{P}$ は Castelnuovo ではない。

例 7.14. $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ を

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 2, 3), (0, 0, -1)$$

を頂点とする 3 次元格子凸多面体とする。このとき、 $h^*(\mathcal{P}) = (1, 1, 2, 0)$ である。さらに $\mathcal{P}$ が spanning であることも容易にわかる。よって定理 7.12 の (1) と (2) の条件を満たしている。しかし (3) の条件を満たしていないため、 $\mathcal{P}$ は Castelnuovo ではない。

補足 7.15. 定理 7.12 と定理 7.5 を比べると内部に格子点を持てば、条件 (1) と (3) が必要ではなくなる。条件 (3) は簡単で、 $\mathcal{P}$ が内部に格子点を持てば、その条件は $|\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| \geq |\text{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d| + (d+1)$ であり、 $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ には少なくとも頂点 ($d+1$ 個以上) と内部の格子点が含まれるため、その不等式は成り立つ。次に条件 (1) だが、これは日比の下限定理の証明を見れば、内部に格子点を持ち条件 (2) を満たすと (1) が成り立つことが証明できる。